<u>Математикалық логика және дискреттік математикадан лекциялар жинағы</u>

1-лекция

1. Логикалық алгебра

1. Тұжырымдар .
2. Күрделі тұжырымдар.
3. Логикалық амалдар.
4. Эквиваленттіктер.

1.1 Тұжырымдар. Логикалық амалдар

Әрбір математикалық теорияның өзінің негізгі зерттеу объектілері бар. Мысалы, арифметика негізінен сандар мен олардың арасындағы негізгі байланысты зерттесе, геометрия әртүрлі геометриялық денелерді, олардың негізгі түрлендіруін зерттейді, ал математикалық анализ үшін негізгі объект функциялар мен оларға қолданылатын негізігі амалдар болып табылады. Тұжырымдар алгебрасы деп аталатын математикалық логиканың негізгі зерттеу объектісі тұжырымдар болып табылады.

Тұжырым математикалық логиканың бастапқы уғымы және зерттеу объектісі болып табылады. Логикалық ұғым ретінде тұжырымның мазмұнын мынадай анықтама арқылы ашып көрсетуге болады.

<u>Анықтама.</u> Тұжырым деп мазмұны туралы ақиқат я жалған деген екі тұжырымның біреуін ғана жасауға болатын хабарлы сөйлемді айтамыз.
Тұжырым латын әліпбиінің p, q, r, s т.с.с. немесе x, y, z т.с.с. кіші әріптерімен белгіленіп жазылады. Оларды, кейде, p_1, p_2, p_3 т.с.с. немесе x_1, x_2, x_3 т.с.с. тәртіппен нөмірлеп те көрсетеді. Анықтамада айтылған «ақиқат» сөзін қысқаша «а» әрпі және «жалған» сөзін «ж» әрпі арқылы белгілейміз. Кейде «а=1» және «ж=0» деген белгілемелер де қолданылады.

Сөйтіп, p тұжырымды белгілемелер арқылы былайша белгілеп анықтауға болады:

$$p = \{ \frac{а, егер\ p\ акикат\ болса}{ж.егер\ p\ жалган\ болса} \qquad (1)$$

немесе

$$x = \{ \frac{1, егер\ x=1\ болса}{0.егер\ x=0\ \ болса} \qquad (2)$$

Осындағы (1) не (2) қалыптамаларға сәйкес анықталатын және жаңа тұжырым болатын бөлімшесі жоқ p, q, r, s т.с.с. тұжырымдарды элементар (жай) тұжырымдар деп айтады. Жай тұжырымдерды белгілейтін p, q, r т.с.с. әріптерді жай айнымалылар немесе элементар айнымалылар дейміз. «а» және «ж» әріптерді немесе «1» мен «0» цифрларын тұрақты тұжырымдар немесе логикалық тұрақтылар дейміз. Мына {a,ж} немесе {1,0} екі элементті жиындарды жай тұжырымдардың ақиқаттық мәндер жиыны деп айтуға келісеміз.

Бірнеше мысал келтірейік.

“15 саны 4 санынан үлкен”. Бұл ақиқат тұжырым. ”Шымкент қаласы Қазақстанның астанасы”. Бұл жалған тұжырым.”Сіздің жасыңыз нешеде?” Бұл сөйлем тұжырым емес, себебі бұл сөйлемнің ақиқаттығы немесе жалғандығы туралы айтуға болмайды. ”Жай сандар шексіз көп”. Бұл тұжырым ақиқат, себебі ол Евклидтің белгілі теоремасы.

Мысал. Берілген сөйлемнің қайсысы тұжырым болатынын, қайсысы тұжырым деп қарауға болмайтынын атап көрсетіңіз.

1. p_1 = «Ассалаумағалейкум», p_2 = «Барында оралыңның күл де ойна», p_3 = «Логика пәнін ұстанасың ба?», p_4 = «Екі жарты – бір бүтін», p_5 = «Адамнан басқа күлетін жан иесі жоқ».

2. q_1= «Екі жерде екі – төрт», q_2 = «Екі дегенім – екеу», q_3= «6 саны 3-тен екі есе үлкен сан», q_4 = «x саны 3 еселік сан», q_5 = «$\frac{2}{3}$ саны $\frac{3}{4}$ ке еселік сан».

3. S_1 = «2+2=5-1», s_2 = «$2=\frac{4}{2}$», s_3 = «6=3*2», s_4 = «3x=6», s_5 = «s=vt», мұндағы s – қозғалыстағы дененің жүрген жолы, v- сол дененің жылдамдығы, t-жұмсалған уақыт.

4. r_1 = «Алматы-Қазақстан Республикасының оңтүстік астанасы», r_2 = «Қызылорда қаласы-Қазақстанның астанасы болған», r_3 = «Семей қаласы – Қазақстанның астанасы», r_4 = «Орынбор – қазақ елінің астаналық қаласы болған», r_5 = «Астана – Қазақстан Республикасының астанасы».

5. $к_1$ = «Институт кітапханасында 342072 кітап бар», $к_2$ = «π санының ондық бөлшекке жіктелімінің жүзмыңыншы орындағы цифры 7 ге тең», $к_3$ = « $x^n + y^n = z^n$ » теңдеуінің n >2 болғанда бүтін мәнді шешулері жоқ».

Шешуі. 1. Тұжырымның анықтамасы бойынша тұжырым хабарлы сөйлем болуы және оның мазмұны туралы «а» немесе «ж» деген екі тұжырымның біреуін және тек қана біреуін ғана айта алатындай болуы шарт. p_1, p_2 лепті сөйлем үлгісіндегі тілдік қалыптамалар, ал p_3 – сұраулы сөйлем. Олардың мазмұны туралы «ақиқат» я «жалған» деген тұжырым жасау мүмкін емес. Демек, бұларды тұжырым деп анықтауға болмайды. p_4, p_5 сөйлемдердің екеуі де «а» деген мән қабылдайтын тұжырым, яғни $p_4 \equiv а$ және $p_5 \equiv а$.

2. $q_1 \equiv а$ болатын тұжырым, q_2 – хабарлы сөйлем үлгісінде берілгенмен, оның мазмұны туралы «ақиқат» я «жалған» тұжырым жасауға негіз жоқ. Демек q_2 – ні де тұжырым деп кесіп айтуға болмайды. q_3 туралы $q_3 \equiv а$

болатын тұжырым деп айтуға болады. q_4 сөйлем тұжырым бола алмайды. Өйткені x ке нақтылы мән бермей тұрғанда бұл сөйлем туралы «а» не «ж» деген тұжырым айтуға болмайды. q_5 сөйлем тілдік бітімі бойынша дұрыс жасалмаған құрылым боп табылады. Өйткені, бөлшек сандар үшін «еселі болады» деген қатынастық сөз қолданылмайды. Демек, q_5 сөйлем тұжырым бола алмайды.

3.s_1, s_2, s_3, s_5 тұжырымдар және $s_1 \equiv а$, $s_2 \equiv а$, $s_3 \equiv а$, $s_5 \equiv а$. s_4 тұжырым бола алмайды, өйткені құрамында x белгісіз бар.

4. $r_1 \equiv а$, $r_2 \equiv а$, $r_3 \equiv ж$, $r_4 \equiv а$, $r_5 \equiv а$.

5. Институт кітапханасында дәл бүгін неше кітап барын ешкімнің білмеуі әбден мүмкін. Алайда, арнайы тексеру мақсатымен кітап санағы жүргізіле қалса, осы сөйлемнің мазмұны «ақиқат» я «жалған» екеніне көз жеткізуге болады. Демек $к_1$ сөйлемді тұжырым деп карауға құқымыз бар. $к_2$ сөйлем туралы да осындай ой айтуға болады. $к_3$ қалыптамалық сөйлемді білім тарихшылары Ферманың ұлы теоремасы деп айтады. Бұл теореманың «ақиқаттығы» немесе «жалғандығы» туралы мәселе әлі шешілген жоқ. Дегенімен, математиктердің басым көпшілігі Ферма теоремасының ақиқаттығы я жалғандығы туралы мәселе қайткенде бір шешіледі деген ойды қуаттайды. Сондықтан, $к_3$ сөйлемді де тұжырым деп қарамаймыз.

Тұжырымдік қалыптама туралы түсінік

Құрамында белгісіз айнымалы боп келген хабарлы сөйлемді тұжырым деп карауға болмайтынын айтқанбыз. Оның себебін де білеміз. Өйткені ондай сөйлемнің мағынасы туралы «ақиқат» я «жалған» деп бекітімдік ой айту мүмкін емес.

1-мысал. $p_1(x)$ = «x – тақ сан»; $p_2(x)$ = «x – 15 тің бөлгіші»; $p_3(x)$ = «x – Қазақстан Республикасының астанасы»; $p_4(x)$ = «x – қазақстандық тұңғыш ғарышкер»; $p_5(x)$ = «x+5=».

Бұл сөздік құрылымдардың әмбесі хабарлы сөйлем үлгісінде берілгенімін оларды тұжырым деп қорытындылауға негіз жоқ. Өйткені, олардың мазмұны туралы «ақиқат» я «жалған» деген екі тұжырым айту мүмкін емес. Егерде осы сөйлемдердегі x айнымалының орнына белгілі бір нәрселік жиыннан алынған нақтылы мәндер қойылса, сонда олар, шын мәнінде, тұжырымга айналады, яғни олар туралы «а» я «ж» деген тұжырымға келеміз.

$3 \in N$ болғанда, $p_1(3)$ = «3-тақ сан» = а

$2 \in N$ болғанда, $p_1(2)$ = «2-тақ сан» = ж

$4 \in N$ болғанда, $p_2(4)$ = «4 саны 15 тің бөлгіші» = ж

$3 \in N$ болғанда, $p_2(3)$ = «3 саны 15 тің бөлгіші» = а

Айталық, A – қазақстандық қалалар жиыны болсын.

x = Семей болғанда, p_3 (Семей = «Семей – Қазақстанның астанасы» = ж

x = Астана болғанда, p_3 (Астана) = «Астана –Қазақстанның астанасы» = а

B – қазақстандық адамдар жиыны болсын.

x = Ахмет болса, p_4(Ахмет) = «Ахмет – қазақстандық тұңғыш ғарышкер» = ж; x = Тоқтар болса, p_4(Тоқтар) = «Тоқтар қазақстандық тұңғыш ғарышкер» = а.

N – натурал сандар жиыны берілсін.

x = 3 болғанды, $p_5(3)$ = «3+5=7»=ж; x=2 болса, $p_5(2)$= «2+5=7»=а.

2-мысал. $Q_1(x,y)$ = «x<y»; $Q_2(x,y)$ = «x деген кісі y – тің інісі»; $Q_3(x,y)$ = «x оқулықтың авторы - y»; $Q_4(x,y)$ = «x+y=6»; $Q_5(x,y)$ = «x||y».

$A^2=\{(3,4),(3,5),(3,3),(4,3),(4,4),(5,3),(5,5)\}$.

x=3, y=4 болғанда, Q_1 (3,4)= «3<4» = а; x=4, y=3 болғанда, Q_2 (4,3)= «4<3»=а, x=4, y=4 болғанда, $Q_1(4,4)$= «4<4» =ж; т.с.с.

Осындай жолмен арнайы құрылған B^2, C^2, $Д^2$ және E^2 жиындарынан (x,y) нақтылы қос мәндерді ала отырып, $Q_2(x,y)$, $Q_3(x,y)$, $Q_4(x,y)$ және $Q_5(x,y)$ сөйлемдердің де тұжырым болатынын көрсету қиын емес.

Осы талданып өткен мысалдар тұжырымдік форма (қалыптама) деген қосалқы ұғым енгізуге себепкер болады.

Анықтама. Құрамында белгісіз айнымалы шама бар хабарды сөйлем үлгісіндегі қалыптамадағы белгісізге қандай да бір нәрселер жиынтығынан алынған нақтылы мәндер берілген кезде қалыптама тұжырымге айналса, онда бұл қалыптаманы тұжырымдік форма (қалыптама) деп айтамыз.

Ескертпе. Пайымдар туралы сөз еткенде құрамында белгісіз шамалар бар пайымдардың пропозициялық функциялар деп аталатынын ескертіп өткенбіз[2]. Сонымен, салыстыра қарасақ, тұжырымдік қалыптаманы да пропозициялық функция деп қарауға болатынын көреміз. Тұжырымдік қалыптаманы кей ретте «тұжырым-функция» немесе «предикат-функция» деп те атайды. Бұл мәселеге осы жұмыстың предикаттар логикасы деп аталатын тарауында кеңірек тоқталамыз.

Тұжырымдар алгебрасы

Кез келген бос емес $\Im$ жиынды АЛФАВИТ деп атауға келісеміз. Бұл жиынның элементтерін осы алфавиттің символдары (белгілері) деп айтылады. $\Im$ алфавиттен алынған кез келген шекті (бос болуыда мумкін) символдар тізбегі сөйлем болады.

Мынадай алфавитті қарастырайық: $\Im = \Im_1 \cup \Im_2 \cup \Im_3$ **,** мұнда

$\Im_1 = \{ A_0, A_1, A_2, \dots \}$, $\Im_2 = \{ \neg, \&, \mathrm{v}, \supset \}$, $\Im_3 = \{ (\ ,\ ) \}$.

Бұл жерде $\Im_1$ жиын тұжырымдардың айнымалылары немесе пропозиционал айнымалылыр деп айтылады , мұнда $\Im_2$ жиын жалғаулық жұрнақтар, $\neg$ - **терістеме, &- конъюнкция, v – дизъюнкция, $\supset$- импликация .** $\Im_3$ - жақшалардан тұратын көмекші символдар.

Тұжырымдар алгебрасының формуласы ұғымы төмендегідей анықталады:

1) Пропозиционалды айнымалы бұл –формула;
2) Егер $\Re$ және $\aleph$ -формула болса , онда $\neg\Re$, $(\Re\&\aleph)$, $(\Re v\aleph)$, $(\Re\supset\aleph)$ –формула болады;
3) (1) (2) пунктерде құралғандардан басқа формула жоқ.

Бұдан былай кез келген пропозиционалды айнымалыларды белгілеу үшін үлкен латын әріптерін A,B,C, ..., ал үлкен готикалық әріптер $\Im$, $\Re$, $\aleph$, ... арқылы формулаларды
$(\Re\supset\aleph)$ &$(\aleph\supset\Re)$ формуланы $(\Re\equiv\aleph)$ арқылы жазуға келісеміз.

$\Re$ және $\aleph$ формулалар эквивалентті($\Re\sim\aleph$ ретінде белгіленеді) деп айтылады , егер $\Re$ формуланың мәні кез келген айнымалыда $\aleph$ формуланың мәніне сәйкес келсе. Формула ақиқаттық немесе товтология (жалғандық немесе қайшылықты) деп айтылады, егер айнымалылардың барлық мәндер жиынында ақиқат(жалған) мәндер қабылдаса.

Тұжырымдер алгебрасының амалдары

Қазіргі замандық ғылыми тілде **алгебра** деп белгілі бір жиын элементтеріне сандарға жұмсалатын амалдарға ұқсас қолданылатын **амалдар мен солардың қасиетін зерттейтін біліми пәнді** айтады. Осы тұрғыдан алып қарағанда, Тұжырымдарга қолданылатын логикалық амалдар жиынтығын **алгебра** деп атауға болатынын көрсетуге болады.

Элементар тұжырымдардан тұратын A={p, q, r,…,t} жиын берілсін. Мұндағы p, q, r,...,s, t – элементар тұжырымдар. Қайсыбір ретте мұны $A=\{p_1,p_2,\ldots p_n\}$ – үлгісінде де белгілеп жазамыз.

Математикалық логика берілген p бір тұжырымнан немесе p мен q екі тұжырымнан жаңа тұжырым тудыру үшін қолданылатын әрекеттік әдістерді логикалық амал немесе логикалық операция деп атаймыз. Математикалық логика пәндерінде олардың әрқайсысына арнаулы атауыш сөз беріліп, өрнектеуші белгілемелер бекітілген (1-кесте).

1-кесте

Негізгі логикалық амалдар сипаттамасы		
Сөз арқылы айтылуы	Белгілемелер	Атауыш сөздері
p емес	$\overline{p}$	«емес» амалы, терістеу амалы
p және q	p^q, p&q p·q	«және» амал, конънкция амалы, көбейту
p немесе q	$p\vee q$, p+q	«немесе» амалы, дизъюнкция (ажырапталау) амалы
егер p, онда q	$p\rightarrow q$	Импликация

		(сабақтастыру) амалы
p сонда және тек қана сонда, қашан q	p↔q, p~q	Эквиваленция (теңестірілмеу) амалы

Айтылмыш логикалық амалдарды жеке-жеке анықтап, олардың басты қасиеттерін (заңдарын) баяндаймыз.

1.Терістеу амалы

Анықтама. Р тұжырымның терістеуі деп Р ақиқат болғанда және тек сонда ғана жалған болатын, ал Р жалған болғанда және тек сонда ғана ақиқат болатын $\overline{P}$ жаңа тұжырымды айтамыз. Р Тұжырымның терістемесін былайша белгілейді: $\overline{P}$ немесе ¬Р. Мұны «Р-емес» деп оқимыз.

Терістеудің ақиқаттық кестесі

Тұжырым	Терістеме
p	$\bar{p}$
а	ж
ж	а

Тұжырым	Терістеме
p	$\bar{p}$
1	1
0	1

Тұжырым атаулының хабарлы сөйлем арқылы анықталатынын айттық. Сондықтан, әрбір тұжырымді информативті-логикалық (хабарнаманы-логикалық) құрылым деп қарауға құқығымыз бар. Осыған орай р тұжырым туралы айтуға болатын «иә» деген растаушы (құптаушы, бекітуші) ой мен сол тұжырымның «хабарнамалық» мәндері деп айтамыз. «Иә», «жоқ» үлгісіндегі екі элементті жиындар р логикалық айнымалының хабарнамалық мәндер жиыны деп аталады.

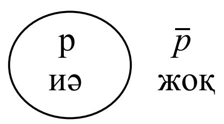
р тұжырымді терістеу амалын хабарнамалық мәндер кестесі (таблица) және диаграмма (сызба) арқылы көрнекілеп анықтауға болады (1, 2-сызбалар).

Хабарнамалық кесте

Р	$\bar{p}$
иә	жоқ
жоқ	Иә

1-сызба

Сызба:



2-сызба

<u>1-мысал</u> p = «Абай-Құнанбайдың ұлы» = а.

$\underline{p}$ = «Абай-Құнанбайдың ұлы емес» = ж.

<u>2-мысал</u> $\bar{p}$= «$\underline{2+3=7}$»= ж.

$\bar{P}$ = «2 + 3 = 7» («2 мен 3-тің қосындысы 7-ге тең емес») «2+3≠7» =а.

Терістеу амалының заңдары (қасиеттері)

1. $\bar{\bar{p}}$ = p қос терістеу заңы (қос терістеуді түсіру заңы).

Терістеудің терістеуі берілген тұжырыммен теңмағыналы болады.

(**Ескертпе.** Осында және бұдан былай «≡» белгіні «теңмағыналы» немесе «теңбе-тең» деп оқимыз).

Қос терістеу заңының дұрыстығын мысал арқылы дәлелдеп көрсетуге болады.

Мысалы. p = «Абай Құнанбайдың ұлы» = а.

$\bar{p}$ = «Абай Құнанбайдың ұлы емес» = ж.

$\bar{\bar{p}}$ = «Абай – Құнанбайдың ұлы емес деу дұрыс емес» = p = а.

Кесте арқылы дәлелдеу

p	$\bar{p}$	$\bar{\bar{p}}$
а	ж	а
ж	а	ж

3-сызба

3-сызбадағы кестенің 1 және 2 бағандарын салыстыра отырып, $\bar{\bar{p}}$ ≡ p болатынын көреміз.

<u>2. Конъюнкциялау амалы</u>

<u>Анықтама.</u> Берілген p және q екі тұжырымның конъюнкциясы деп солардың екеуі де ақиқат болғанда және тек сонда ғана ақиқат болатын p^q = r жаңа тұжырымді айтамыз.

p^q амалын ауызша сөзбен: «p және q» немесе «p әрі q» немесе «p да q» деп оқимыз. Мұндағы «^» белгісінің орнына, кейде, «&» белгісін пайдаланады. r-ді p, q тұжырымдардың конъюнкциясы дейміз.

Конъюнкциялау амалын оның «ақиқаттық кестесі», «хабарнамалық кестесі» және «диаграмма» (сызба) арқылы көрнекілеп анықтауға болады.

тұжырымдар		конъюнкция
p	q	p^q
а	а	а
а	ж	ж
ж	а	ж

ж	ж	ж

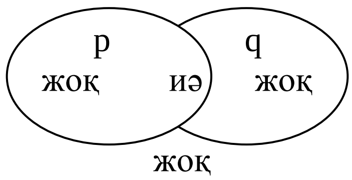
немесе

тұжырымдар		конъюнкция
p	q	p·q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Хабарнамалық кесте

тұжырымдар		конъюнкция
p	q	p^q
иә	иә	иә
иә	жоқ	жоқ
жоқ	иә	жоқ
жоқ	жоқ	жоқ

4-сызба



5- сызба

Конъюнкциялау амалының ақиқаттық кестесіне зер сап қарасаңыз, екінші кестеден бұл амалдың сандарды (1 мен 0 ді) көбейту амалына ұқсас нәтиже беретіндігін байқауға болады. Сондықтан, тұжырымдарды конъюнкциялау амалын, кейде, «тұжырымдарды көбейту» амалы деп те атайды және оны p·q – «көбейтінді» арқылы белгілеп жазады. Мұндағы p, q тұжырымдарын «көбейгіштер» деп атаймыз.

1-мысал. p = «2+2 = 4», q = «2+3 = 7», сонда p^q = «2+2=4» және «2+3=7» = a^ж = ж. Себебі «2+2=4»= a, «2+3=7»=ж

2-мысал. Мынадай 2< 3< 5 қос теңсіздікті p, q екі тұжырымның конъюнкциясы деп қарауға болады, яғни «2< 3< 5»= p^q = = «2<3» ^ «3<5» = a·a = a. Мұндағы p= «2<3» = a.

3-мысал. «Ромбының диагоналдары өзара перпендикуляр болады және оның төбесіндегі бұрыштары қақ бөлінеді».

Мұнда: p= «Ромбының диагоналдары өзара перпендикуляр», q= «Ромбының диагоналдары оның бұрыштарын қақ бөледі». Берілген сөйлемді логикалық белгілемелер арқылы былайша жазып көрсетуге болады: r=p^q.

Конъюнкциялау амалының қасиеттері (заңдары)

1. **1.** $p \wedge q \equiv q \wedge p$ – орын ауыстыру (коммутативтік) заңы.
2. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ – терімділік (ассоциативтік) заңы.
3. $p \wedge p \equiv p$ - идемпотенттік (бұлжымастық) заңы.
4. $p \cdot \overline{p}$ = ж немесе $p \cdot \overline{p}=0$ қайшылық заңы
5. $p \cdot$а= p немесе $p \cdot 1 = p$
   а·ж= немесе $p \cdot 0 = 0$ – тұрақты тұжырымдермен конъюнкциялау заңдары.

Бұл заңдардың қай-қайсысын болмасын кесте әдісі арқылы дәлелдеп көрсетуге болады. Мысал ретінде қайшылдық заңы мен орын ауыстырымдық заңының дәлелдемелеріне тоқталып өтелік.

Қайшылық заңының дәлелдемесі

p	$\overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$
а	ж	ж
ж	а	ж

немесе

p	$\overline{p}$	$p \cdot \overline{p}$
1	0	0
0	1	0

Орын ауыстыру заңының дәлелдемесі

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
а	а	а	а
а	ж	ж	ж
ж	а	ж	ж
ж	ж	ж	ж

p	q	$p \cdot q$	$q \cdot p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0

0	0	0	0

Кестедегі 3-ші және 4-ші бағандардың салыстыра келіп, p^q≡q^p болатынын көреміз.

Ескерту. Конъюнкциялау амалы үшін «орын ауыстыру» және «теру» заңдарының орындалатындығын дәлелдеу бұл амалдың «көбейту» деп аталуын анықтай, негіздей түседі. Сонымен қатар, конъюнкциялау амалын саны екіден артық тұжырымдер үшін де қолдануға болатынына көз жеткізіледі. p_1, p_2,...,p_n тұжырымдерден тұратын конъюнкцияны ықшам түрде былай жазып көрсетеді:

$$\Lambda_{k=1}^{n} p_k = p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n = p_1 . p_2 \ldots p_n .$$

Мұндағы p_1,p_2,...,p_n тұжырымдарді көбейткіштер деп атайды.

3. Дизъюнкицялау (ажыратпалау) амалы

Екі тұжырымді бір-бірінен ажыратпалау амалы ауызша сөйлеу тіліне «немесе» деген логикалық жалғаулық арқылы жүргізілетінін басында айтқанбыз. Байырғы сөйлеу тілімізде «немесе» жалғаулығы: 1) «айыра ажыратпалау», 2) «біріктіре ажыратпалау» деп аталатын екі мағынада жұмсалады.

1-мысал. «Мен ертең 2 де ауылда не жайлауда боламын» деген сөйлемдегі уағадалы ойдың екеуі бірдей орындалуы мүмкін емес. Өйткені адам арасы алшақ жатқан екі орында бір уақытта болуы еш мүмкін емес. Мұндай жағдайда «немесе» жалғаулығы «айыра ажыратпалау» мағынасында жұмсалады. Мұндай ажыратпалау «не,...,не», «немесе,...,немесе» деген үлгіде айтылады. Айыра ажыратпалау амалын мынадай «∨» белгілеме арқылы жазып көрсетіледі.

2-мысал. «Мен жайлауда ертең күндізгі сағат 2 де немесе түңгі сағат 2 де боламын» деген сөйлемдегі екі оқиғаның да болуы ықтимал. Астында жүрдек көлігі бар адам жайлауға тәулік ішінде күндіз де түнде де қатынай алады. Сондықтан, мұнда «немесе» жалғаулығы «біріктіре ажыратпалау» амалы ретінде жұмсалып отыр.

Енді айтылмыш ажыратпалау амалының әр түрінде жеке жеке тоқталып

Дизъюнкицялау (қатаң емес ажыратпалау) амалы

Анықтама. Берілген p және q екі пікірдің біріктіре дизъюнкциясы (қатаң емес ажыратпасы) деп солардың ең болмағанда біреуі ақиқат болғанда және тек сонда ғана ақиқат болатын $p \vee q = r$ жаңа тұжырымды айтамыз. Мұндағы r тұжырымді p, q тұжырымдердың дизънкциясы дейміз. $p \vee q$ белгіні ауызша сөзбен «p немесе q» деп айтамыз.

Біріктіре дизънкциялау амалын оның «ақиқаттық кестесі», «хабарламалық кестесі» және диаграммасы (сызбасы) арқылы көрнекі түрде бейнелеп анықтауға болады (6,7 сызбалар)

Ақиқаттық кестелер

тұжырымдар		дизънкциялау
p	q	p∨q
а	а	а∨а=а

а	ж	а∨ж=а
ж	а	ж∨а=а
ж	ж	ж∨ж=ж

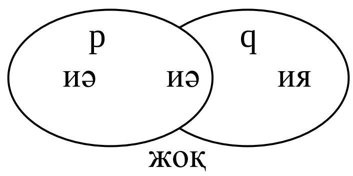
немесе

тұжырымдар		дизънкциялау
p	q	p∨q
1	1	1∨1=1
1	0	1∨0=1
0	1	0∨1=1
0	0	0∨0=0

Хабарнамалық кестесі

Тұжырымдер		дизънкциялау
p	q	p∨q
иә	иә	иә
иә	жоқ	иә
жоқ	иә	иә
жоқ	жоқ	жоқ

6-сызбалар



7-сызба

1-мысал. «3≤7» теңсіздігін логикалық дизънкциялау амалының анықтамасы тұрғысынан талдап көрелік. Математика тілінде берілген бұл сөйлемді екі қарапайым тұжырым деп қарауға болады:

p = «3<7»=а, q= «3=7» = ж. Сонда «3≤7» = «3<7» немесе

«3=7» = а∨ж=а. Демек, p∨q = «3≤7».

2-мысал. Математика тілінде «5≤5» сөйлемі берілген. Мұнда p= «5<5» =ж,q = «5=5»=а. Демек p∨q = «5≤5» = «5<5» немесе «5=5» =ж∨а=а.

3-мысал. «7≤3» сөйлемін талдайық. Мұнда: p= «7<3» =ж, q= «7=3»=ж. Демек p∨q = «7≤3» = «7<3» немесе «7=3»=ж∨ж=ж.

Сөйтіп, «а≤в» үлгісіндегі теңсіздікке қашанда екі тұжырымның дизъюнкиясы (ажыратпасы) боп саналатынын көреміз.

Біріктіре дизъюнкциялау (қатаң емес ажыратпалау) амалының қасиеттері

1. $p \vee q \equiv q \vee p$ – орын ауыстыру (коммутативтік) заңы.
2. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ – терімділік (ассоциативтік) заңы.
3. $p \vee \overline{p}$ =а немесе $p \vee \overline{p}=1$ – үшінші жоқтық заңы.
4. $p \wedge (q \vee r) \equiv p \wedge q \vee p \wedge r$ немесе $p(q \vee r) = pq \vee pr$ - дистрибутивтік (үлест.) 1-заң.
5. $p \vee q \wedge r \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ немесе $p \vee q \cdot r \equiv (p \vee q)(p \vee r)$ - үлестірімділіктің (дистриб.) 2-заңы.
6. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ немесе $p(q \vee q) \equiv p$ - жұтылудың 1-заңы.
7. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ немесе $p \vee pq \equiv p$ - жұтылудың 2-заңы.
8. $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$ немесе $\overline{p \cdot q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$ - де Морганның 1-заңы.
9. $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$ немесе $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \bullet \overline{q}$ - де Морганның 2-заңы.
10. $p \vee а \equiv а$ немесе $p \vee 1 \equiv 1$ - тұрақты тұжырымдармен дизъюнкциялау заңы.
11. $p \vee ж \equiv p$ немесе $p \vee 0 \equiv p$ - тұрақты тұжырымдармен дизъюнкциялау заңы.

Айтылмыш заңдардың әрқайсысын кестелеу әдісімен дәлелдеуге болады. Біз, бұл орайда, үлестірімділіктің 2-заңын (5-қалыптаманы) дәлелдеуге тоқталамыз.

Мысалы. $p \vee qr \equiv (p \vee q)(p \vee r)$ теңбе-теңдігінің тура (ақиқат) болатынын кестелеу әдісі арқылы дәлелдеп көрсет.

Шешуі. p,q,r –үш элементар айнымалыдан ақиқаттық кестесін құрамыз. Мұнда құрылатын кесте жолдарының саны $g=2^{п}$ қалыптама бойынша анықталады. Бұл орайда п=3 болғандықтан, кесте жолдарының саны $g=2^3=8$ болады. Ал кестедегі бағандар саны айнымалылар саны мен берілген қалыптамадағы амалдар санына сәйкес анықталады. Бұл жағдайда жалпы саны беске тең ($\vee, \wedge, \vee, \wedge, \vee$)

логикалық амалдар және үш элементар айнымалы (p,q,r) қатысады. Демек, құрылатын кестедегі бағандар саны в=3+5=8 болады. Сөйтіп, қойылған есепті шешу үшін, әуелі, 8 жолдан және 8 бағаннан тұратын кесте құрамыз.

	1	2	3	4	5	6	7	8
	p	q	r	qr	pvqr	pvq	pvr	(pvq)(pvr)
1	а	а	а	а	а	а	а	а
2	а	а	ж	ж	а	а	а	а
3	а	ж	а	ж	а	а	а	а
4	а	ж	ж	ж	а	а	а	а
5	ж	а	а	а	а	а	а	а
6	ж	а	ж	ж	ж	а	ж	ж
7	ж	ж	а	ж	ж	ж	а	ж
8	ж	ж	ж	ж	ж	ж	ж	ж

Ақиқаттық кестесін толтыру және қатыстырып отырған дизъюнкцияның ақиқаттығын дәлелдеп көрсету пайымдаулары былайша жүргізіледі:

1-қадам. Алғашқы үш бағанға p, q, r қарапайым айнымалылар орналастырылады. Одан соң осы қарапайым айнымалылар қабылдауы мүмкін әр түрлі ақиқаттық мәндер жиналымы жазылады. Бұл жерде қателік болмауы және p, q, r айнымалылар қабылдай алатын ақиқаттық мәндердің барлық мүмкін мәні түгелдей қамтылуы үшін мынадай кәделік ережені басшылыққа алу абзал: алдымен, r айнымалының ақиқаттық мәндерін жоғарыдан төмен қарай бағыттап алма-кезек ауысқан қалпында (а,ж), (а,ж) т.с.с. түгелдей тізіп жазып шығу қажет; одан соң q айнымалының ақиқаттық мәндерін екі еселенген қалыппен (а,а), (ж,ж),(а,а),(ж,ж) т.с.с. алма-кезек ауыстырылып жазылады, ал p ның мәндерін алдыңғы процесс бойынша (а,а,а,а), (ж,ж,ж,ж) түрінде жазу қажет.

2-қадам. q мен r дің мәндерін ескере отырып , 4-бағандағы qr конъюнкцияның мәндері жазылады.

3-қадам. p мен qr мәндері бойынша 5-бағанадағы pvqr дизъюнкцияның мәндері жазылады.

4-қадам. pvq және pvr дизъюнкциялардың мәндері жазылады.

5-қадам. 6 және 7 бағандардағы ақиқаттық мәндерді ескере отырып (pvq)(pvr) конъюнкция жазылған 8-баған толтырылады.

6-қадам. 5 және 8- бағандардағы ақиқаттық мәндерді салыстыра отырып, олардың ақиқаттық мәндерінің бірдей екендігін көреміз. Демек, pvqr ≡ (pvq)(pvr) екен.

Біріктіре дизъюнкциялау немесе қатаң емес дизъюнкциялау амалдарының қалған қасиеттерін осылайша ақиқаттық мәндер кестесін құру арқылы дәлелдеуге болады.

Қатаң дизъюнкциялау(айыра ажыратпалау) амалы

Анықтама. Берілген p,q екі тұжырымның қатаң дизъюнкциясы(айыра ажыратпасы) деп олардың біреуіғана ақиқат болғанда және тек сондағана ақиқат болатын p+q=r болған жаңа тұжырымды айтамыз. Бұл жерде r тұжырымды p,q тұжырымдардың айыра ажыратпасы деп айтылады. p+q белгіні ауызша сөзбен «не p , не q» деп айтылады. Қатаң дизъюнкциялау(қысқаша: қ.дизъюнкциялау) амалын кестелеу арқылы әр түрлі жолмен анықтауымыз мүмкін(8, 9 сызбалар).

Ақиқаттық кестелер

тұжырымдар		қ.дизънкциялау
p	q	p+q
а	а	а+а=ж
а	ж	а+ж=а
ж	а	ж+а=а
ж	ж	ж+ж=ж

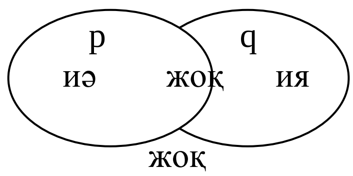
немесе

тұжырымдар		қ.дизънкциялау
p	q	p+q
1	1	1+1=0
1	0	1+0=1
0	1	0+1=1
0	0	0+0=0

Хабарнамалық кестесі

тұжырымдар		қ.дизънкциялау
p	q	p+q
иә	иә	жоқ
иә	жоқ	иә
жоқ	иә	иә
жоқ	жоқ	жоқ

8-сызбалар



9-сызба

Мысал. Төмендегі сөйлемдерді тұжырымдар алгебрасының тілінде жазып көрсет: 1. «15 саны 3ке және 5ке бөлінеді». 2. «1 саны не құрама сан, немесе жай сан». 3. «Бөлшектің бөлімін бірнеше есеге кеміткенде , не оның алымын бірнеше есеге арттырғанда бөлшек сонша есе артады».

Шешуі. 1) p= «15 саны 3 ке бөлінеді» = а; q= «15 саны 5 ке бөлінеді» = а.
$p \wedge q$ = «15 саны 3 ке бөлінеді және 15 саны 5 ке бөлінеді » = «а $\wedge$ а » = а,
$p \vee q$ = «а $\vee$ а » =а, p+q =«а + а »= ж.
2) p= «1 саны құрама сан» = ж; q= «1 саны жай сан» = ж.

p∧ q = «1 саны құрама сан және 1 саны жай сан» = «ж ∧ ж» = ж, pvq = «ж v ж » =ж, p+q =«ж + ж »= ж.
3) p= «Бөлшектің бөлімін бірнеше есеге кеміткенде, бөлшек сонша есе артады»= а. q= «Бөлшектің оның алымын бірнеше есеге арттырғанда, бөлшек сонша есе артады»= а. Демек, p∧ q = = «а ∧ а» = а, pvq = «а v а » =а, p+q =«а + а »= ж.

Импликациялау(сабақтасым) амалы

Анықтама. Берілген p,q екі тұжырымның импликациясы(сабақтасымы) деп p тұжырым ақиқат, q тұжырым жалған болғанда және тек сондағана жалған болатын p→q=r болған жаңа тұжырымды айтамыз. Бұл жерде r тұжырымды p,q тұжырымдардың импликациясы деп айтылады. p→q белгіні ауызша сөзбен «Егер p болса , онда q болады » деп айтылады. Импликациялау(сабақтасым) амалын кестелеу арқылы әр түрлі жолмен анықтауымыз мүмкін(10,11 сызбалар).

Ақиқаттық кестелер

тұжырымдар		импликациялау
p	q	p→q
а	а	а→а=а
а	ж	а→ж=ж
ж	а	ж→а=а
ж	ж	ж→ж=а

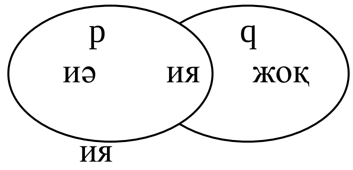
немесе

тұжырымдар		импликациялау
p	q	p→q
1	1	1→1=1
1	0	1→0=0
0	1	0→1=1
0	0	0→0=1

Хабарнамалық кестесі

тұжырымдар		импликациялау
p	q	p→q
иә	иә	ия
иә	жоқ	жоқ
жоқ	иә	иә
жоқ	жоқ	ия

10-сызбалар



11-сызба

Импликация(сабақтасым) амалының қасиеті. Импликация амалын терістеу және дизъюнкциялау арқылы өрнектеуге болады: $p \rightarrow q = \overline{p} \vee q$.

Дәлелденуі:

1	2	3	4	5
p	q	$p \rightarrow q$	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
а	а	а	ж	а
а	ж	ж	ж	ж
ж	а	а	а	а
ж	ж	а	а	а

Осы кестедегі 3 және 5 бағандарды салыстырсақ , $p \rightarrow q = \overline{p} \vee q$ болатындығын көреміз. Импликация амалының хабарнамалық кестесі мен сызбасынан құралған кесте оның дәлелденген қасиеті басшылыққа алынады.

<u>Эквиваленциялау(теңгермелеу) амалы</u>

<u>Анықтама.</u> Берілген p,q екі тұжырымның эквиваленциясы(теңгермесі) деп солардың екеуі де ақиқат немесе екеуіде жалған болатын және тек сондағана ақиқат болатын $p \leftrightarrow q = r$ болған жаңа тұжырымды айтамыз. Бұл жерде r тұжырымды p,q тұжырымдардың эквиваленциясы деп айтылады. $p \leftrightarrow q$ белгіні ауызша сөзбен «p мен q теңгерімді тұжырымдар» деп айтылады. Тағыда, « p сонда және тек сонда, қашан q» депте айтылады. $p \leftrightarrow q$ өрнегі тағыда « q, егер және текқана егер p болса» деп айтылады. Басқа әдебиеттерде p,q екі тұжырымның эквиваленциясын(теңгермесін) p~q ретіндеде көрсету мүмкін.

Эквиваленция(теңгерме) амалын кестелеу арқылы әр түрлі жолмен анықтауымыз мүмкін(12 сызба).

<u>Ақиқаттық кестелер</u>

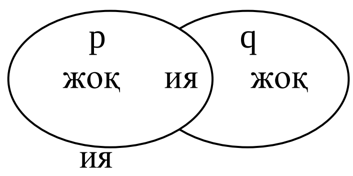
тұжырымдар		эквиваленция
p	q	$p \leftrightarrow q$
а	а	а↔а=а
а	ж	а↔ж=ж
ж	а	ж↔а=ж
ж	ж	ж↔ж=а

немесе

тұжырымдар		эквиваленция
p	q	$p\leftrightarrow q$
1	1	$1\leftrightarrow 1=1$
1	0	$1\leftrightarrow 0=0$
0	1	$0\leftrightarrow 1=0$
0	0	$0\leftrightarrow 0=1$

Хабарнамалық кестесі

тұжырымдар		импликациялау
p	q	$p\leftrightarrow q$
иә	иә	ия
иә	жоқ	жоқ
жоқ	иә	жоқ
жоқ	жоқ	ия



12-сызбалар

Эквиваленция(теңгерме) амалының қасиеті. Эквиваленция амалын терістеу, конъюнкция, импликация және дизъюнкциялау арқылы төмендегідей өрнектеуге болады:

1. $p\leftrightarrow q = (p \rightarrow q)\Lambda(q\rightarrow p)$,
2. $p\leftrightarrow q = (\neg p \vee q)\Lambda(\neg q \vee p)$.

Дәлелденуі: 1.

1	2	3	4	5
p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p \rightarrow)\Lambda(q\rightarrow p)$
а	а	а	а	а
а	ж	ж	а	ж
ж	а	а	ж	ж
ж	ж	а	а	а

Эквиваленция амалының бұл $p \leftrightarrow q = (p \to q) \Lambda (q \to p)$ қасиетін геометрияның мынадай теоремасы арқылыда түсіндіруге болады.

Теорема. Төртбұрыш параллелограм болу үшін оның диоганалдары қиылысу нүктесі арқылы қақ бөлінуі қажетті және жеткілікті ($p \leftrightarrow q$).

Бұл теореманың дәлелдеуі мынадай екі теореманың ақиқаттығын бірінен соң бірін дәлелдеуге пара-пар сөйлемдер болып табылады:

1. Егер төртбұрыш параллелограм болса , онда оның диоганалдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді ($p \to q$);
2. Егер төртбұрыштың диоганалдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінсе , онда төртбұрыш параллелограмм болады ($q \to p$).

Осы кестедегі 5 бағанды эквиваленцияның ақиқаттық кестесімен салыстырсақ , $p \leftrightarrow q = (p \to q) \Lambda (q \to p)$ болатындығын көреміз. Екінші теңдікта сол секілді дәлелденеді. Эквиваленция амалының хабарнамалық кестесі мен сызбасынан құралған кесте оның дәлелденген қасиеті басшылыққа алынды

1.2 Эквиваленттіктер. Тұжырымдардың буль алгебрасы.

Біз әртүрлі тең екі A және B формулаларының ақиқаттық кестесінің бірдей болатындығын көрдік.

Мысалы, a және $\overline{\overline{a}}$ формулалары.

Анықтама. Айталық күрделі A және B формулалары қарапайым $a_1, a_2, ..., a_n$ формулаларынан құралатын болсын.

Егер $a_1, a_2, ..., a_n$ формулаларының мәндерінің кез келген үлестірулерінде A және B формулаларының мәндері сәйкес келетін болса, онда A және B формулаларын эквивалент формулалар деп атайды. Басқаша сөзбен айтқанда A және B формулаларының ақиқаттық кестелері бірдей болады.

Егер A және B формулалары эквивалент болса, онда оны $A \equiv B$ деп белгілейміз.

Енді, әдетте көбірек қолданылатын эквивалент қатынастарды көрсетейік.

1. $a \equiv \overline{\overline{a}}$ (қос кері амал заңы) ;

2. $\left.\begin{matrix} a \& b \equiv b \& a \\ a \vee b \equiv b \vee a \end{matrix}\right\}$ (& мен $\vee$ ауыстырымдылық заңы) ;

$a \to b \not\equiv b \to a$ (егер $a = 1$, $b = 0$ болса, $a \to b = 0$, бірақ $b \to a = 1$);

3. $\left.\begin{matrix} (a \& b) \& c \equiv a \& (b \& c) \\ (a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c) \end{matrix}\right\}$ (& мен $\vee$ топталу заңы) ;

$(a \to b) \to c \equiv a \to (b \to c)$

4. $\left.\begin{matrix} (a \& b) \vee c \equiv (a \vee c) \& (b \vee c) \\ (a \vee b) \& c \equiv (a \& c) \vee (b \& c) \end{matrix}\right\}$ (&($\vee$) – ның $\vee$(&) – ға қатысты терімділік заңдары) ;

5. $\left.\begin{aligned} a \,\&\, a \equiv a \\ a \lor a \equiv a \end{aligned}\right\}$ (& мен $\lor$ идемпотенттік заңы) ;

6. $\begin{aligned} a \,\&\, \bar{a} \equiv 0 \\ a \lor \bar{a} \equiv 1 \end{aligned}$ (толықтық заңы) ;

7. $\begin{aligned} a \,\&\, 1 \equiv a \\ a \,\&\, 0 \equiv 0 \end{aligned}$;

$\begin{aligned} a \lor 1 \equiv 1 \\ a \lor 0 \equiv a \end{aligned}$;

8. $a \to b \equiv \bar{a} \lor b$

9. $\left.\begin{aligned} \overline{a \,\&\, b} \equiv \bar{a} \lor \bar{b} \\ \overline{a \lor b} \equiv \bar{a} \,\&\, \bar{b} \end{aligned}\right\}$ (Де Морган заңдары) ;

10. $\begin{aligned} (a \,\&\, b) \lor a \equiv a \\ (a \lor b) \,\&\, a \equiv a \end{aligned}$.

Мысалы,

$$A(a,b,c) = \overline{[a \to (\overline{b \to c})] \to [(a \to b) \to \bar{a}]} \equiv$$

$$\equiv \overline{[a \to (\overline{b \to c})] \lor [(\overline{a \to b}) \lor \bar{a}]} \equiv$$

$$\equiv [\bar{a} \lor \left(\overline{\bar{\bar{b}} \lor c}\right)] \lor [\overline{\left(\overline{\bar{\bar{a}} \lor b}\right) \lor a}] \equiv [\bar{a} \lor (\bar{\bar{b}} \,\&\, \bar{c})] \lor [(\bar{a} \lor b) \,\&\, \bar{\bar{a}}] \equiv$$

$$\equiv [\bar{a} \lor (b \,\&\, \bar{c})] \lor [(\bar{a} \lor b) \,\&\, a];$$

Конъюнкция және дизъюнкция амалдарын өзара қосалқы амалдар деп атаймыз.

Анықтама. Егер $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ формуласының құрамында импликация амалы болмаса, ал $B(a_1, a_2, ..., a_n)$ формуласы A - ның құрамындағы конъюнкция дизъюнкцияға, дизъюнкцияны конъюнкцияға алмастырғанда шыққан формула болса, онда оларды қосалқы формулалар деп атаймыз. $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ формуласына қосалқы формуланы $A_1(a_1, a_2, ..., a_n)$ арқылы белгілейміз.

Теорема**.** (Қосалқылық заңы)

Егер $A \equiv B$ болса, онда $A_1 \equiv B_1$.

Дәлелдеуі. Айталық $A(a_1, a_2, ..., a_n) \equiv B(a_1, a_2, ..., a_n)$ болсын. Онда $A(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n) \equiv B(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n)$ және $A\overline{(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n)} \equiv B\overline{(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n)}$

Де Морган заңы бойынша

$$A_1(a_1, a_2, ..., a_n) \equiv B_1(a_1, a_2, ..., a_n)$$

болады .

Айталық $A \neq \emptyset$ жиыны берілсін. P - арқылы оның ішкі жиындарының жиынын белгілейік.

Мысалы.

$A=\{a,b,c\}$ болса,

$$\text{P}(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

$\text{P}(A)$ - жиыны $\cap$ (қиылысу), $\cup$ (бірігу), \ (айырма) амалдарына қатысты алғанда тұйықталған жиын.

$<\text{P}(A), \cap, \cup, \setminus>$ жүйесі төмендегі шарттарды қанағаттандырады. Кез келген $x, y, z \in \text{P}(A)$, $x, y, z \subseteq A$ үшін:

1. $\begin{matrix} x\cap y=y\cap x \\ x\cup y=y\cup x \end{matrix}$;
2. $\begin{matrix} x\cup(y\cup z)=(x\cup y)\cup z \\ x\cap(y\cap z)=(x\cap y)\cap z \end{matrix}$;
3. $\begin{matrix} (x\cup y)\cap z=(x\cap z)\cup(y\cap x) \\ (x\cap y)\cup z=(x\cup z)\cap(y\cup x) \end{matrix}$;
4. $\begin{matrix} x\cup x=x \\ x\cap x=x \end{matrix}$;
5. $\overline{x}=A\setminus x$;
6. $\begin{matrix} x\cap\overline{x}=\emptyset \\ x\cup\overline{x}=A \end{matrix}$;
7. $\begin{matrix} x\cap A=x \\ x\cap\emptyset=\emptyset \end{matrix}$;
8. $\begin{matrix} x\cup A=A \\ x\cup\emptyset=x \end{matrix}$;
9. $\begin{matrix} \overline{x\cap y}=\overline{x}\cup\overline{y} \\ \overline{x\cup y}=\overline{x}\cap\overline{y} \end{matrix}$.

$<\text{P}(A), \cup, \cap, \setminus>$ жүйесін Буль алгебрасы деп атайды.

Айталық *U* - тұжырымдар жиыны берілсін. *U* жиыны & - конъюнкция, $\vee$ - дизъюнкция, $\neg$ - кері амал амалдарына қатысты алғанда тұйықталған жиын құрайды.

Егер $\text{P}(A)$ жиыны *U* жиынымен, $\cap$ - қиылысу амалын &-конъюнкциямен, $\cup$ - бірігу амалын $\vee$ - дизъюнкциямен, \ - айырманы – кері амалмен, A - ны 1 мен, $\emptyset$ - ды 0 – мен ауыстырсақ $<U, \&, \vee, ->$ жүйесінің Буль алгебрасының (1 – 9) шарттарын толық қанағаттандыратындығын көру қиын емес.

Сонымен, $<U, \&, \vee, ->$ жүйесін тұжырымдардың Буль алгебрасы деп атайды.

2-лекция
Тұжырымдар алгебрасы

1. Тұжырымдардың Буль алгебрасы .

2. Жетілдірілген формалар.
3. Логикалық амалдардың толықтығы
4. Тұжырымдар логикасының формулаларын қолдану

---

1. Тұжырымдардың буль алгебрасы.

Айталық $A \neq \emptyset$ жиыны берілсін. P - арқылы оның ішкі жиындарының жиынын белгілейік.
Мысалы.
$A = \{a, b, c\}$ болса,

$$\mathrm{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$\mathrm{P}(A)$ - жиыны $\cap$ (қиылысу), $\cup$ (бірігу), \ (айырма) амалдарына қатысты алғанда тұйықталған жиын.

$< \mathrm{P}(A), \cap, \cup, \setminus >$ жүйесі төмендегі шарттарды қанағаттандырады. Кез келген $x, y, z \in \mathrm{P}(A)$, $x, y, z \subseteq A$ үшін:

10. $x \cap y = y \cap x$, $x \cup y = y \cup x$;
11. $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$, $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$;
12. $(x \cup y) \cap z = (x \cap z) \cup (y \cap x)$, $(x \cap y) \cup z = (x \cup z) \cap (y \cup x)$;
13. $x \cup x = x$, $x \cap x = x$;
14. $\overline{x} = A \setminus x$;
15. $x \cap \overline{x} = \emptyset$, $x \cup \overline{x} = A$;
16. $x \cap A = x$, $x \cap \emptyset = \emptyset$;
17. $x \cup A = A$, $x \cup \emptyset = x$;
18. $\overline{x \cap y} = \overline{x} \cup \overline{y}$, $\overline{x \cup y} = \overline{x} \cap \overline{y}$.

$< \mathrm{P}(A), \cup, \cap, \setminus >$ жүйесін Буль алгебрасы деп атайды.

Айталық U - тұжырымдар жиыны берілсін. U жиыны $\&$ - конъюнкция, $\vee$ - дизъюнкция, $\neg$ - кері амал амалдарына қатысты алғанда тұйықталған жиын құрайды.

Егер $P(A)$ жиыны U жиынымен, $\cap$ - қиылысу амалын &-конъюнкциямен, $\cup$ - бірігу амалын $\vee$ - дизъюнкциямен, \ - айырманы – кері амалмен, A - ны 1 мен, $\emptyset$ - ды 0 – мен ауыстырсақ $< U, \&, \vee, - >$ жүйесінің Буль алгебрасының (1 – 9) шарттарын толық қанағаттандыратындығын көру қиын емес.

Сонымен, $< U, \&, \vee, - >$ жүйесін тұжырымдардың Буль алгебрасы деп атайды.

2. Жетілдірілген формалар.

$A(a_1, a_2, ..., a_n)$ n - тұжырымның формуласын қарастырайық. Бұл формуланың құрамында импликация амалы болмасын, ал кері амал тек қарапайым тұжырымдарға ғана қатысты болсын.

Анықтама. Егер $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ формуласындағы қарапайым тұжырымдар тек конъюнкция (дизъюнкция) амалының көмегімен байланысқан болса, онда оны қарапайым конъюнкция (қарапайым дизъюнкция) деп атаймыз.

Мысалы. $a \& b \& c$, $a \& \bar{b} \& \bar{c}$, $\bar{a} \& b \& \bar{c}$ - қарапайым конъюнкция,

$a \vee b \vee c$, $a \vee \bar{b} \vee \bar{c}$, $\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}$ - қарапайым дизъюнкция.

Анықтама. Егер формуладағы қарапайым конъюнкциялар (қарапайым дизъюнкциялар) бір – бірімен дизъюнкцияның (конъюнкцияның) көмегімен байланысқан болса, онда формуланы қалыпты дизъюнктивті (қ.д.) (қалыпты конъюнктивті) (қ.к.) форма деп атаймыз.

Мысалы.

$A(a,b,c) = (a \& b \& c) \vee (a \& \bar{b}) \vee (a \& \bar{b} \& \bar{c}) \vee c$ - қ.д.ф.;

$B(a,b,c) = (a \vee b \vee c) \& (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \& \bar{a} \& (\bar{b} \vee \bar{c}) \vee c$ - қ.к.ф.

Анықтама. Егер қалыпты дизъюнктивті формадағы (қалыпты конъюнктивті формадағы) қарапайым конъюнкцияның (қарапайым дизъюнкцияның) құрамына әрбір қарапайым тұжырымның өзі немесе кері шамасы міндетті түрде енетін болса, онда формуланы жетілдірілген(кемел) қалыпты дизъюнктивті форма (ж.қ.д.ф) (жетілдірілген қалыпты конъюнктивті форма) (ж.қ.к.ф) деп атаймыз.

$A(a,b,c) = (a \& b \& c) \vee (a \& \bar{b} \& c) \vee (a \& \bar{b} \& \bar{c})$ -ж.қ.д.ф.;

$B(a,b,c) = (a \vee b \vee c) \& (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \& (\bar{a} \vee (\bar{b} \vee \bar{c}))$ - ж.қ.к.ф.

Мысал. $A(a,b,c)$ формуласының ақиқаттық кестесі берілген болсін.

a	b	c	$A(a,b,c)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Формуланың ақиқаттық кестесі бойынша оның өзін анықтайық. Берілген формула қарапайым тұжырымдардың 1, 4, 5 жолдардағы үлестірулерінде ақиқат мән қабылдайды. Конъюнкция мен дизъюнкцияның ақиқаттық кестелерін пайдаланып, осы жолдардан қарапайым конъюнкциялар құрайық.

$a \& b \& c$, $\bar{a} \& b \& c$, $a \& \bar{b} \& \bar{c}$

бірінші жолдағы мәндерде $a \& b \& c$ - ақиқат,

төртінші жолдағы мәндерде $\bar{a} \& b \& c$ - ақиқат,

бесінші жолдағы мәндерде $a \& \bar{b} \& \bar{c}$ - ақиқат.

Енді, осы қарапайым конъюнкциялардан жетілдірілген қалыпты дизъюнктивті форма құрайық: $(a \& b \& c) \vee (\bar{a} \& b \& c) \vee (a \& \bar{b} \& \bar{c})$.

Бұл формуланың ақиқаттық кестесінің $A(a,b,c)$ формуласының ақиқаттық кестесімен сәйкес келетіндігін тексеру қиын емес. Себебі, басқа жолдардағы қарапайым тұжырымдар мәндерінің үлестірулерінде жоғарыдағы қарапайым конъюнкциялардың әрқайсысы жалған мән қабылдайды.

Теорема. Теңбе – тең жалған емес $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ формуласын жетілдірілген қарапайым дизъюнктивті формаға келтіру үшін оның ақиқаттық кестесіндегі ақиқат мәндерге сәйкес келетін жолдардан қарапайым конъюнкциялар құру қажет. Бұл қарапайым конъюнкцияларда, егер қарапайым тұжырым ақиқат мән қабылдаса, онда оның өзін, ал жалған мән қабылдаса, онда оның кері шамасын аламыз:

$$A(a, b, c) = (a \& b \& c) \vee (\bar{a} \& b \& c) \vee (a \& \bar{b} \& \bar{c})$$

Қосалқылық заңын пайдаланып бұл есепті қарапайым дизъюнкциялар арқылы құрылған жетілдірілген қарапайым конъюнктивті форма түрінде де шешуге болады.

Оның үшін формуланың жалған мән қабылдайтын 2, 3, 6, 7, 8 жолдарын қарастырамыз. Бұл жолдардан қарапайым дизъюнкциялар құрамыз. Қарапайым дизъюнкция жалған мән қабылдау үшін оның құрамындағы әрбір қарапайым тұжырымның жалған мән қабылдауы қажет. Сондықтан, қарапайым дизъюнкциядағы қарапайым тұжырым ақиқат мән қабылдаса онда, оның кері шамасын, ал жалған мән қабылдаса онда, оның өзін аламыз.

$\overline{a} \vee \overline{b} \vee c, \quad \overline{a} \vee b \vee \overline{c}, \quad a \vee \overline{b} \vee c, \quad a \vee b \vee \overline{c}, \quad a \vee b \vee c$

Екінші жолдардағы мәндерде $\overline{a} \vee \overline{b} \vee c$ жалған.

Үшінші жолдардағы мәндерде $\overline{a} \vee b \vee \overline{c}$ жалған.

Алтыншы жолдардағы мәндерде $a \vee \overline{b} \vee c$ жалған.

Жетінші жолдардағы мәндерде $a \vee b \vee \overline{c}$ жалған.

Сегізінші жолдардағы мәндерде $a \vee b \vee c$ жалған.

Енді, осы қарапайым дизъюнкциялардан жетілдірілген қалыпты конъюнктивті форма құрайық:

$$\left(\overline{a} \vee \overline{b} \vee c\right) \& \left(\overline{a} \vee b \vee \overline{c}\right) \& \left(a \vee \overline{b} \vee c\right) \& \left(a \vee b \vee \overline{c}\right) \& \left(a \vee b \vee c\right)$$

Бұл формуланың ақиқаттық кестесінің $A(a,b,c)$ формуласының ақиқаттық кестесімен сәйкес келетіндігін тексеру қиын емес. Себебі, басқа жолдардағы қарапайым тұжырымдардың мәндерінің үлестірулерінде жоғарыдағы қарапайым дизъюнкциялардың әрқайсысы ақиқат мән қабылдайды.

3. Логикалық амалдардың толық жүйесі.

Анықтама. $A_5 \equiv \overline{a} \vee \overline{b}$ функциясын a/b түрінде белгілейміз және Шеффер сызығы деп атаймыз.

Анықтама. $A_{12} \equiv \overline{a} \& \overline{b}$ функциясын $a \downarrow b$ түрінде белгілейміз және Пирс бағыты деп атаймыз.

Анықтама. Конъюнкция, дизъюнкция, кері амал, импликациядан $(\{\&, \vee, -, \rightarrow\})$ тұратын жиынды логикалық амалдардың толық жүйесі деп атайды.

Лемма . Логикалық амалдардың келесі жиындары

1) $\{-, \&\}$,

2) $\{-, \vee\}$,

3) $\{-, \rightarrow\}$

толық жүйе құрайды.

Дәлелдеуі. Толық жүйенің көмегімен тұжырымдар алгебрасының кез келген күрделі формуласын жазуға болатындығы белгілі.

1) Сондықтан, $\{-,\&\}$ жиынның толық жүйе болатындығын көрсету үшін дизъюнкция мен импликация амалдарын осы амалдар арқылы өрнектеуге болатындығын көрсетсек жеткілікті.

Де Морган заңы бойынша

$$a\vee b\equiv \bar{}\,\bar{(}\,a\,\&\,\bar{}\,b)\equiv\overline{(\bar{a}\,\&\,\bar{b})};$$

$$a\to b\equiv\bar{a}\vee b\equiv\overline{(\bar{\bar{a}}\,\&\,\bar{b})}\equiv\overline{(a\,\&\,\bar{b})}.$$

2),3) дәлелдеуін оқушыларға қалдырамыз.

Лемма. $\{\&,\vee.\to\}$, $\{-\}$ жиындары логикалық амалдардың толық жүйесін құрамайды.

Дәлелдеуі. Кері амалды конъюнкция, импликация, дизъюнкция амалдарының көмегімен өрнектеу мүмкін емес.

Теорема. $\{/\}$ - Шеффер сызығы толық жүйе болады.

Дәлелдеуі. $A(a,b)=a/b=\bar{a}\vee\bar{b}$

$\bar{a}\equiv\bar{a}\vee\bar{a}\equiv a/a$

$$a\,\&\,b\equiv\overline{\bar{a}\vee\bar{b}}\equiv\overline{a/b}\equiv(a/b)/(a/b)$$

$$a\vee b\equiv\bar{\bar{a}}\vee\bar{\bar{b}}\equiv\overline{(a/a)}\vee\overline{(b/b)}\equiv(a/a)/(b/b)$$

$$a\to b\equiv\bar{a}\vee b\equiv\bar{a}\vee\bar{\bar{b}}\equiv\bar{a}\vee\overline{(b/b)}\equiv a/(b/b)$$

Теорема. $\{\downarrow\}$ - Пирс бағыты толық жүйе болады.

Тұжырымдар алгебрасының негізгі функциялары үшін келесі арнайы белгілеулерді енгізейік: $O(x)=0;$ $1(x)=1$, $i(x)=x$

$$\neg x=\begin{cases}0,\text{егер } \ \mathrm{x}=1\\ 1,\text{егер } \ \mathrm{x}=0;\end{cases}$$

$$x*y=x\,\&\,y=\begin{cases}1, \quad \text{егер} \quad \mathrm{x}=\mathrm{y}=1\\ 0,\text{ бас а жа дайларда;}\end{cases}$$

$$x \vee y = \begin{cases} 0, & \text{егер} \quad x = y = 0 \\ 1, & \text{басќа жаѓдайларда;} \end{cases}$$

$$x + y = \begin{cases} 0, \text{егер } x = y \\ 1, \text{егер } x \neq y; \end{cases}$$

$$x \equiv y = (\overline{x + y})$$

Лемма. Логикалық амалдардың келесі жиындары.

1) $\{ +, \vee , 1\}$;

2) $\{ +, \&, 1\}$;

3) $\{ \equiv, \vee, 0\}$

толық жүйе құрайды.

Лемманы жоғарыдағы арнайы белгілеулерден пайдаланып өте оңай дәлелдеуге болады.

Айталық, G кейбір логикалық амалдар жиыны болсын.

Анықтама. Егер G жиынының ешқандай элементі қалғандары арқылы өрнектелмейтін болса, онда G - ны тәуелсіз жиын деп атаймыз.

Лемма. Төмендегі логикалық амалдар жиыны тәуелсіз болады:

а) $\{- \; ; \; \equiv\}$,

б) $\{- \; ; +\}$,

в) $\{\equiv ; \; +\}$,

г) $\{\equiv \; , \; \vee\}$,

д) $\{\equiv \; , \vee, 0\}$

4. Тұжырымдар логикасының формулаларын қолдану

А) Жиындар теориясында қолдану.

Айталық, A - тұжырымдар алгебрасының $a_1, a_2, ..., a_n$ айнымалыларынан тұратын теңбе – тең ақиқат формуласы болсын және оның құрамында импликация амалы болмасын.

$A^*(x)$ арқылы A формуласының құрамындағы әрбір a_i - ді $x \in X_i$, ал $\bar{a}_i$ - ны $\overline{x \in X_i}$ өрнектерімен алмастырғанда алынған формуланы белгілейік, мұнда $(1 \le i,\ j \le n)$.

Мысал.

$A(a_1, a_2) = \overline{a_1 \& (\bar{a}_1 \vee a_2)} \vee a_2$ болса, онда

$A^*(x) = \overline{x \in X_1 \& (\overline{x \in X_1} \vee x \in X_2)} \vee x \in X_2$ формуласы болады.

Z_A формуласы A формуласындағы $a_1, a_2, ..., a_n$ айнымалыларын $x_1,\ x_2, ..., x_n$ өрнектерімен, конъюнкцияны қиылысумен, дизъюнкцияны бірігумен, кері амалды айырмамен $(X = U \setminus x)$ алмастырғанда шыққан формула болсын, мұнда $X_1,\ X_2, ..., X_n \subseteq U$.

Онда Z_A жиыны $X_1,\ X_2, ..., X_n$ жиындарына $\cap$, $\cup$, $\setminus$ амалдарын қолданғанда шыққан жиын болады.

Мысалы, $A(a_1, a_2) = \overline{a_1 \& (\bar{a}_1 \vee a_2)} \vee a_2$ болса, онда

$Z_A = \overline{X_1 \bigcap (\bar{X}_1 \bigcup X_2)} \cup X_2$.

Теорема. $A^*(x)$ формуласы барлық $X_1,\ X_2, ..., X_n$ жиындары үшін $x \in U$ болғанда ақиқат болуы үшін $x \in Z_A$ болуы қажет және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Теореманы A формуласының ұзындығына қарай индукция әдісімен жүргізейік. A формуласының ұзындығы ретінде оның құрамындағы логикалық амалдардың санын алайық.

1) A формуласының ұзындығы 0 болсын (A қарапайым тұжырым) $A = a$. Онда $A^*(x) = x \in X$, $Z_A = X$ және теореманың шарты орынды $x \in X \Leftrightarrow x \in X$.

2) Ұзындығы n болатын формулалар үшін теореманың шарты орынды болсын, онда теореманы ұзындығы $n+1$ болатын формулалар үшін дәлелдейік.

Айталық A формуласының ұзындығы $n+1$ болсын. Онда A формуласын келесі формулалардың біреуі ретінде өрнектеуге болады.

а) $A = B \& C$

б) $A = B \vee C$

в) $A = \neg B$

мұндағы B, C ұзындықтары n - нен кіші немесе тең формулалар. Индукциялық қадам бойынша B және C формулалар үшін

$B^*(x) \leftrightarrow x \in Z_B$

$C^*(x) \leftrightarrow x \in Z_C$ орынды.

Онда, A формуласы үшін келесі шарттар да орынды

а) $A^*(x) = B^*(x) \& C^*(x)$

б) $A^*(x) = B^*(x) \vee C^*(x)$

в) $A^*(x) = \overline{B^*(x)}$

немесе сәйкес,

а) $Z_A = Z_B \cap Z_C$

б) $Z_A = Z_B \cup Z_C$

в) $Z_A = \overline{Z}_B$

орындалады.

Яғни,

а) $A^*(x) = B^*(x) \& C^*(x) \leftrightarrow x \in Z_B \& x \in Z_C \leftrightarrow x \in Z_A$

б) $A^*(x) = B^*(x) \vee C^*(x) \leftrightarrow x \in Z_B \cup$
$\cup\, x \in Z_C \leftrightarrow x \in Z_B \cup Z_C \leftrightarrow x \in Z_A$

в) $A^*(x) = \overline{B^*(x)} \leftrightarrow \overline{x \in Z_B} \leftrightarrow x \in \overline{Z}_B \leftrightarrow x \in Z_A$

1 – салдар. Егер $A = B$ болса, онда $Z_A = Z_B$.

2 – салдар. Егер $A = 1$ (теңбе – тең ақиқат) болса, онда $Z_A = U$.

3 – салдар. Егер $A = 0$ (теңбе – тең жалған) болса, онда $Z_A = \emptyset$.

Мысалдар.

1) $A(a_1, a_2) = [\overline{a \& (\overline{a} \vee b)}] \vee b$ теңбе – тең ақиқат формула, сондықтан $Z_A = [X_1 \cap (X_1 \cup X_2)] \cup X_2 = U$.

2) $A(a) = \overline{a \vee \overline{a}} \equiv \overline{a} \& a$ теңбе – тең жалған формула, сондықтан $Z_A = \overline{X \cup X} = \overline{X} \cap X = \emptyset$.

Б) Релелі контактілі ток сызбаларында қолдану.

Белгілі орыс математигі В.И.Шестаков пен Американ математигі Э.Шеннон тұжырымдар алгебрасының формулаларын релелі-контактілі ток сұлбаларын реттеуде пайдаланды.

Айталық, $a_1, a_2, ..., a_n$ контактілері ток сүлбасысына оң таңбасымен қосылған болсын.

Әрбір контакт тұйықтаушы немесе ажыратушы болып екі түрде жалғануы мүмкін.

Егер a ажыратушы контакт болса, онда одан ток өтпейтін, сондықтан оны $\overline{a}$ арқылы белгілейік.

Егер a тұйықтаушы контакт болса, онда одан ток өтеді, сондықтан оны a арқылы белгілейік.

Ток сұлбасында екі контакт бір-бірімен тізбектей немесе параллель жалғануы мүмкін.

Тізбектей жалғанған a және b контактілер $a\&b$, ал параллель жалғанған a және b контактілерін $a \vee b$ арқылы белгілейік.

Осы айтылған белгілеулерді пайдаланып релелі-контактілі ток сұлбасына сәйкес келетін тұжырымдар логикасының формуласын жазуға болады(Осы тақырыпты оқулықтың 2-тарауында толық қарастыратын боламыз).

В) Математикалық тұжырымдарды дәлелдеуләрде қолдану.

Теоремаларды дәлелдеуде тұжырымдар логикасының формуласы болып келетін тұжырымдарды талдаумен айналысамыз.

1) Кері жору әдісі.

Айталық a тұжырым теореманың дұрыстығын білдірсін. Онда «$\bar{a}$ тұжырымы дұрыс» деп алып, кез келген b және $\bar{b}$ тұжырымдарының дұрыстығын дәлелдей алсақ, қарама-қайшылыққа келеміз. Бұл қарама-қайшылық біздің жорамалымыздың дұрыс еместігін көрсетеді. Бұны тұжырымдар логикасының көмегімен көрсетуге болады.

2) Барлық мүмкін жағдайларды талдау әдісі.

Егер a тұжырымы $b_1, b_2, ..., b_n$ шарттарына тәуелді болса, және ол шарттардың біреуі міндетті түрде орындалатын болса, онда a тұжырымы әрқашан орындалады.

3) Қажетті және жеткілікті шарт.

Егер $a \rightarrow b$ тұжырым орынды болса, онда а – жеткілікті, ал b қажетті шарт деп аталады.

Мұнда $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$ қажетті және жеткілікті шарт.

3-лекция
Логикалық алгебраның функциялары

1. **Логикалық функциялар.**
2. **Логикалық функцияларды формулалар арқылы іске асыру.**
3. **Формулалар эквиваленттігі және оның қасиеттері .**

1. Логикалық функциялар

Айталық $u = \{u_1, u_2, ..., u_m, ...\}$ - бастапқы айнымалылар (аргументтер) алфавиті болсын. Біз аргументтері төмендегідей анықталған:

$$u_{i_k} \neq u_{i_j}, k \neq j,$$

және

$$E^2 = \{0,1\}, \alpha_i \in E^2 (i = 1,2,...,n)$$

$$f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in E^2$$

болған $f(u_{i_1}, u_{i_2}, ..., u_{i_n})$ функцияны қарастырамыз.

Осындай функциялар логикалық алгебраның функциялары немесе бульдің функциялары деп айтылады.

Бұдан былай айнымалыларды (аргументтерді) белгілеуге күрделі жағдайлар болмау үшін аргументтерді және олардың индекстерін x,y,z немесе $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ретінде қолданамыз. Сонымен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ жазуды $u_{i1}, u_{i_2}, ..., u_{i_n}$ (бұл жерде $u_{i_k} \neq u_{i_j}, k \neq j$ болғанда) аргументтердің кез келген біреуіне байланысты болған функция деп түсінеміз.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцияның анықтамасынан оның берілуін аргументтердің барлық жиналымдарына сәйкес төмендегідей жазуға болады (1-кесте):

1-кесте

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0,0,…,0,0	f(0,0,…,0,0)
0,0,…,0,1	f(0,0,…,0,1)
0,0,…,1,0	f(0,0,…,1,0)
…………..	…………….
1,1,…,1,1	f(1,1,…,1,1)

Осы жерден n айнымалыға байланысты $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ функция 2^n дана жиналымдарға ие болған түрлі мәндерді қабылдауын оңай көруге болады. Бұл жерде қолайлық үшін жиналымдардың стандарт жайғасуын қолданған жөн. Егер жиналымдарды сандардың екілік есебіндегі жазуы деп есептесек, онда олардың жайғасуын стандарт араб сандарына сәйкес келтіруіміз мүмкін: $0,1,2,...,2^n-1$.

Мысал: $n = 3$, $N = 2^3 = 8$

000 – 0   100 – 4
001 – 1   101 – 5
010 – 2   110 – 6
011 – 3   111 – 7 .

P_2 арқылы 0,1 тұрақтыларды және U алфавитіндегі логикалық алгебраның барлық функцияларын белгілейміз.

Егер 1-кестедегі n айнымалының мәндерін өзгеріссіз қалдырсақ оң жақтағы баған $f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$ функцияның қасиеттеріне байланысты өзгеріп тұрады. Сол себептен төмендегі тұжырым ақиқат.

<u>1-теорема.</u> $x_1, x_2, ..., x_n$ айнымалыға байланысты P_2 ден алынған $p_2(n)$ барлық функциялар саны $(2^2)^{\uparrow n}$ ге тең.

$P_2(1)$ болғанда 2-кестеге сәйкес 4 функция болады :

2-кесте

x_1	$f_1(x_1)$	$f_2(x_1)$	$f_3(x_1)$	$f_4(x_1)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Ал $P_2(2)$ болғанда 16 функция болатындығын көру қиын емес (3-кесте):

3-кесте

x_1x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	F_6	F_7	f_8	f_9
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
f_{10}	f_{11}	f_{12}	F_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}			
1	1	1	1	1	1	1			
0	0	0	1	1	1	1			
0	1	1	0	0	1	1			
1	0	1	0	1	0	1			

Бұл жерде екі жағдайды көру мүмкін.

1. n аргументтер саны асқан сайын $P_2(n)$ қатты өседі
   $p_2(1) =4$; $p_2(2) = 16$; $p_2(3) = 256$; $p_2(4) = 65536$ …
   $n > 6$ болғанда $p_2(n)$ өте үлкен сан болады.
2. n асқан сайын функцияны 1-кесте ретінде жазу өте күрделі көрініске келіп қалады. Мысалы $n = 10$ болғанда кесте өте үлкен болады (1024 жолға ие). Ал $n = 20$ ға тең болса 2^{20} жолға жетеді. Бұндай кестемен жұмыс істеу айтарлық мүмкін емес.

Функцияның жоғарыда енгізілген сипаттамасы шын мәнінде кемел емес. Сол себептен төмендегі анықтамаларды қолдап жоғарыдағы кемшіліктерді жоюға әрекет жасаймыз.

1-анықтама. P_2 ден алынған $f(x_1, x_2,..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1},..., x_n)$ функция x_i айнымалыға мәнді ретінде байланысты болады деп айтылады, егер $x_1, x_2,..., x_{i-1}, x_{i+1},..., x_n$ аргументтердің $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1},..., \alpha_n$ мәндері үшін $f(a_1, a_2,..., a_{i-1}, 0, a_{i+1},..., a_n) \neq f(a_1, a_2,..., a_{i-1}, 1, a_{i+1},..., a_n)$ болса.

Бұл жерде x_i мәнді айнымалы деп айтылады. Болмаса ол мәнді емес яғни фиктив айнымалы болады.

2- анықтама. $f_1(x_1, x_2,..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1},..., x_n)$ және $f_2(x_1, x_2,..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1},..., x_n)$ функциялар тең деп айтылады, егер f_2 функцияны f_1 функциядан мәнді болмаған айнымалыларды ендіру немесе жою арқылы жазу мүмкін болса. Онда ол $f_1 \equiv f_2$ ретінде жазылады.

3-анықтама Логикалық функциялардың немесе жалған екендігін сипаттайтын логикалық алгебрада 2 түрдегі мәнді айнымалысы жоқ функция бар. Олда болса 0 және 1 тұрақтылар. Бірақ 0 және 1 ді логикалық алгебраның функциясы деп есептейміз.

Ескерту. Егер P_2 деп алынған $\{f_1, f_2,..., f_s\}, s \geq 1$ функциялар берілген болса, онда оның барлығы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ айнымалыларға байланысты деп есептеп $f_1(x_1, x_2,..., x_n), f_2(x_1, x_2,..., x_n),..., f_s(x_1, x_2,..., x_n)$ ретінде түсінуіміз қажет.

Енді математикалық логикада және кибернетикада қолданылатын логикалық алгебраның қарапайым функцияларын қарастырамыз:

I. Бір айнымалыға байланысты функциялар(4-кесте):

4-кесте

X	0	1	x	¬x
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

1) $f_1(x)=0$–0 тұрақтысы немесе жалғандық функциясы ;
2) $f_2(x)=1$–1 тұрақтысы немесе ақиқаттық функциясы ;
3) $f_3(x) = x$ – айнымалыға теңдік функциясы ;
4) $f_4(x) = \neg x$ - x ке теріс функция ("x емес" деп оқылады).

II. Екі айнымалыға байланысты функциялар (5-кесте):

5-кесте

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
x_1,x_2	0	$x_1 \wedge x_2$	$\overline{x_1 \to x_2}$	x_1	$\overline{x_2 \to x_1}$	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vee x_2$
0,0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0	0	0	0	1	1	1	1
1,0	0	0	1	1	0	0	1	1
1,1	0	1	0	1	0	1	0	1

	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
x_1,x_2	$\overline{x_1 \vee x_2}$	$x_1 \sim x_2$	$\overline{x_2}$	$x_2 \to x_1$	$\overline{x_1}$	$x_1 \to x_2$	x_1 / x_2	1
0,0	1	1	1	1	1	1	1	1
0,1	0	0	0	0	1	1	1	1
1,0	0	0	1	1	0	0	1	1
1,1	0	1	0	1	0	1	0	1

1) $f_1(x_1,x_2) = 0$ – 0 тұрақтысы немесе жалғандық функциясы ;

2) $f_2(x_1,x_2) = (x_1 \wedge x_2) = (x_1 \& x_2) = (x_1x_2)$ – x_1 және x_2 айнымалылардың конъюнкиясы ("x_1 және x_2 " деп оқылады, $x_1 \& x_2 = \min(x_1,x_2)$). Бұл функция логикалық көбейту деп айтылады;

3) $f_3(x_1,x_2) = \overline{x_1 \to x_2}$ - теріс импликация функциясы ;

4) $f_4(x_1,x_2) = x_1$ – айнымалы x_1 дің функциясы ;

5) $f_5(x_1,x_2) = \overline{x_2 \to x_1}$ - аргументі ауысқан теріс импликация ;

6) $f_6(x_1,x_2) = x_2$ – айнымалы x_2 нің функциясы ;

7) $f_7(x_1,x_2) = x_1 \oplus x_2$ – mod 2 бойынша x_1 және x_2 нің қосу функциясы (теріс эквиваленция) ;

8) $f_8(x_1,x_1) = x_1 \vee x_2$ – x_1 және x_2 нің дизъюнкциясы ("x_1 немесе x_2 " деп оқылады, $x_1 \vee x_2 = \max(x_1,x_2)$). Бұл функция логикалық қосу деп айтылады;

9) $f_9(x_1,x_2) = \overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \downarrow x_2$ - теріс дизъюнкция функциясы немесе Пирс бағыты;

10) $f_{10}(x_1,x_2) = x_1 \sim x_2$ - теңдік (эквиваленция) функциясы;

11) $f_{11}(x_1,x_2) = \overline{x_2}$ - айнымалы x_2 нің теріс функциясы;

12) $f_{12}(x_1,x_2) = x_2 \rightarrow x_1$ – аргументі ауысқан импликация;
13) $f_{13}(x_1,x_2) = \overline{x_1}$ - аргумент x_1 дің теріс функциясы;
14) $f_{14}(x_1,x_2) = x_1 \rightarrow x_2$ – импликация функциясы (келіп шығу, "x_1 ден x_2 келіп шығады" деп оқылады);
15) $f_{15}(x_1,x_2) = x_1/x_2$ – Шеффер функциясы;
16) $f_{16}(x_1,x_2) = 1 – 1$ тұрақтысы немесе ақиқаттық функциясы;

Осылардың ішінен f_2 (конъюнкция), f_7 (mod2 бойынша қосу), f_8(дизъюнкция), f_{10}(эквиваленция), f_{14} (импликация), f_{15} (Шеффер функциясы) функциялары өте қажетті функциялар болғаны үшін осы функцияларды негізгі деп есептейміз және толық үйренеміз.

Төмендегі пікірлерді логикалық функциялар арқылы жазыңдар:

а) Бүгін жаңбыр аралас қар жауып жатыр одан кейін тегіс қарға айналады немесе жаңбыр жауып сосын түбі жаңбыр аралас қарға айналады.
б) Ертең таңертен ауа бұлттанып жаңбыр жауады, одан кейін ауа ашылады немесе қар жауып кейін жаңбырға айналады.

2. Функцияларды формулалар арқылы іске асыру

Форулалардың индуктив анықтамалары**.**

3-анықтама. Айталық $D – P_2$ ден алынған ішкі жиын болсын.

а) <u>Индукция базисі.</u> D дан алынған барлық $f(x_1,x_2,...,x_n)$ функциялар D ның формулалалары деп айтылады.

б) <u>Индуктив өту.</u> Айталық $f(x_1,x_2,...,x_n) \in D$ және $A_1,A_2,...,A_m$ – өрнектер $\{A_1,A_2,...,A_m\} \in D \vee \{A_1,A_2,...,A_m\} \in U$ болсын. Онда $f(A_1,A_2,...,A_m)$ өрнек D ның формуласы болады.

Мысал. Айталық D элементар функциялардың жиыны болсын. Онда төмендегі өрнектер D дан алынған формулалар болады:

1) $\{[x_1 \& x_2) + x_1] + x_2\}$; 2) $[\overline{x}_1(x_2 + x_3)]$;
3) $\overline{\{x_1 \vee [(x_2 \rightarrow x_3)(x_3 \rightarrow x_2)]\}}$.

Енді формулаларды $C[f_1, f_2,..., f_s]$ (бұл жерде C формула $f_1,..., f_s$ функциялардан құралғандығын білдіреді) немесе $C(x_1,...,x_n)$(C формула $x_1,...,x_n$ айнымалылардан құралған) деп белгілейміз.

Айталық C формула $D = \{f_1(x_1,...,x_n),..., f_s(x_1,...,x_n)\}$ жиыннан алынған, яғни $C = C[f_1, f_2,..., f_s]$ болған формула болсын. Және $B = \{q_1(x_1,...,x_n),...,q_s(x_1,...,x_n)\}$ функциялар жиынын аламыз.

4- анықтама<u>.</u> Мынадай ауыстырумен $\begin{vmatrix} f_1,..., f_s \\ q_1,...,q_s \end{vmatrix}$ C дан алынған $Q = Q[q_1,q_2,...,q_s]$ формуланы қарастырамыз. Онда Q формула C формуладағыдай құрылымға ие болады деп айтылады.

Айталық N – $x_1,x_2,\ldots,x_n$ айнымалылар үшін мүмкін болған барлық $\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n\}, \sigma_i \in \{0,1\}$ жиналымдар жиыны болсын. Онда N_f^1 арқылы f функция ақиқат болатын, ал N_f^0 арқылы жалған болатын жиналымдар жиынын белгілейміз. Мұнда $N=N_f^1 \cup N_f^0$ екендігі айқын.

5-анықтама. Логикалық формулалардың ақиқат немесе жалған болатын барлық мәндерін бейнелейтін кесте ақиқаттық кестесі деп айтылады.

Мысал. Айталық $f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2,x_3)$ және $f_3(x_1,x_2,x_3)$ бастапқы берілген мысалдағы формулаларға сәйкес функциялар болсын.

1.. $(((x_1x_2)+x_1)+x_2)$ формуланы үш қадамда құрамыз. Біз $(x_1 \& x_2)$, $((x_1x_2)+x_2)$, $(((x_1x_2)+x_1)+x_2)$ көріністегі формулаларға иеміз. Бұл жерде 6-кесте арқылы сәйкес функцияны табамыз .

6-кесте

x_1x_2	x_1x_2	$((x_1x_2)+x_3)$	$(((x_1x_2)+x_3)+x_2)$
0 0	0	0	0
0 1	0	0	1
1 0	0	1	1
1 1	1	0	1

Соңғы бағана $f_1(x_1,x_2)$ функцияны анықтайды. Ол $f_1(x_1,x_2) = \max(x_1,x_2)$ $=x_1 \vee x_2$ екен. Сонымен $N_f^1 = \{01,10,11\}$, $N_f^0 =\{00\}$ болады.

1) $f_2(x_1,x_2,x_3)$ функцияны арнайы басқаша жолмен есептейміз.

5 кесте бойынша $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ жиналымдарға сәйкес функциялардың мәндерін табамыз (7-кестеге қараңыз):

7-кесте

x_1,x_2,x_3	$f_2(x_1,x_2,x_3)$	$f_3(x_1,x_2,x_3)$
0 0 0	0	0
0 0 1	1	1
0 1 0	1	1
0 1 1	0	0
1 0 0	0	0
1 0 1	0	0
1 1 0	0	0
1 1 1	0	0

Мунда $N_f^1 = \{001,010\}$.

3) $f_3(x_1,x_2,x_3)$ функцияны табу үшін $\overline{\{x_1 v[(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2)]\}}$ формулада бірге тең болатын мәндерін іздейміз. Оның үшін бұл жерде $\{x_1 v[(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2)]\}$ формула 0 ге тең болуы қажет. Ал ол

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 \to x_3 = 0, \\ x_3 \to x_2 = 1, \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 \to x_3 = 1, \\ x_3 \to x_2 = 0, \end{cases}$$

болған кездердеғана орындалады.

Ол

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 1, \end{cases}$$

болады.

Демек $f_2(x_1,x_2,x_3)$ және $f_3(x_1,x_2,x_3)$ функциялары бір түрлі мәнге (001) және (010) жиналымдарда тең болады екен (7- кесте).

1. Логикалық формулалардың ақиқаттық кестесін құру.

1-мысал.

$f(x,y) = (x\rightarrow y)/(x\sim y)$ формуланың ақиқат болатын жиналымдар жиынын тап.

8-кесте.

x,y	$F_1=x\rightarrow y$	$F_2=x\sim y$	$f=F_1/F_2$
0 0	1	1	0
0 1	1	0	1
1 0	0	0	1
1 1	1	1	0

8-кестеге сәйкес $N_f^1 =\{01 ; 10\}$.

2-мысал.

$f(x_1,x_2,x_3)= (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \rightarrow \neg(x_1\sim x_2\sim x_3)$ функцияның ақиқат болатын жиналымдар жиынын тап.

9-кесте

$x_1\ x_2\ x_3$	$F_1=x_1+x_2+x_3$	$F_2=x_1\sim x_2\sim x_3$	$F_3= \neg F_2$	$f=F_1\rightarrow F_3$
0 0 0	0	0	1	1
0 0 1	1	1	0	0
0 1 0	1	1	0	0
0 1 1	0	0	1	1
1 0 0	1	1	0	0
1 0 1	0	0	1	1
1 1 0	0	0	1	1
1 1 1	1	1	0	0

$N_f^1=\{000,011,101,110\}$.

3-мысал.

$(\overline{x_1} \approx x_2)/x_3 \equiv (\overline{x_1 \oplus x_2} \vee x_1\overline{x_3})$ теңдік ақиқат болатын жиналымдар жиынын тап.

10-кесте

$x_1\ x_2\ x_3$	$(\neg x_1\sim x_2)/x_3$	$\overline{x_1 \oplus x_2} \vee x_1\overline{x_3}$
0 0 0	1	1
0 0 1	1	1
0 1 0	1	0

0 1 1	0	0
1 0 0	1	1
1 0 1	0	0
1 1 0	1	1
1 1 1	1	1

N_f^1 ={000,001,011,100,101,110,111}.

3. Формулалар эквиваленттігі және оның қасиеттері

Біз алдынғы тақырыптарымызда D дан алынған әр бір формулаға оларға тең болған логикалық алгебра функцияларының сәйкес келуін көрдік.

5-анықтама. D дан алынған A және B формулалар эквивалент деп айтылады, егер оларға сәйкес болған f_A және f_B функциялар тең, яғни $f_A = f_B$ болса. Мунда A ≡ B жазу A және B формулалардың эквиваленттігін білдіреді.

Мысал.

1) $x\&\neg x \equiv 0$;
2) $(\neg x_1(x_2+x_3)) \equiv \neg\{x_1 v[(x_2\to x_3)(x_3\to x_2)]\}$;
3) $(x\to y) \equiv (\neg y\to\neg x)$.

Енді негізгі элементар функциялар жиынындағы эквиваленттік қасиеттерін көріп шығамыз. Бұл жерде (x_1 o x_2) арқылы $(x_1\&x_2)$,$(x_1 v x_2)$, (x_1+x_2),$(x_1\sim x_2)$ функциялардан кез келгенін белгілейміз:

1.(x_1 o x_2) функциясы топталу (ассоциативтілік) қасиетіне ие болады:

((x_1 o x_2)o x_3) = (x_1 o (x_2 o x_3)), яғни

а) $x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) \equiv (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3$;

б) $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) \equiv (x_1 \vee x_2) \vee x_3$;

в) $x_1 +(x_2+x_3) \equiv (x_1+x_2)+x_3$;

г) $x_1 \sim (x_2\sim x_3) \equiv (x_1\sim x_2) \sim x_3$.

2. (x_1 o x_2) функциясы ауыстырымдылық (коммутативтілік) қасиетіне ие болады:

(x_1 o x_2) ≡ (x_2 o x_1) , яғни

а) $x_1 \wedge x_2 \equiv x_2 \wedge x_1$

б) x_1 v x_2 ≡ x_2 v x_1

в) $x_1 + x_2 \equiv x_2 + x_2$

г) $x_1 \sim x_2 \equiv x_2 \sim x_1$.

3. Терімділік (дистрибутивтік) қасиеті:

а) $x_1 \wedge (x_2 \text{ v } x_3) \equiv (x_1 \wedge x_2)\text{v}(x_1 \wedge x_3)$;

б) $x_1 \text{ v } (x_2 \wedge x_3) \equiv (x_1 \text{ v } x_2) \wedge (x_1 \text{ v } x_3)$;

Сонымен терімділік заңдарына көнъюнкция үшін mod2 бойынша қосу дұрыс келеді:

$x_1 \wedge (x_2 + x_3) \equiv (x_1 \wedge x_2) + (x_1 \wedge x_3)$

және дизъюнкция үшін эквиваленттілік функция дұрыс келеді:

$x_1 \text{ v } (x_2\sim x_3) \equiv (x_1 \text{ v } x_2) \sim (x_1 \text{ v } x_3)$.

4. Идемпотенттік заңы:

а) $x \wedge x \equiv x$,

б) $x \vee x \equiv x$.

5. Екі рет терістік заңы:

$\neg\neg x \equiv x$

6. Де Морган заңы:

а) $\overline{x_1 \wedge x_2} \equiv \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$;

б) $\overline{x_1 \vee x_2} \equiv \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$.

7. Логикалық қарама-қайшылық заңы:

$x \wedge \overline{x} = 0$

8. Логикалық ақиқат заңы:

$x \vee \neg x \equiv 1$

Ескерту: 8 және 9 теңдіктер біргелікте толықтық заңы деп айтылады.

9. Тұрақтылар амалы:

а) $1 \wedge x \equiv x$ б) $1 \vee x \equiv 1$ в) $0 \wedge x \equiv 0$

г) $0 \vee x \equiv x$ д) $\bar{1} \equiv 0$ е) $\bar{0} \equiv 1$

10. Жұтылу заңы :

$x_1 \vee x_1x_2 = x_1$.

11. Желімдену заңы:

$x_1 \neg x_2 \vee x_1x_2 = x_1$.

Ескертулер: 1) Формулалардың жазылуын қысқартыру мақсатында & амалы ~, +, → және v амалдрынан күшті деп есептеп, кезі келгенде жақшаны тастап және & белгіні жазбай кетуге келісеміз: $(x_1 \,\&\, x_2) \vee x_3 \equiv x_1 \,\&\, x_2 \vee x_3 \equiv x_1x_2 \vee x_3$.

2) $((x_1 \circ x_2) \circ x_3)$ және $(x_1 \circ (x_2 \circ x_3))$ формулалардағы топталу (ассоциативтілік) заңның орнына $(x_1 \circ x_2 \circ x_3)$ өрнекті қолдануға болады.

3) $\wedge$,v,+,→,/ функцияларда тыс жақшалар тастап жазылады:

$(x_1 \to x_2) \equiv x_1 \to x_2$; $\overline{(x_1 \to x_2)} \equiv \overline{x_1 \to x_2}$

4) а) $\underset{i=1}{\overset{s}{\&}} x_i^{\sigma_i} = x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\ldots\&\, x_s^{\sigma_s}$ `формуласы қарапайым конъюнкция (логикалық көбейту) деп айтылады, бұл жерде $s \geq 1$ және

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, егер\, \sigma = 1 болса \\ \overline{x}, егер\, \sigma = 0 болса \end{cases}$$

- Егер логикалық көбейтуде айнымалылардан кемінде біреуі 0 ге тең болса, онда логикалық көбейту 0 ге тең болады ;.
- Егер логикалық көбейтуде кемінде 2 мүшесі болған өрнектің 1 ге тең болған көбейтіндісі болса, онда оны жазбай кету мүмкін.

  б) **v** $x_i^{\sigma i} = x_1^{\sigma 1} \vee x_2^{\sigma 2} \vee \ldots \vee x_s^{\sigma s}$ (i=1,2, …, s) формула қарапайым дизъюнкция (логикалық қосынды) деп айтылады, бұл жерде $s \geq 1$.
- Егер кемінде 2 қосындысы болған логикалық қосындыда 0 ге тең болған мүшесі болса оны тастап жазу мүмкін;
- Егер логикалық қосындыда қосындылардың біреуі 1 ге тең болса, онда логикалық қосынды 1 ге тең болады.

5) $\{ \quad x, x_1 \& x_2, x_1 + x_2, 0, 1 \quad \}$ функцияларынан құралған

$$F = \sum_{(i_1,\dots,i_n)} a_{i_1\dots i_n} x_{i_1}\dots x_{i_n} + \sum_{(i_1,\dots,i_{n-1})} a_{i_1\dots i_{n-1}} x_{i_1}\dots x_{i_{n-1}} + \dots + \sum_{i_1} a_{i_1} x_{i_1} + a,$$

бұл жерде $a \in \{0,1\}$, формула Жегалкин полиномы (көпмушесі) деп айтылады.

Дербес түрде

$$F = a_0 + a_1 x_1^{\sigma_1} + \dots + a_n x_n^{\sigma_n}$$

формула сызықты буль функциясы болады.

Мысалдар:

1. Функцияны өте жай формулаға келтіріңдер:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(x_1 \vee x_2 \vee x_3)} \vee \overline{(\overline{x_1} \vee x_2)}\,\overline{x_1 x_3}$$

Шешімі: Бұл жерде элементар функциялардың 4 (идемпотенттік заңы), 5 (екі рет терістік заңы), 6(Де Морган заңы), 7(логикалық қарама-қайшылық заңы) және 9(тұрақтылар амалы) пункттерде көрсетілген теңдіктерінен пайдаланамыз:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{\overline{x_1}}\,\overline{x_2} \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) = \overline{x_1 x_2 x_3} \vee x_1 \overline{x_2} (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) =$$

$$= \overline{x_1 x_2 x_3} \vee x_1 \overline{x_1 x_2} \vee x_1 \overline{x_2 x_3} = \overline{x_1 x_2 x_3} \vee 0\overline{x}_2 \vee x_1 \overline{x_2 x_3} = \overline{x_2 x_3} (\overline{x_1} \vee x_1) = \overline{x_2 x_3}$$

$$f(x_1, x_2, x_3 = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \quad .$$

4-лекция
Логикалық функциялардың қасиеттері.

1. **Екіленген (қосалқы) функциялар.**
2. **Буль функцияларын айнымалылар бойынша жіктеу .**
3. **КДҚФ және КҚҚФ лар**

1. Екіленген (қосалқы) функциялар

Анықтама._ $\overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$ формулаға тең болған $[f(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясына екіленген деп айтылады.

Бұл жерде $[f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})] = f(\overline{x_{i_1}}, \overline{x_{i_2}}, \dots, \overline{x_{i_n}})$ болғаны себебінен $f^*(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ функциясы $[f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})]$ функциясының бейнелеуін анықтайды. Сонда $[f(x_1, x_2, \dots, x_n)]^* = f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ болады.

Анықтамадан $0, 1, x, \overline{x}, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2$ жиын үшін төмендегілерді көру қиын емес, яғни:

0 функциясы 1 дің екіленген функциясы,

1 функциясы 0 дің екіленген функциясы,

x функциясы x тің екіленген функциясы,

$\neg x$ функциясы $\neg x$ тің екіленген функциясы,

x_1 & x_2 функциясы $x_1 \vee x_2$ дің екіленген функциясы,

$x_1 \vee x_2$ функциясы x_1 & x_2 дің екіленген функциясы.

Екіленгендік анықтамасынан $f^{**} = (f^*)^* = f$ екендігі келіп шығады, яғни екі рет екіленген функция өзіне тең.

Екіленгендік ұстанымы. Егер $A = C[f_1 , f_2 , \dots , f_s]$ формула $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ функциясын іске асырса, онда A формула да $f_1 , f_2 , \dots , f_s$ функцияларды сәйкес $f_1^* , f_2^* , \dots , f_s^*$ функцияларға ауыстыру жолымен алынған $C[f_1^*, f_2^* , \dots , f_s^*]$ формула f^* функциясын іске асырады.

Осы формуланы A ға екіленген формула деп айтамыз және A^* арқылы белгілейміз. Демек $A^* = C[f_1^* , f_2^* , \dots , f_s^*]$.

Осымен $D=\{ 0,1,x,\neg x, x_1 \& x_2 , x_1 \vee x_2 \}$ жиынындағы формулалар үшін екіленгендік ұстанымын төмендегідей қорытындылау мүмкін: A формулаға екіленген A^* формуланы алу үшін, A формулада төмендегідей ауыстыруларды орындау жеткілікті: 0 ді 1 ге, 1 ді 0 ге, & ны v ға, v ны & ға немесе , егер $A = C[0,1,x,\neg x, x_1 \& x_2 , x_1 \vee x_2]$ болса, онда

$A^* = C[1, 0, x,\neg x, x_1 \vee x_2 , x_1 \& x_2]$ болады.

Мысал: 1) $A_1 (x_1 , x_2) = x_1 \& x_2$, $A_1^* (x_1 , x_2) = x_1 \vee x_2$;

2) $A_2 (x_1 , x_2) = x_1x_2 \vee \neg x_1\neg x_2$, $A_2^* (x_1,x_2) = (x_1 \vee x_2)(\neg x_1 \vee \neg x_2)$.

А**нықтама**: Егер $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ функция өзінің екіленген функциясына тең, яғни $f(x_1 ,x_2,\dots,x_n) = f^*(x_1,x_2,\dots,x_n) = \neg f(\neg x_1,\neg x_2,\dots,\neg x_n)$ болса, онда ол өздік екіленген функция деп айтылады. Өздік екіленген функцияларға мысалдар: x, $\neg x$, $xy \vee xz \vee yz$.

Тағыда екіленгендік үстанымынан төмендегілер келіп шығады:

Егер $A(x_1,x_2,\dots,x_n) = B(x_1,x_2,\dots,x_n)$ болса, онда $A^*(x_1,x_2,\dots,x_n) = B^*(x_1,x_2,\dots,x_n)$ болады.

Мысалдар :

1) $A(x_1,x_2,\dots,x_5) = x_1 x_2 x_3 \vee \neg x_1 \neg x_2 x_3 \vee (x_1 x_5 \rightarrow x_3 \neg x_4) \vee \neg x_3 \neg x_5$

$A(x_1,x_2,\dots,x_5) = x_1 x_2 x_3 \vee \neg x_1 \neg x_2 x_3 \vee \neg(x_1 x_5) \vee x_3 \neg x_4) \vee \neg x_3 \neg x_5 =$

$= x_1 x_2 x_3 \vee \neg x_1 \neg x_2 x_3 \vee \neg x_1 \vee \neg x_5 \vee x_3 \neg x_4 \vee \neg x_3 \neg x_5 = x_1 x_2 x_3 \vee$

$\neg x_1 \vee \neg x_5 \vee x_3 \neg x_4$.

Екіленгендік ұстанымына сәйкес :

$A^* =(x_1 \vee x_2 \vee x_3)\neg x_1\neg x_5 (x_3 \vee \neg x_4) = \neg x_1x_3 \neg x_5 \vee \neg x_1 x_3 x_4\neg x_5 = \neg x_1x_3 \neg x_5$.

2) $A = \neg(x_1 \rightarrow x_2) = \neg(\neg x_1 \vee x_2) = x_1 \neg x_2$;

$A^* = \neg\neg(\neg x_1 \rightarrow\neg x_2) = \neg x_1 \rightarrow\neg x_2) = x_1 \vee \neg x_2$.

3) $A = x_1 \rightarrow\neg x_2 \sim x_1 = x_1 x_2$; $A^* = \neg(\neg x_1 \rightarrow\neg\neg x_2 \sim \neg x_1) = x_1 \vee x_2$.

2. Буль функцияларын айнымалылар бойынша жіктеу

Барлық логикалық алгебраның функциялары формулалар ретінде жазылуы мүмкінба? Осы мәселені шешуге әрекет жасаймыз.

Белгілеу еңгіземіз: $x^{\sigma} = x\sigma \vee \neg x\neg\sigma,\ \sigma = \{0,1\}$. Бұл жерден

$$x^{\sigma} = \begin{cases} \neg x, & \text{егер } \sigma = 0 \text{ болса,} \\ x, & \text{егер } \sigma = 1 \text{ болса} \end{cases}$$

екендігі немесе теккана $x=\sigma$ болғанда $x^{\sigma} = 1$ екендігі келіп шығады.

Теорема (Функцияларды айнымалылар бойынша жіктеу тұралы).

Кез келген $m(1 \le m \le n)$ үшін логикалық алгебраның барлық функцияларын төмендегідей түрде жазу мүмкін:

$$f(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n) = \bigvee_{(\sigma1,\ldots,\sigma m)} x_1^{\sigma1} \&\ldots\& x_m^{\sigma m} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_m, x_{m+1},\ldots,x_n),$$

бұл жерде дизъюнкция $x_1,\ldots,x_m$ айнымалылардың мүмкін болған барлық жиналымдары бойынша алынған. Бұл формула функцияны $x_1,x_2,\ldots,x_m$ айнымалылар бойынша жіктеу деп айтылады.

1-салдар. Бір айнымалы бойынша жіктеу:

$f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) = x_n\& f(x_1,\ldots,x_{n-1},1) \vee \neg x_n \& f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$.

Бұл жерде $f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$ және $f(x_1,\ldots,x_{n-1},1)$ функциялар жіктеу мушелері деп айтылады.

Мысал:

1) $(((x_1x_2)+x_1)+x_2)=x_2f(x_1,1)\vee\neg x_2f(x_1,0)=x_2(x_1+x_1+1)\vee\neg x_2(x_1+0)=$
$x_2\vee x_1\neg x_2$;

2) $\neg\{x_1\vee[(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2)]\} = \neg x_1 \& [\neg(x_2 \to x_3) \vee \neg(x_3 \to x_2)] =$
$= x_3f(x_1,x_2,1) \vee x_3f(x_1,x_2,0) = x_3(\neg x_1 \&\neg(1\to x_2)) \vee \neg x_3(\neg x_1 \&\neg(x_2 \to 0))$.

Бұл формула $\{001,010\}$ жиналымдарда ақиқат.

2-салдар. Барлық n айнымалылар бойынша жіктеу.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \bigvee_{(\sigma1,\ldots,\sigma n)} x_1^{\sigma1} \&\ldots\& x_n^{\sigma n} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n),$$

$f(x_1,\ldots,x_n) \ne 0$ болғанда

$$\bigvee_{(\sigma1,\ldots,\sigma n)} x_1^{\sigma1} \&\ldots\& x_n^{\sigma n} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma1,\ldots,\sigma n), \\ f(\sigma1,\ldots,\sigma n)=1}} x_1^{\sigma1} \&\ldots\& x_n^{\sigma n}.$$

Нәтижеде

$$\mathbf{f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma1,\ldots,\sigma n) \\ f(\sigma1,\ldots,\sigma n)=1}} x_1^{\sigma1} \&\ldots\& x_n^{\sigma n}}.$$

Осылай жіктеу буль функциясының кемел дизъюнктивті қалыпты формасы(**к.д.қ.ф.**) деп айтылады.

Мысал: $\neg\{x_1\vee[(x_2 \to x_3)(x_3\to x_2)]\} = \neg x_1\neg x_2 x_3 \vee \neg x_1x_2 \neg x_3$.

3 – теорема. Логикалық алгебраның барлық функцияларын кері функция, конъюнкция және дизъюнкция арқылы формулалар ретінде жазу мүмкін.

Дәлелдеу: 1) Егер $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv 0$ болса $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv x_1 \&\neg x_1$ деп жазу мүмкін.

2) Егер $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \ne 0$ болса, онда

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma1,\ldots,\sigma n)\\ f(\sigma1,\ldots,\sigma n)=1}} x_1^{\sigma1} \&\ldots\& x_n^{\sigma n}$$

болады.

Теорема дәлелденді.

Кез келген жуйеде берілген логикалық формуладан кемел дизъюнктивті қалыпты форманы құру үшін:

1) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функцияны немесе формуланың ақиқаттық кестесі құрылады;

2) кестеден $f(\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_n) = 1$ болған барлық $(\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_n)$ жиналымдар жиыны белгілеп алынады;

3) белгілеп алынған жиналымдар үшін $x_1^{\sigma1} \&\ldots\& x_n^{\sigma n}$ логикалық көбейтулер, яғни қарапайым конъюнкциялар жазылады;

4) қарапайым конъюнкцияларды логикалық қосу (дизъюнкция) арқылы біріктіріп шығылады.

Алынған формула $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функцияның кемел дизъюнктивті қалыпты формасы болады.

Бүл жерде $x_1^{\sigma1} \&\ldots\& x_n^{\sigma n}$ элементар конъюнкциялардың логикалық қосындысы **v&** типтегі өрнек кемел д.қ.ф.. болды. Ал кез келген логикалық фукнция **&v** типте жазылуы мүмкінба? Осының $f \neq 1$ болғанда мүмкіндігін дәлелдейміз.

Айталық $f^* \neq 0$ және $f^*(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \bigvee_{\substack{\sigma1,\ldots,\sigma n)\\ f^*(\sigma1,\ldots,\sigma n)=1}} (x_1^{\sigma1} \&\ldots\& x_n^{\sigma n})$ болсын.

Онда екіленгендік формуласына сайкес

$$f^{**}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma1,\ldots,\sigma n)\\ f^*(\sigma1,\ldots,\sigma n)=1}} (x_1^{\sigma1} \vee\ldots\vee x_n^{\sigma n})$$ болады.

Екіленгендік принципі бойынша теңдіктің сол жағы $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ке тең. Ал оң жағы

$$\mathop{\&}_{\substack{(\sigma1,\ldots,\sigma n)\\ f^*(\sigma1,\ldots,\sigma n)=1}} (x_1^{\sigma1} \vee\ldots\vee x_n^{\sigma n}) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma1,\ldots,\sigma n)\\ f^*(\neg\sigma1,\ldots,\neg\sigma n)=0}} (x_1^{\sigma1} \vee\ldots\vee x_n^{\sigma n}) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma1,\ldots,\sigma n)\\ f^*(\sigma1,\ldots,\sigma n)=0}} (x_1^{\neg\sigma1} \vee\ldots\vee x_n^{\neg\sigma n}) =$$

$$= f(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

$$\mathbf{f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma1,\ldots,\sigma n)\\ f^*(\sigma1,\ldots,\sigma n)=0}} (x_1^{\neg\sigma1} \vee\ldots\vee x_n^{\neg\sigma n}).}$$

Бұл өрнек буль функциясының кемел конъюнктивті қалыпты формасы(**к.к.қ.ф..**) деп айтылады.

Демек, буль фукнцияларының берілуін кестеден басқа, {¬,v,&} функциялар жиынындағы формулалар арқылыда оңай сипаттау мүмкін екен.

5-лекция
Логикалық функциялардың қолдану принциптері.

1. **Буль функцияларының геометриялық кескіні .**
2. **Электрон сұлбалардың құрылуында буль функцияларының қолданылуы .**
3. **Контактілі схемалар.**

1. Бульдік функциялардың геометриялық кескіні

Айталық Ω - R^n жиынында берілген облыс болсын (бұл жерде R^n – n өлшемді Евклид кеңістігі). Мынадай функция еңгіземіз :
$\Omega : R^n \to P_2$, мұнда

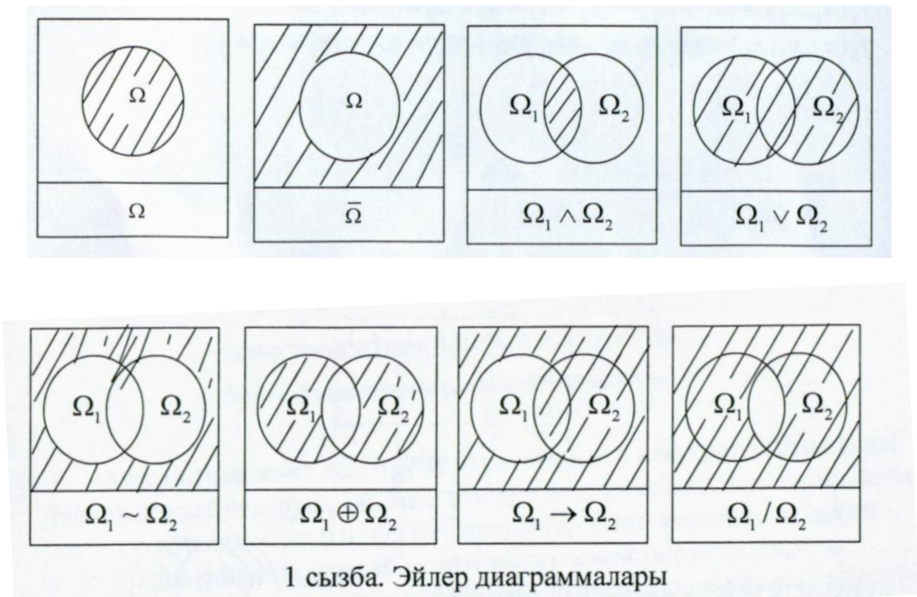
$$\Omega = \Omega(x) = \begin{cases} 0, \text{ егер } x \notin \Omega, \\ 1, \text{ егер } x \in \Omega . \end{cases}$$

Осы функцияны Ω облыстың *характеристикалық функциясы* немесе *екімәнді предикат* деп айтамыз. Қолайлық үшін характеристикалық функцияның облысы белгіленген әріпке сәйкес жазылады.

Айталық, Ω_i ($i = 1,2, \dots , m$) берілген облыстардың характеристикалық функциялары, ал $Y = F(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ –бульдік функциясы болсын.

Бұл жерде $\Omega_i \in P_2$ болғаны үшін R^n кеңістіктің нүктелерінде 0 немесе 1 мәндерге тең болатын $F(\Omega_1,\Omega_2,\dots, \Omega_m) \in P_2$ өрнек мағынаға ие.

Сондықтан $\Omega \in R^n$ жиыны $\Omega=F(\Omega_1, \Omega_2,\dots, \Omega_m)$ характеристикалық функциямен F буль функциясы және $\Omega_1, \Omega_2,\dots, \Omega_m$ облыстар арқылы толық анықталады.



1 сызба. Эйлер диаграммалары

$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m$ ларды Ω облысының негізгі облыстары деп айтамыз.

Бұл жерде F $(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m)$ өрнек Ω_i облыстарынан құралған Ω облысының логикалық құрылымын анықтайды. Мунда Ω облысы бос жиын да болуы мүмкін.

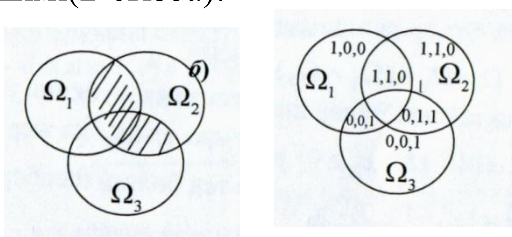
Енді Ω_i облыстары R^2 кеңістігінде жайғасқан деп есептейік. Онда бір мәнді және екі мәнді логикалық амалдарға Эйлер диаграммаларын сәйкес қоюымыз мүмкін (1-сызба) .

<u>Мысал.</u> Ω_1, Ω_2, Ω_3 облыстарын негізгі есептеп, төмендегі кесте арқылы берілген F буль функциясы үшін Эйлер диаграммасын құрыңдар.

11-кесте

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
Y	0	0	0	1	0	0	1	1

Шешімі(2-сызба):



2-сызба.

Мысалдар: $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функциялар үшін Эйлер диаграммаларын сызыңдар:

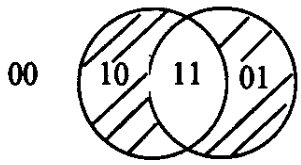
1. $f_1(x_1,x_2) = (x_1 \rightarrow x_2)(x_1 \sim_2) \vee x_1/x_2+x_1$.

Шешімі: $f_1(x_1,x_2)$ функциясы үшін ақиқаттық кестесін анықтаймыз

12-кесте.

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

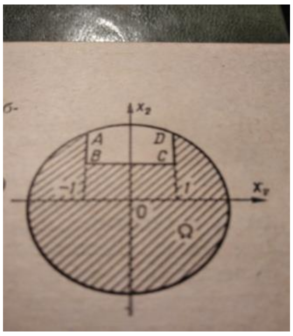
12-кестеге сайкес Эйлер диаграммасын сызамыз (3-сызба):



3-сызба.

Мысал-2.

Төмендегі сызбада берілген Ω облысын қарастырамыз (4-сызба).



4-сызба.

Бұл облысты екімәнді предикат арқылы төмендегідей жазу мүмкін:
$\Omega=\Omega_1\&(\Omega_2 \vee \Omega_3) = (4- x_1^2 - x_2^2 \geq 0) \& [(x_1^2 -1) \geq 0) \vee (1- x_2 \geq 0)]$. (1)

Мұнда негізгі облыстар ретінде төмендегілер таңдалған:

$\Omega_1 = (4- x_1^2 - x_2^2 \geq 0)$ – центрі 0 нүктеде болған радиусы 2-ге тең шеңбер;

$\Omega_2 = (x_1^2 -1) \geq 0)$ - $x_1 = \pm 1$ түзулер арасындағы жолақтан тыс жазықтық (тұл түзулер жолаққа жатпайды);

$\Omega_3 = (1- x_2 \geq 0)$ – $x_2 = 1$ түзуден төменде жатқан жартылай жазықтық (бұл түзу жазықтықта жатады).

Айталық, қарастырылып жатқан мысалда негізгі облыстар ретінде Ω_2 және Ω_3 алынған болсын:

$\Omega_2 = (x_1^2 -1) \geq 0)$ - $x_1 = \pm 1$ түзулерді өз ішіне алатын және осы түзулер арасындағы жолақ;

$\Omega_3 = (1- x_2 \geq 0)$ – $x_2 = 1$ түзуден жоғарыда және бірге жататын нүктелерден құралған жарты жазықтық.

Онда Ω облыс үшін мынадай характеристикалық функцияны жазу мүмкін:

$$\Omega=\Omega_1\&\neg(\Omega_2 \vee \Omega_3). \quad (2)$$

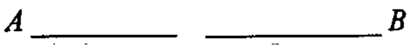
Бырақта (1) және (2) предикаттар үшін жалпы ақиқаттық нүктелер (мұнда $\Omega = 1$) Ω облыстың ішкі нүктелері және $d\Omega = (4- x_1^2 - x_2^2 = 0)$ щеңберге тиісті болған оның шекара $d\Omega$ нүктелері болады. Сондықтан , ABCD кесінді нүктелерде (2)-предикат нөлге тең, ал (1) – предикат бірге тең болады.

2. Электрон сұлбалардың құрылуында буль функцияларының қолданылуы

Автоматика және есептеу техникасындағы электрон сұлбаларды құрастыруда буль функциялары өте көп қолданылады. Іске түсірілетін электрон құрылымдардың негізгі жұмыстары көп кездерде олардың құрылымдық сипаттарын математикалық ауыстырулар арқылы қысқарту маселелері дискреттік анализ (буль функциялары) әдістері бойынша орындалады.

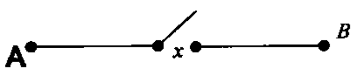
Түсінуді максимал оңай және көрнекті түрге келтіру үшін буль функцияларын текқана екі тармақты жалғайтын электрон шынжырлар арқылы сипаттаймыз. Бір түрде тоқ жалғағыш арқылы өтеді, ал екіншісінде өтпейді деп есептейміз .

а) АВ өткізгіш 0 жағдайда ажыралған болады деп есептейміз. Әлбетте одан ток өтпейді :

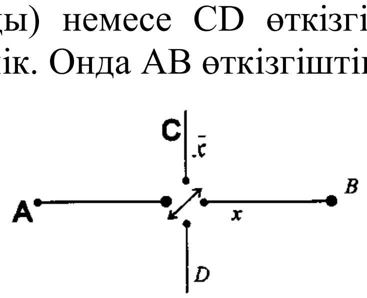


б) Ажыралмаған тұйықтаушы өткізгіш 1 жағдайда болады :

в) Жалғағыш арқылы бекітілген АВ өткізгіш екі жағдайдан біреуінде болуы мүмкін – 0 және 1. Ал оны біз буль айнымалысы х ке сайкес қойсақ болады:

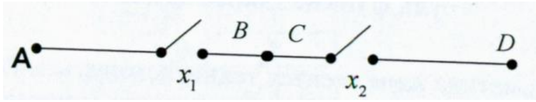


г) Енді жалғағаштың АВ өткізгішті жалғаған (онда CD ажыралған болады) немесе CD өткізгішті жалғаған (онда АВ ажыралған) жағдайын көрелік. Онда АВ өткізгіштің жағдайы х болса, CD – ¬х болады.

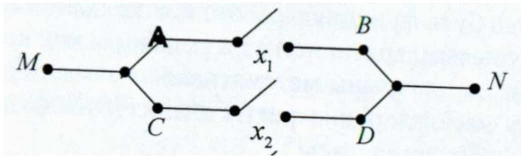


Енді осы қасиеттер арқылы негізгі логикалық фукнциялардың электрондық жалғағыш сұлбаларын құрамыз:

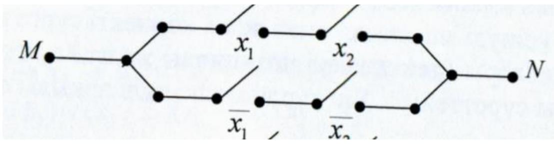
1) $f_1 = x_1 \,\&\, x_2$:



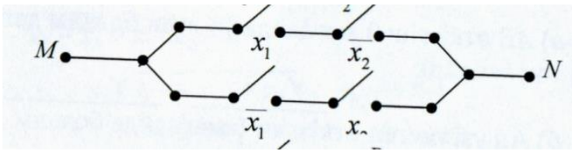
2) $f_2 = x_1 \vee x_2$:



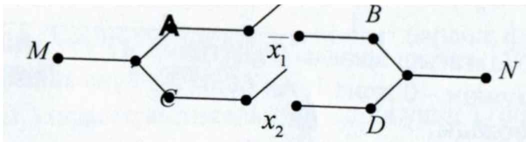
3) $f_3 = x_1 \sim x_2$:



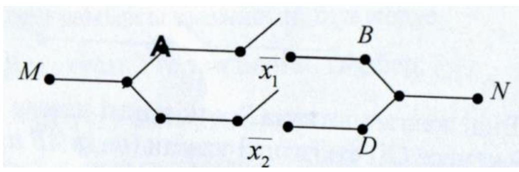
4) $f_4 = x_1 + x_2$:



5) $f_5 = x_1 \rightarrow x_2$:



6) $f_6 = x_1 / x_2$:



Мысалдар:

1. Пресс станогы жұмыс істеу үшін жалғанатын екі түйме бір уақытта басылуы талап етіледі.

Сұрақ: 1) Неге станок қаупсіз жұмыс істеуі үшін екі жалғағыш бір уақытта қосылуы қажет?

2) Пресс станогының электрондық сұлбасы сызылсын.

3) Осы сызбаның логикалық функциясы жазылсын.

2. Бөлменің ортасында аспашам ілулі тұр. Аспашам жануы үшін қабырғаға орнатылған екі жалғағыш түйме бір уақытта қосылған немесе бір уақытта ажратылған болуы қажет. Егер F арқылы аспашамның жанып-өшу жағдайын, ал x_1 және x_2 арқылы жалғағыш түймелерді белгілесек, онда:

а) $F(x_1,x_2)$ функциясыныың ақиқаттық кестесі жазылсын;

б) $F(x_1,x_2)$ функциясының логикалық формуласы жазылсын;

в) $F(x_1,x_2)$ функциясына сәйкес келетін электрон сұлба сызылсын.

6-лекция

Логикалық функциялардың толық жүйесі

1. **Толықтық және тұйықтық.**
2. **Өте қажетті туйықты кластар.**
3. **Толықтық туралы Пост теоремасы.**

1. Толықтық және тұйықтық

Біз логикалық алгебраның барлық функциялары $\neg x, x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2$ элементар функциялары арқылы жазылуы мүмкіндігін көрдік. Сонда мынадай сурау тұрады. Осындай элементар функциялар жүйесі қанша? Осы сұраққа жауап іздейік.

8-анықтама: P_2 ден алынған $\{f_1,f_2,\ldots,f_s,\ldots\}$ функциялар жүйесі (функционал) толық деп айтылады, егер кез келген буль функциясын осы жүйе функциялары арқылы жазу мүмкін болса.

Толық жүйелерге мысалдар:

1) P_2 – барлық буль функциялар жиыны толық жүйе болады;
2) $D = \{\neg x, x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2\}$- толық жүйені анықтайды.

Осымен бірге барлық жүйелерде толық емес, мәселен: $D_1 = \{0,1\}$, $D_2 = \{1,\neg x\}$ т.б.

Енді бір жүйе толықтығынан басқа жүйенің толықтығы келіп шығатын теорема қарастырамыз.

4-теорема. Төмендегі шарттар арқылы P_2 ден алынған $D = \{f_1,f_2,\ldots,f_S,\ldots\}$ (I), $Q = \{q_1,q_2,\ldots,q_S\ldots\}$ (II) жүйелер берілген:
а) (I) – толық жүйе, б) (I) жүйенің барлық функциялары (II) жүйенің функциялары арқылы формулалар ретінде жазылады. Онда (II) жүйе толық болады.

Осы теорема бойынша тағыда көптеген толық жүйелерді мысалдар арқылы келтіруіміз мүмкін:
3). $D = \{\neg x, x_1 \,\&\, x_2\}$ – төлық жүйе. Дәлел үшін (I) жүйе орнына 2 жүйені ал (II) жүйе үшін 3 жүйені алсақ $x_1 \vee x_2 = \neg(\neg x_1 \,\&\, \neg x_2)$ теңдігі негізінде дәлелденеді.

4). $D = \{\neg x, x_1 \vee x_2\}$ – толық жүйе. Бұл тастық алдынғы мысал секілді дәлелденеді.

5). $D =\{x_1/x_2\}$–толық жүйе болады $x_1/x_1 =\neg x_1$,$(x_1/x_2)/(x_1/x_2) =\neg(x_1/x_2)= x_1\& x_2$.

6). $D = \{0,1,x_1x_2,x_1+x_2\}$ – толы жүйе: $x_1 + 1 = \neg x_1$; $x_1x_2 = x_1 \,\&\, x_2$; $x_1+x_2 = \neg x_1x_2 \vee x_1 \neg x_2$.

5-теорема. P_2 ден алынған кез келген функция mod2 полиномы (Жегалкин полиномы) бойынша жазылуы мүмкін.
Дәлел: Ол толық жүйе.

Енді $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ айнымалыларға байланысты Жегалкин полиномының, яғни $\Sigma a_{i1\ldots is}x_{i1}\ldots x_{is}$ көріністегі өрнектер санын табамыз. Бұл жерде $x_{i1}\ldots x_{is}$ қосындылар саны n айнымалылардан құралған $(i_1,\ldots,i_s)$ ішкі жиындар санына, яғни 2^n ге тең.

Ал бұл жерде $a_{i1,\ldots,is}$ тек қана 0 немесе 1 ді қабылдағаны үшін ізделген полиномдар саны $(2^2)^{\uparrow n}$, яғни барлық буль функциялар санына тең. Осы жерден салдар ретінде функциялардың Жегалкин полиномы арқылы тек қана бір түрде жазылуы келіп шығады.

Құралған мысалдардан көптеген толық жүйелер бар екендігін көру мүмкін. Олардың әр біреуі элементар функциялардың жиыны ретінде қаралуы және сонымен Буль функцияларының сипатталуын түрлі формулалар ретінде пайдалану мүмкін екендігін білдіреді. Ал қандай тәсіл ең оңай екендігі қаралатын мәселенің сипатына байланысты екен.

Толықтықтың сипатталуы тұйықталу және тұйықты кластар анықтамаларына өте байланысты.

9-анықтама: Айталық Ω - P_2 ден алынған функциялардың ішкі жиыны болсын. Ω нің тұйықталуы деп Ω жиынның функциялары арқылы формулалар ретінде жазылуы мүмкін болған барлық буль функцияларының жиынына айтылады. Ω жиынның тұйықталуы $[\Omega]$ арқылы белгіленеді.
Мысал: 1) $\Omega = P_2$. $[\Omega] = P_2$.
2) $\Omega = \{1,x_1 + x_2\}$. Бұл жиынның тұйықталуы L кластағы барлық сызықты функциялар жиыны болады:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = c_o + c_1x_1 + c_2x_2 +\ldots+ c_nx_n \text{ (mod) } 2 \text{ , мунда } c_i = 0,1$$

$(i = 0,1,2,\ldots,n)$.

Тұйықталудың негізгі қасиеттері:

1) $[\Omega] \supseteq \Omega$;
2) $[[\Omega]] = [\Omega]$;
3) Егер $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ болса , онда $[\Omega_1] \subseteq [\Omega_2]$;
4) $[\Omega_1 \cup \Omega_2] \supseteq [\Omega_1] \cup [\Omega_2]$;

10-анықтама: Егер $[\Omega] = \Omega$ болса Ω класс (функционал) тұйықты клас деп айтылады.

Мысал: 1) $\Omega = P_2$ клас тұйықты клас болады;

2) $\Omega = \{1, x_1+x_2\}$ тұйықты клас емес;

3) L клас тұйықты, себебі сызықты өрнектерден құралған өрнектер сызықты болады.

Бұл жерде кез келген $[\Omega]$ кластың тұйықты екенін оңай көру мүмкін.

Ал ол көптеген тұйықты кластарды мысалдар арқылы алу мүмкіндігін білдіреді.

Енді тұйықталу және тұйықты кластарға байланысты толықтықтың негізгі анықтамасын береміз.

11-анықтама: Егер $[\Omega] = P_2$ болса, онда Ω толық жүйе болады.

Енді негізгі логикалық функциялардың толық жүйелер арқылы жазылуын қарастырамыз.

Айталық $D_1 = \{\neg x, x_1 \,\&\, x_2, x_1 \vee x_2\}$ және $D_2 = \{0, 1, x_1x_2, x_1 + x_2\}$ толық жүйелер берілген болсын. Негізгі логикалық функциялар ретінде $f_2 = x_1 \,\&\, x_2$, $f_8 = x_1 \vee x_2$, $f_{10} = x_1 \sim x_2$, $f_7 = x_1 \circ x_2$, $f_{14} = x_1 \to x_2$, $f_{15} = x_1/x_2$ функцияларды аламыз.

1. f_2, f_7, f_8, f_{10}, f_{14}, f_{15} функцияларын D_1 жүйесі арқылы бейнелеу.

Бұл жерде f_2, f_8 функциялары D_1 жүйенің ішкі функциялары болғаны үшін оларды бейнелеу қажет еместігі түсінікті.

f_7, f_{10}, f_{14} , f_{15} функцияларын D_1 жүйеде бейнелеу үшін оларды кемел дизъюнктивті қалыпты формаға келтіреміз

а) $f_7(x_1,x_2) = x_1 + x_2$, $f_7(x_1,x_2) = \bigvee\limits_{f7(\sigma1,\sigma2)=1} x_1^{\sigma1} x_2^{\sigma2} = x_1 \neg x_2 \vee \neg x_1 x_2$.

Бұл жерде $f_7(0,1) = f_7(1,0) = 1$.

Демек $\mathbf{x_1 + x_2 = x_1 \neg x_2 \vee \neg x_1 x_2}$.

б) $f_{10}(x_1,x_2) = x_1 \sim x_2$, $f_{10}(x_1,x_2) = \bigvee\limits_{f10(\sigma1,\sigma2)=1} x_1^{\sigma1} x_2^{\sigma2} = \neg x_1 \neg x_2 \vee x_1 x_2$.

Бұл жерде $f_{10}(0,0) = f_{10}(1,1) = 1$.

Демек $\mathbf{x_1 \sim x_2 = \neg x_1 \neg x_2 \vee x_1 x_2}$.

в) $f_{14}(x_1,x_2) = x_1 \to x_2$, $f_{14}(x_1,x_2) = \mathop{\&}\limits_{f14(\sigma1,\sigma2)=0} (x_1^{\neg\sigma1} \vee x_2^{\neg\sigma2}) = \neg x_1 \vee x_2$.

Бұл жерде $f_{14}(1,0) = 0$.

Демек $\mathbf{x_1 \to x_2 = \neg x_1 \vee x_2}$.

г) $f_{15}(x_1,x_2) = x_1/x_2$, $f_{15}(x_1,x_2) = \mathop{\&}\limits_{f15(\sigma1,\sigma2)=0} (x_1^{\neg\sigma1} \vee x_2^{\neg\sigma2}) = \neg x_1 \vee \neg x_2$.

Бұл жерде $f_{15}(1,1) = 0$.

Демек $\mathbf{x_1/x_2 = \neg x_1 \vee \neg x_2}$.

Мысалдар:

1. $F(x_1,x_2) = \neg x_1 \sim x_2 \vee (x_1+1)(x_1 \to x_2)$ формуланы $D_1 = \{\neg x, x_1 \,\&\, x_2, x_1 \vee x_2\}$ жүйеде жазыңдар.

Шешуі: $F = \neg\neg x_1 \neg x_2 \vee \neg x_1 x_2 \vee \neg x_1 (\neg x_1 \vee x_2) = x_1 \neg x_2 \vee \neg x_1 x_2 \vee \neg x_1 \vee \neg x_1 x_2 = x_1 \neg x_2 \vee \neg x_1$.

3. $f_2, f_7, f_8, f_{10}, f_{14}, f_{15}$ функцияларын D_2 жүйесі арқылы бейнелеу.
Бұл жерде $f_8, f_{10}, f_{14}, f_{15}$ функцияларын D_2 жүйеде бейнелеу үшін оларды Жегалкин полиномының анықталмаған коэффициенттері арқылы табамыз.
а) $x_1 \vee x_2 = ax_1x_2 + bx_1 + cx_2 + d$.
Бұл жерде 00 жиналымда, яғни $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ болғанда $d = 0$; 01 жиналымда , яғни $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ болғанда $c = 1$; 10 жиналымда , яғни $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ болғанда $b = 1$; 11 жиналымда, яғни $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ болғанда $a+b+c = 1$, $a = 1$ болады. Демек $\mathbf{x_1 \vee x_2 = x_1x_2+x_1 + x_2}$.
б) $x_1 / x_2 = ax_1x_2 + bx_1 + cx_2 + d$. Бұл жерде 00 жиналымда $d=1$; 01 де $c=0$; 10 де $b=0$; 11 де $a=1$. Сондықтан $\mathbf{x_1 / x_2 = x_1x_2 + 1}$.
в) $x_1 \sim x_2 = ax_1x_2 + bx_1 + cx_2 + d$. Бұл жерде 00 – $d=1$, 01– $c= 1$, 10 – $b=1$, 11 – $a = 0$. Демек $\mathbf{x_1 \sim x_2 = x_1 + x_2 + 1}$ **.**
г) $x_1 \to x_2 = ax_1x_2 + bx_1 + cx_2 + d$. Бұл жерде 00 –$d =1$, 01- $c=0$, 10- $b=1$, 11 – $a = 1$. Демек $\mathbf{x_1 \to x_2 = x_1x_2 + x_1 + 1}$.

2. Өте қажетті тұйықты кластар

P_2 дегі өте қажетті тұйықты кластар.

1) T_0 арқылы $f(0,0,...,0) =0$ теңдік орындалатын барлық $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ буль функциялар класын белгілейміз.
Мәселен, 0, x, $x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 + x_2$ функциялар осы класта жатады. Ал 1, $\neg x$, $x_1 \to x_2$ функциялар бұл класқа тиісті емес.
Егер T_0 класындағы f функциялардың кестелік түрленуіне мән беретін болсақ , онда T_0 класында $(2^{2\uparrow n}) / 2$ бульдік функцияларды анықтау мумкін. T_0 – тұйықты клас.

Мысалдар.

1. $f(x_1,x_2,x_3) = (\neg x_1 \to \neg x_2 + x_3)(x_2 + \neg x_3 + 1) \vee \neg(x_2 / x_3)$.
Осы функцияның $f \in T_0 \vee f \notin T_0$ екендігін дәлелдеңдер.
Шешуі: $f(x_1,x_2,x_3)$ функцияның мәнін (0,0,0) жиналымда анықтаймыз.
$f(0,0,0) = (\neg 0 \to \neg 0 + 0)(0 + \neg 0 + 1) \vee \neg(0 / 0) = (1 \to 1+0)(0+1+1) \vee \neg 1 = (1+0)(1+1) \vee 0 = 1 \& 0 \vee 0 = 0$. Демек $f \in T_0$ екен.

2) T_1 арқылы $f(1,1,...,1) =1$ теңдік орындалатын барлық $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ буль функциялар класын белгілейміз.
Мәселен 1, x, $x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \sim x_2$ функциялар осы класта жатады. Ал 0, $\neg x$, x_1/x_2 функциялар бұл класқа тиісті емес.
T_1 класындағы функциялар T_0 кластағы функцияларға екіленген болғандықтан T_1 класындада $x_1,x_2,\dots,x_n$ айнымалыларға байланысты болған $(2^{2\uparrow n}) / 2$ бульдік функциялар бар. T_1– тұйықты клас.

Мысалдар.

1. $f(x_1,x_2,x_3)=(\neg x_1 / x_2 / \neg x_3)(x_1 \sim \neg x_2 + 1) \vee (x_1 + \neg x_2 + x_3 + 1)(x_2 \sim \neg x_3)$.

Осы функция үшін $f \in T_1 \vee f \notin T_1$ қатынасты анықтаңдар.

Шешуі: $f(x_1,x_2,x_3)$ функцияның мәнін $(1,1,1)$ жиналымда анықтаймыз.

$f(1,1,1) = (\neg 1 / 1 / \neg 1)(1 \sim \neg 1 + 1) \vee (1 + \neg 1 + 1 + 1)(1 \sim \neg 1) = (0/1/0)(1 \sim 0 + 1) \vee (1 + 0 + 1 + 1)(1 \sim 0) = (1/0)(0 + 1) \vee (0 + 1)(1 \sim 0) = 1\&1 \vee 1\&0 = 1 \vee 0 = 1$. Демек $f \in T_1$ екен.

3) S арқылы P_2 ден алынған барлық өздік екіленген функциялар жиынын белгілейміз. Өздік екіленген функцияларға мысалдар: $x, \neg x, x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ және т.б. Өздік екіленген функцияларда $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \neg f(\neg x_1,\neg x_2,\ldots,\neg x_n)$ шарт орындалады. Басқаша айтқанда қарсылас және $(\neg\alpha_1, \neg\alpha_2, ..., \neg\alpha_n)$ жиналымдарда функция түрлі мәндерді қабылдайды. Сондықтан $x_1,x_2,\ldots,x_n$ айнымалыларға байланысты болған өздік екіленген функциялар саны $2^{2\uparrow(n-1)}$ ге тең болады. Сонымен S тұйықты клас.

Мысалдар.

1. $f(x_1,x_2) = x_1 \sim \neg x_2 + \neg(x_1 + x_2) + 1$.Осы функция үшін $f \in S \vee f \notin S$ қатынасты анықтаңдар.

$f^*(x_1,x_2) = \neg(\neg x_1 \sim \neg\neg x_2 + \neg(\neg x_1 + \neg x_2) + 1) = \neg x_1 \sim x_2 + \neg x_1 + \neg x_2 + 1 + 1 + 1 = = \neg x_1 + x_2 + 1 + \neg x_1 + \neg x_2 + 1 = x_1 + 1 + x_2 + 1 + x_1 + 1 + x_2 + 1 + 1 = 1$.

$f(x_1,x_2) = x_1 + \neg x_2 + 1 + x_1 + x_2 + 1 + 1 = x_1 + x_2 + 1 + 1 + x_1 + x_2 + 1 + 1 = 0$,

$f \neq f^*$. Демек $f \notin S$.

4) Кезектегідей белгілеулер еңгіземіз: $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\beta_2, \ldots, \beta_n)$, $f(\boldsymbol{\alpha}) = f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

9-анықтама. $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\beta_2, \ldots, \beta_n)$ жиналымдар үшін $\boldsymbol{\alpha} \Leftarrow \boldsymbol{\beta}$ "алдын келу қатынасы" орындалады деп айтамыз , егер $\alpha_1 \leq \beta_1$, $\alpha_2 \leq \beta_2$, ..., $\alpha_n \leq \beta_n$ болса.

10-анықтама. Егер $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функция үшін $\boldsymbol{\alpha} \Leftarrow \boldsymbol{\beta}$ орындалған кез келген $\boldsymbol{\alpha}$ және $\boldsymbol{\beta}$ жиналымдарда $f(\boldsymbol{\alpha}) \leq f(\boldsymbol{\beta})$ шарт орындалса $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функцияны **монотон** функция деп айтамыз. Монотон функцияларға мысалдар: $0, 1, x, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2$ және т.б.

М арқылы монотон функциялар класын белгілейміз. М клас тұйықты.

Мысалдар:

1. $f(x_1,x_2)=(x_1 + \neg x_2) \vee (\neg x_1 \sim x_2)(x_1 + 1)$. Осы функцияның $f \in M \vee f \notin M$ қатынасын анықтаңдар.

Шешуі. $f(x_1,x_2)$ функция үшін ақиқаттық кестесін құрамыз(13-кесте):

$f(0,0) = f(\boldsymbol{\alpha_1}) = 0$, $f(0,1) = f(\boldsymbol{\alpha}_2) = 1$, $f(1,0) = f(\boldsymbol{\alpha}_3) = 0$, $f(1,1) = f(\boldsymbol{\alpha}_4) = 1$.

13-кесте

	x_1	x_2	f
$\boldsymbol{\alpha_1}$	0	0	1
$\boldsymbol{\alpha}_2$	0	1	1
$\boldsymbol{\alpha}_3$	1	0	0
$\boldsymbol{\alpha}_4$	1	1	1

Осы кесте негізінде $f(\boldsymbol{\alpha_1}) > f(\boldsymbol{\alpha}_3)$ екендігінен $f \notin M$ келіп шығады.

5) L арқылы барлық сызықты функциялар класын белгілейміз.
Мунда L={ 0, 1, $x_1 + x_2$) және ол түйықты клас.
Мысалдар.

1. $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee \neg x_2) \sim (x_1 \to \neg x_3)(\neg x_2 \sim x_3)$.

Осы функцияның L класқа қатынасын анықтаңдар.

Шешуі. L класқа қатынасын табу үшін $f(x_1,x_2,x_3)$ функцияны $D_2 = \{0,1,x_1x_2,x_1 + x_2\}$ жүйеде бейнелейміз.

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee \neg x_2) \sim (x_1 \to \neg x_3)(\neg x_2 \sim x_3) = x_1x_2x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_3 + 1.$$

Демек $f \notin S$ екен.

Қорытынды ретінде T_0, T_1, S, M, L кластардың әр біріне тән болған жеке қасиеттері бар екендігін кезектегі кестеден байқауға болады (14-кесте). Бұл кестеде (+) белгі функцияның жоғарыда көрсетілген класқа тиісті, ал (-) кері жағдайды білдіреді.

14-кесте

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
¬x	-	-	+	-	+
x	+	+	+	+	+

3. Толықтық туралы Пост теоремасы

Айталық D={ f_1, f_2, … , f_s, … } P_2 ден алынған кез-келген функциялар жүйесі болсын.

Теорема (Пост). D функциялар жүйесі толық болуы үшін оның T_0, T_1, S, M, L түйықты кластардың ешбіреуіне жалпы тиісті болмастығы қажет және жеткілікті.

1-салдар. P_2 ден алынған кез келген W клас ($W \neq P_2$) кемінде T_0, T_1, S, M, L түйықты кластардың біреуіне тиісті болады.

Анықтама. P_2 ден алынған G функциялар класы толықалды немесе максимал деп айтылады, егер G – толық емес , ал кез-келген
f ($f \in P_2$, $f \notin G$) функция үшін $G \cup \{ f \}$ – толық жүйе болса.
Ал, анықтамадан толықалды кластардың тұйықты екендігі келіп шығады.

2-салдар. Логикалық алгебрада теккана бес толықалды кластар бар, олар T_0 , T_1 , S, M, L .

Мысал. $f_1 = x_1 x_2$, $f_2 = 0$, $f_3 = 1$, $f_4 = x_1 + x_2 + x_3$ функциялар жүйесі толық жүйе болады. Себебі $f_1 \notin L$, $f_2 \notin S$, $f_3 \notin T_0$, $f_4 \notin M$. Сонымен бірге , егер кез-келген бір функцияны алып тастасақ , онда толық болмаған жүйеге ие боламыз , яғни $\{ f_2 , f_3 , f_4 \}$ жиын L класқа,
$\{ f_1 , f_3 , f_4 \}$ жиын T_1 , $\{ f_1 , f_2 , f_4 \}$ жиын T_0 және $\{ f_1 , f_2 , f_3 \}$ жиын M кластарға тиісті.

Мысалдар.

1. D логикалық функциялар жүйесінің толықтығын анықтаңдар:

$$D = \{ x_1 + x_2 + 1, x_1 \vee x_2 , 1, \neg x_1 \} .$$

Шешуі. Жүйенің толық немесе толық емес екендігін анықтау үшін Пост теоремасы негізінде T_0 , T_1 , S, M, L кластарға қатынасын белгілеп алу үшін кесте құраймыз(15-кесте):

15-кесте

	T_0	T_1	S	M	L
$x_1 + x_2 + 1$	-	+	-	-	+
$x_1 \vee x_2$	+	+	-	+	-
1	-	+	-	+	+
$\neg x_1$	-	-	+	-	+

Бұл жерде :

$f_1 \notin T_0$; $f_1 \in T_1$; $f_1 \notin S$; $f_1 \notin M$; $f_1 \in L$,
$f_2 \notin T_0$; $f_2 \in T_1$; $f_2 \notin S$; $f_2 \notin M$; $f_2 \notin L$,
$f_3 \notin T_0$; $f_3 \in T_1$; $f_3 \notin S$; $f_3 \in M$; $f_3 \in L$,
$f_4 \notin T_0$; $f_4 \notin T_1$; $f_4 \in S$; $f_4 \notin M$; $f_4 \in L$.

Демек D – толық жүйе екен.

7-лекция

Бульдік функцияларды минимизациялау мәселелері

1. **Негізгі анықтамалар және ұғымдар.**
2. **Тұйықты дизъюнктивті қалыпты формалар.**
3. **Минимизация мәселесінің геометрикалық анықтамасы.**
4. **Синтез мәселесін шешудің элементар әдістері.**

---

1. Негізгі анықтамалар және ұғымдар.

Айталық $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ айнымалылар алфавиті берілген болсын.

1-анықтама.

$$K = Xi_1^{\sigma 1} \,\&\, Xi_2^{\sigma 2} \& \ldots \& \, Xi_r^{\sigma r} \quad (i_\mu \neq j_\omega,\ \mu \neq \omega \text{ болғанда})$$

өрнек элементар конъюнкция (э.к.) деп айтылады, бұл жерде r саны элементар конъюнкцияның рангі (дәрежесі) деп қабылданған.
Анықтама бойынша 1 тұрақтының рангі 0 ге тең.

2-анықтама.

$$\eta = \bigvee_{i=1}^{s} K_i \qquad (K_i \neq K_j,\ i \neq j)$$

өрнек дизъюнктивті қалыпты форма (д.қ.ф.) деп айтылады, мунда K_i $(i=1,2,\ldots,s)$ рангі r_i ге тең болған элементар конъюнкция.

Алдын қарастырылған тақырыптардан η д.қ.ф. өзіне сәйкес болған $f(x_1,\ldots,x_n)$ буль функциясын іске асыратындығын білеміз, яғни $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\eta$. Осындай д.қ.ф. ретінде кемел д.қ.ф. ны қарастыруымыз мүмкін:

$$\eta = \bigvee_{\substack{(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n) \\ f(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma 1} \,\&\, x_2^{\sigma 2} \,\&\ldots\&\, x_n^{\sigma n}$$

Мысал. $f(x_1,x_2,x_3)$ функция төмендегі 1-кесте арқылы берілген болсын.

1-кесте.

$x_1x_2x_3$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$x_1x_2x_3$	$f(x_1,x_2,x_3)$
000	1	100	1
001	0	101	1
010	0	110	1
011	0	111	1

Оны кемел д. қ.ф. ретінде жазамыз:

$$\eta_1 = \neg x_1 \neg x_2 \neg x_3 \vee x_1 \neg x_2 \neg x_3 \vee x_1 \neg x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \neg x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

Сонымен кестедегі функцияны тағыда бір д.қ.ф. іске асыратындығын талдау арқылы көруіміз мүмкін: $\eta_2 = \neg x_2 \neg x_3 \vee x_1$.

Қарастырылған мысалдан логикалық алгебра функциларының д.қ.ф. ретінде жазылуы теккана біреу емес екендгін көрдік.

Соның үшін осыған байланысты болған д.қ.ф. лардың “күрделігін” бейнелейтін L(η) қолайлық индексі еңгіземіз:

1. $L_ә(\eta)$-η д.қ.ф. да қатысатын айнымалы әріптер саны.

Қаралған мысалда $L_ә(\eta_1)=15$, $L_ә(\eta_2)=3$, яғни қолайлық жағынан η_2 д.қ.ф. η_1 д.қ.ф. ға салыстырғанда өте жәй формула екендігі көрінеді.

2. $L_k(\eta)$-η д.қ.ф. да қатысатын э.к. саны. $L_k(\eta_1)=5$, $L_k(\eta_2)=2$.

3. $L_o(\eta)$- $\neg$ функцияның η д.қ.ф. дағы саны. $L_o(\eta_1)=7$, $L_o(\eta_2)=2$.

Сонымен $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ айнымалыларға байланысты 3^n әртүрлі э.к. бар екендігі түсінікті (бұл жерде “бос” конъюнкцияға 1 тұрақтысы сәйкес қойылған).

Мысал

а) $\{x_1,x_2\}$ айнымалылар үшін: $N_k=9$, яғни

$k_1=x_1x_2$, $k_2=\neg x_1x_2$, $k_3=x_1\neg x_2$, $k_4=\neg x_1\neg x_2$,

$k_5=x_1$, $k_6=\neg x_1$, $k_7=x_2$, $k_8=\neg x_2$, $k_9=1$,

б) $\{x_1,x_2,x_3\}$ айнымалылар үшін: $N_k=27$ (бүл элементар конъюнкциялардың жазылуын студенттің өзіне қалдырамыз).

$\{x_1,x_2,\ldots, x_n\}$ айнымалыларға байланысты д.қ.ф. лар саны $2^{3\uparrow n}$ ге тең.

Мысал. $\{x_1\}$ айнымалы үшін $N_\eta=8$:

$\eta_1=x$; $\eta_2=\neg x$; $\eta_3=x\vee\neg x$; $\eta_4=x\vee 1$; $\eta_5=\neg x\vee 1$; $\eta_6=x\vee 0$; $\eta_7=\neg x\vee 0$; $\eta_8=1$.

3-анықтама. Минимал $L_ә(\eta)$ индекске ие болған және $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функцияны іске асыратын η д.қ.ф. минимал д.қ.ф. (м.д.қ.ф.) деп айтылады.

4-анықтама. $L_k(\eta)$ индекс негізінде минимал болған д.қ.ф. төте д.қ.ф. деп айтылады.

Мысалдағы $\eta_2=\neg x_2\neg x_3 \vee x_1$ д.қ.ф. минимал және төте д.қ.ф. болады.

Бұл жерде өте маңызды сұрақ туады: кез келген $f(x_1x_2,\ldots,x_n)$ логикалық алгебраның функциялары үшін L ге салыстырмалы оның минимал д.қ.ф. ларын құру мүмкінба?

Осы мәселе бульдік функцияларды минимизациялау мәселесі деп айтылады.

Блай айтқанда бұл мәселе өте жәй шешімге ие:

1) $(x_1,x_2,\ldots x_n)$ айнымалыларға байланысты болған $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_s$ $(s=2^{3\uparrow n})$ д.қ.ф. құралады.

2) Олар арасынан $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функцияны іске асыратын д.қ.ф. лар тізімі алынады.

3) Табылған д.қ.ф.лардың индекстер күрделігі есептеліп, салыстыру әдісімен минимал д.қ.ф. анықталады.

Қаралған алгоритм өте жәй болғанымен ЭЕМ де қолдану жағынан өте тиімсіз есептеледі, себебі оны іске асыру үшін $2^{3\uparrow n}$ д.қ.ф. құрайтын амалдарды орындау қажет. Ал ол практикалық турғыдан мумкін емес.
Соның үшін минимизациялау мәселесін шешуде бұл алгоритм қолданылмайды.

2. Түйықты дизъюнктивті қалыпты формалар

Айталық η-кез келген д.қ.ф. болсын және

$$\eta=\eta' \vee k, \quad \eta=\eta' \vee x_i^{\sigma i} k',$$

мунда

1) k-η нен алынған э.к.;
2) η'- η де жататын басқа конъюнкциялардан құралған д.қ.ф.;
3) $x_i^{\sigma i}$ –k э.к. дан алынған көбейткіш;
4) k'-k ның басқа көбеткіштерінен алынған э.к.

Екі бейнедегі түрлендіруді қарастырамыз:

I. Элементар конъюнкцияларды жою амалы.

η д.қ.ф. да k э.к. ны қашықтатып η' д.қ.ф. ға өту. Бұл амал теққана η' =η шарт орындалғанда мүмкін болады.

II. Көбейткішті жою амалы.

η д.қ.ф. дан η' v k' д.қ.ф.ға түрлендіру $x_i^{\sigma i}$ көбейткішті жою жолымен орындалады. Бұл түрлендіру теққана η' v k′ = η болғанда мүмкін болады.

5-анықтама. I және II түрлендірулер арқылы тағыда қысқартуға келмейтін η д.қ.ф. тұйықты д.қ.ф. деп айтылады.

Мысал: $\eta=x_1 \vee \neg x_1 \neg x_2$ тұйықты д.қ.ф.

Осы екі түрлендіру бойынша қысқарту алгоритімін құру мүмкін.

Бұл алгоритм нәтижесі бойынша барлық уақыт

$L(\eta') \le L(\eta), \qquad L(\eta' \vee k') \le L(\eta)$

және минимал д.қ.ф. тұйықты д.қ.ф.лар ішінде жатады.

Тұйықты д.қ.ф. құрастыру әдісі кезектегідей ретпен орындалады:

1. Алғашқы $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функция үшін кез келген бір д.қ.ф. таңдалады. Мәселен қолайлық үшін кемел д.қ.ф. алу мүмкін.

2. Берілген д.қ.ф. қосылушылары және көбейткіштерінің тәртібін өзгертіп жазу.

Мысал. 2-кестеде берілген $f(x_1,x_2,x_3)$ функцияны қарастырамыз.

2-кесте

x_1 x_2 x_3	**$f(x_1x_2x_3)$**	**x_1 x_2 x_3**	**$f(x_1x_2x_3)$**
000	1	100	1
001	1	101	0
010	0	110	1
011	1	111	1

$f(x_1x_2x_3)$ функция үшін екі бейнедегі тәртіппен жазылған кемел д.қ.ф. келтіреміз:

$\eta' = \neg x_1 \neg x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1 \neg x_2 x_3 \vee \neg x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \neg x_2 \neg x_3 \vee x_1 x_2 \neg x_3 \vee x_1 x_2 x_3$,

$\eta'' = \neg x_1 \neg x_1 \neg x_3 \vee x_3 \neg x_1 \neg x_2 \vee x_2 \neg x_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \neg x_3 x_1 x_2 \vee x_1 \neg x_2 \neg x_3$.

3. Д.қ.ф. ның мүшелері сол жақтан оңға қарай қарастырылады: мунда

1) k_i элементар конъюнкцияны жою амалы;

2) k_i э.к. дағы $xi_v^{\sigma v}$ көбейткішті жою амалы

орындалады.

Нәтижеде ізделінген д.қ.ф. табылады.

Теорема. Қысқарту алгоритмі арқылы алынған д.қ.ф. тұйықты д.қ.ф. болады.

Мысал. 2-кесте негізінде жазылған $\eta^{'}$ және $\eta^{''}$ кемел д.қ.ф. лардан алгоритм бойынша тұйықты д.қ.ф. лар табамыз. Оның үшін

1) $\eta^{'}$ да бірінші тұрған $\neg x_1 \neg x_2 \neg x_3$ э.к.ны қарастырамыз. Мұнда бұл э.к.ны жойып болмайды. Сондықтан II түрлендіруді қолдансақ $\neg x_1$ ді жою мумкіндігін көреміз. Сонда кезектегі д.қ.ф. алынады:

$\neg x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1 \neg x_2 x_3 \vee \neg x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \neg x_2 \neg x_3 \vee x_1 x_2 \neg x_3 \vee x_1 x_2 x_3.$

2) Енді ретімен жазылған екінші $\neg x_1 \neg x_2 x_3$ э.к.ны қарастырамыз. Мұнда I түрлендіру орындалмайды, ал II түрлендіруде $\neg x_2$ ті жою мумкін. Сондықтан

$\neg x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1 x_3 \vee \neg x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \neg x_2 \neg x_3 \vee x_1 x_2 \neg x_3 \vee x_1 x_2 x_3.$

3) $\neg x_1 x_2 x_3$ э.к. ны I түрлендіру бойынша жою мумкін. Сондықтан

$\neg x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1 x_3 \vee x_1 \neg x_2 \neg x_3 \vee x_1 x_2 \neg x_3 \vee x_1 x_2 x_3.$

4) $x_1 \neg x_2 \neg x_3$ э.к.ныда I түрлендіру негізінде жоямыз. Сонда

$\neg x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1 x_3 \vee x_1 x_2 \neg x_3 \vee x_1 x_2 x_3.$

5) $x_1 x_2 \neg x_3$ э.к. ушін I түрлендіру орындалмайды, бырақта II түрлендіру арқылы x_2 айнымалыны жою мумкін :

$\neg x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1 x_3 \vee x_1 \neg x_3 \vee x_1 x_2 x_3.$

6) Сонғы $x_1 x_2 x_3$ э.к. ушін I және II түрлендірулерді қарастырсақ , мунда текқана x_1 айнымалыны жою мүмкіндігін байқаймыз. Сонда бірінші қарастырылым ушін кезектегі д.қ.ф. ны аламыз:

$\neg x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1 x_3 \vee x_1 \neg x_3 \vee x_2 x_3.$

Бұл д.қ.ф. ушін екінші қарастырылым нәтиже бермейді. Сондықтан $\eta^{'}$ үшін тұйықты д.қ.ф. $\eta_1 = \neg x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1 x_3 \vee x_1 \neg x_3 \vee x_2 x_3$ болады.

Сол секілді $\eta^{''}$ үшін екінші тұйықты болған $\eta_2 = \neg x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1 x_3 \vee x_1 x_2$ д.қ.ф. ны құрастыру мүмкін (оны табуды оқушының өзіне қалдырамыз).

Мунда $L_ә(\eta_1)=8$, $L_ә(\eta_2)=6$; $L_k(\eta_1)=4$, $L_k(\eta_2)=3$; $L_o(\eta_1)=4$, $L_o(\eta_2)=3$.

Сонымен осылар негізінде қорытынды жасасақ:

1) Алгоритмді қолдану нәтижесі алғашқы д.қ.ф.ның тәртібін таңдауға байланысты екен.

2) Сонымен түрлі күрделіктегі тұйықты д.қ.ф.ларға ие болар екен.

3) Осы алгоритмды қолдау арқылы кез-келген $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функция үшін минимал д.қ.ф. табу мүмкін екен. Оны кезектегі теорема дәлелдейді.

Теорема. Айталық $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$-кез келген ($f\neq0$) бульдік функциясы және

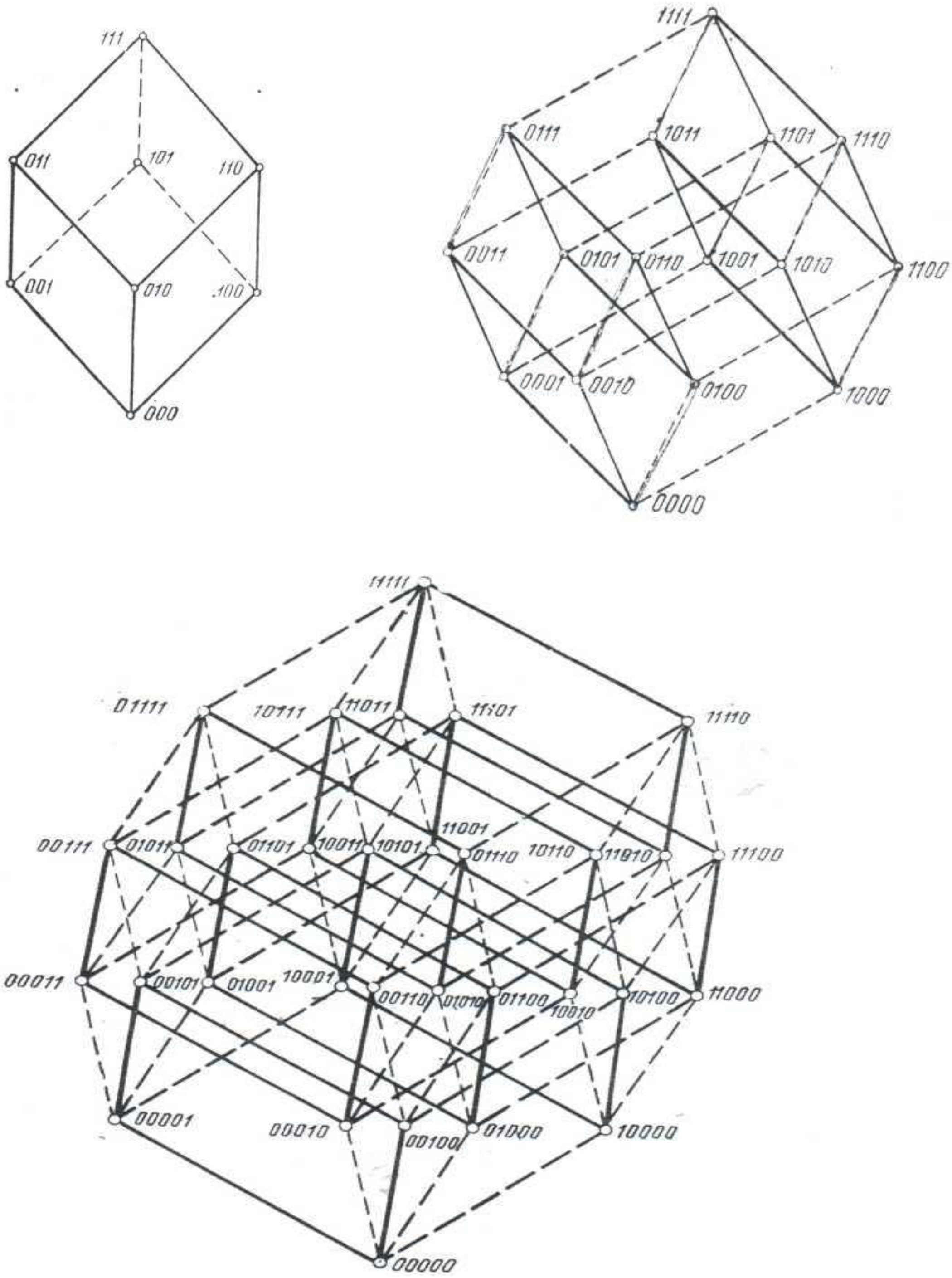
$$\eta = \bigvee_{i=1}^{s} k_i$$

оның кез келген тұйықты д.қ.ф.сы болсын.

Онда сондай бір тәртіптелген кемел д.қ.ф. табу мүмкін, егер оған қысқарту алгоритмы қолданылса, нәтижеде минимал д.қ.ф. алынады.

3. Минимизациялау мәселесінің геометриялық анықтамасы

E^n арқылы барлық $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ жиналымдар құрамын белгілейміз. Оны n өлшемді кубтың бірлік мәндері ретінде қарастыру мүмкін. Мунда басқа нүктелер жоқ және қарастырылмағаны үшін E^n ді n өлшемді куб, ал $\{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n\}$ жиналымдар құрамын кубтың төбелері деп айтамыз. Төмендегі сызбаларда(1-сызба) сәйкес ретінде 3, 4 және 5 өлшемді кубтардың бейнелері көрсетілген.



1-сызба

6-анықтама. Айталық $\sigma_{i1},\sigma_{i2},...,\sigma_{ir}$ $-1\leq i_1,<i_2<\ldots<i_2\leq n$ және $\{0,1\}$ ден құралған белгіленген сандар жүйесі болсын.

E^n кубтағы $\alpha_{i1}=\sigma_{i1}$, $\alpha_{i2}=\sigma_{i2},\ldots$, $\alpha_{ir}=\sigma_{ir}$ болған барлық $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ төбелер жиыны (n-r) өлшемді жақ деп айтылады. Бұл жерде (n-r) өлшемді жақ E^n кубтың (n-r) өлшемді ішкі кубі болады.

Айталық $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ логикалық алгебраның кез келген функциясы болсын.

7-анықтама. $f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=1$ шартты қанағаттандыратын E^n кубтағы N_f: $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in N_f$ төбелерге сәйкес мәндер жиыны $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функцияның қапталу жиыны деп айтылады.

Мысал. 8-кестеде берілген $f(x_1,x_2,x_3)$ функцияға төмендегі қапталу жиыны сәйкес келеді:

$N_f=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,1),(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

Айталық $K(x_1,x_2, \ldots, x_n) = x_{i1}^{\sigma 1} \,\&\, x_{i2}^{\sigma 2} \,\&\, \ldots \,\&\, x_{ir}^{\sigma r}$
конъюнкция берілген болсын.

8-анықтама. $K(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ коньюнцияға сәйкес келетін N_k жиын r-дәрежелі интервал деп айтылады.

Бұл жерде N_k жиынның r-дәрежелі интервалы (n-r) өлшемді жаққа сәйкес келеді.

Мысал. $k_1(x_1,x_2,x_3)= \neg x_2 \,\&\, \neg x_3$;

$K_2(x_1,x_2,x_3)= x_1 \,\&\, \neg x_2$;

$K_3(x_1,x_2,x_3)= x_1$

конъюнкцияларға $Nk_1=\{(0,0,0),(1,0,0)\}$, $Nk_2=\{(1,0,0),(1,0,1)\}$,

$Nk_3=\{(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ болған 2,2 және 1 дәрежелі интервалдар сәйкес келеді.

Егер $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=q(x_1,x_2,\ldots,x_n) \vee h(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ болса, онда төмендегілер орынды:

1) $N_q \subseteq N_f$, $N_h \subseteq N_f$;
2) $N_f = N_q \cup N_h$.

Дербес ретінде $f = k_1 \vee k_2 \vee \ldots \vee k_s$ болса, $Nk_i \subseteq N_f$ (i=1,2,…,s), $N_f=N_{k1}\cup N_{k2} \cup\ldots\cup N_{ks}$, яғни $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функция немесе д.қ.ф. ның $N_{k1},N_{k2},\ldots,N_{ks}$ интервалы N_f жиынның қапталу жиынына сәйкес келеді.

Мысал. 1-кестеге сәйкес $f(x_1,x_2,x_3)$ функцияны төмендегі η_1 және η_2 д.қ.ф.лар бірдей іске асыратындығын көрдік:

$\eta_1= \neg x_1\neg x_2\neg x_3 \vee x_1\neg x_2\neg x_3 \vee x_1 \neg x_2 x_3 \vee x_1 x_2\neg x_3 \vee x_1x_2x_3$;

$\eta_2= \neg x_2\neg x_3 \vee x_1$

Осы д.қ.ф.ларға екі қапталу жиыны сәйкес келеді:

$N_f=N_{k1} \cup N_{k2} \cup N_{k3} \cup N_{k4} \cup N_{k5}$,

$N_f=N_{k1}^0 \cup N_{k2}^0$,

бұл жерде $N_{k1}=\{(0,0,0)\}$, $N_{k2}=\{(1,0,0)\}$, $N_{k3}=\{(1,0,1)\}$, $N_{k4}=\{(1,1,0)\}$, $N_{k5}=\{(1,1,1)\}$, $N_{k1}^0=\{(1,0,0),(0,0,0)\}$, $N_{k2}^0=\{(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

Енді k_i конъюнкцияның дәрежесін , яғни r_i санды N_{ki} интервалдың дәрежесі ретінде белгілейміз. Мунда $r=\Sigma r_i$ (i=1,2,…,s) болған r саны қапталу дәрежесі деп айтылады. Осыған сәйкес бульдік функциялардың минимизациялау мәселесіне сәйкес болған қапталу тұралы мәселенің геометриялық тұжырымын жазуымыз мүмкін:

N_f ($N_f=N_{k1}\cup N_{k2} \cup \ldots\cup N_{ks}$) жиын үшін интервалдармен қапталудың минимал r дәрежесін табу мәселесі $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функцияның дизъюнктивті қалыпты формасын құру болып есептеледі.

Сонымен буль функцияларының минимизациялау мәселесін екі формада қою мүмкін екен: аналитикалық және геометриялық .

8-лекция

Функцияларды қысқарту тәсілдері

1. **Қысқартылған д.қ.ф.**
2. **Геометриялық бейне негізіндегі тұйықтылық**
3. **Минимал д.қ.ф құруға негізделген ізденулер.**

---

1. Қысқартылған дизъюнктивті қалыпты форма

Анықтама. N_f жийынға тиісті N_k жиын максимал интервал деп айтылады, егер $N_k \subseteq N_k' \subseteq N_f$ және N_k' интервалдың рангі N_k интервал рангінен кіші болған N_k' интервал табылмаса

Мысал. Айталық $K_1(x_1,x_2,x_3)= \neg x_2\& \neg x_3$, $K_2(x_1,x_2,x_3)= x_1\& \neg x_2$, $K_3(x_1,x_2,x_3)= x_1$ элементар конъюнкциялар берілген болсын. Оларға сәйкес Nk_1 және Nk_3 интервалдар максимал, ал Nk_2 интервал N_f жиын үшін максимал болмаған интервал болады. Себебі $Nk_2\subset Nk_3$ және Nk_3 интервалдың рангі Nk_2 интервал рангінен кіші.

Анықтама. N_f жиынның $N_к$ максимал интервалына сәйкес келетін K конъюнкция f функцияның жәй импликантасы деп айтылады.

Айталық Nk_1^0, Nk_2^0, …, Nk_m^0 – N_f жиындағы барлық максимал интервалдар тізімі болсын.

Онда $N_f = Nk_1^0 \cup Nk_2^0 \cup\ldots\cup Nk_m^0$, себебі $Nk_i^0 \subseteq N_f$ (i=1,…m) және N_f жиыннан алынған әр бір нүкте кейбір максимал интервалға тиісті.

Соңғы теңдік мынаған эквивалент:

$f =k_1^0 \vee k_2^0 \vee\ldots\vee k_m^0$.

Анықтама. f функцияның барлық жәй имплаканталарынан құралған д.қ.ф. қысқартылған д.қ.ф. деп айтылады.

Сонымен $\eta_к=k_1^0$ v k_2^0 v …v k_m^0 f функцияның қысқартылған д.қ.ф.ы екен.

Мысал. Алдынғы мысалдағы f функция үшін барлық максимал интервалдардан құралған төмендегі қапталуға иеміз: $N_f=Nk_1 \cup Nk_3$.

Оған $\eta_к = \neg x_2 \& \neg x_3 \vee x_1$ қысқартылған д.қ.ф. сәйкес келеді.

Енді **қ**ысқартылған д.қ.ф. құру алгоритмдерін қарастырамыз.

Нельсон әдісі. Қысқартылған д.қ.ф. құру ұшін:

1. $f(x_1 x_2,\ldots,x_n)$ функцияға кез келген конъюнктивті қалыпты форманы (кемел к.қ.ф.да болуы мумкін) құрамыз.

2. Дистрибутивтік заңы бойынша жақшаларды ашу амалын, яғни $\&V \rightarrow V\&$ бейнедегі ауыстыруды орындаймыз.

3. Бұл ауыстыруда

1) $k_1' x_i * k_2' \neg x_i = 0$ - нөльге тең мүшелер ,
2) : $k_1 v\, k_1 = k_1,\ \ k_1 \&\, k_1 = k_1$ қайталанатын мүшелер,
3) $k_1 k_2 \vee k_1 = k_1$ жұтылатын мүшелер

үшін жою және қысқарту амалдарын орындаймыз.

Нәтижеде қысқартылған д.қ.ф. табылады.

Мысал. Төмендегі 3-кесте арқылы берілген $f(x_1,x_2,x_3)$ функцияны қарастырамыз:

3-кесте

$x_1x_2x_3$	$f(x_1x_2x_3)$	$x_1x_2x_3$	$f(x_1x_2x_3)$
000	1	100	1
001	1	101	0
010	0	110	1
011	1	111	1

Оны к.к.қ.ф. ретінде жазамыз.

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1 v\ \neg x_2 v x_3)(\neg x_1 v x_2 v \neg x_3)$

1) Жақшаларды ашу амалын орындаймыз:

$f=x_1\neg x_1 v \neg x_1 \neg x_2 v \neg x_1 x_3 v x_1 x_2 v x_2 \neg x_2 v x_2 x_3 v x_1 \neg x_3 v \neg x_2 \neg x_3 v x_3 \neg x_3$

2) Нөльге тең мүшелерді жойамыз және қысқарту амалдарыны орындаймыз.

$f=\neg x_1 \neg x_2 v \neg x_1 x_3 v x_1 x_2 v x_2 x_3 v x_1 \neg x_3 v \neg x_2 \neg x_3$

3) Жұтылуға сәйкес және қайталанатын мүшелер жоқ, сондықтан $\eta_к=\neg x_1 \neg x_2 v \neg x_1 x_3 v x_1 x_2 v x_2 x_3 v x_1 \neg x_3 v \neg x_2 \neg x_3$

қысқартылған д.қ.ф. болады.

Блейк әдісі. Қысқартылған д.қ.ф. құру ұшін:

1.Қарастырылып жатқан д.қ.ф. ның әр бір мүшесіне солдан оң жаққа қарай $xK_1 \vee \neg x\ K_2 = xK_1 \vee \neg x\ K_2 \vee K_1K_2$ –жалпыланған желімдеу заңын мумкін болғанша біртіндеп қолдаймыз.

2. Алынған д.қ.ф үшін жалпы $K_1 \vee K_1K_2 = K_1$ – жұтылу заңын орындаймыз. Құрастырылған д.қ.ф. қысқартылған д.қ.ф. болады.

Мысал. $B = x_1x_2 \vee \neg x_1x_3 \vee \neg x_2x_3$ функция үшін қысқартылған д.қ.ф. құрыңдар. Оның үшін

1. f функция үшін жалпыланған желімдеу заңын қолданамыз:

$B_1 = x_1x_2 \vee \neg x_1x_3 \vee \neg x_2x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_3$.

2. B_1 үшін жұтылу заңын қолдаймыз , сонда кезектегі қ.д.қ.ф. ны құрастырамыз:

$B^к = B_2 = x_1\, x_2 \vee x_3$.

Квайн әдісі. Қысқартылған д.қ.ф. құру ушін:

1. $f(x_1x_2,\ldots,x_n)$ функция үшін кемел д.қ.ф. құрамыз.
2. Алынған к.д.қ.ф. ның әр бір жубымен алынған элементар конъюнкциялары үшін мумкін болғанша
   $xK \vee \neg xK = K \vee xK \vee \neg xK$ – желімдеу заңын қолданамыз.
3. Құрастырылған д.қ.ф. үшін
   $K \vee x^{\sigma} K = K$ – жұтылу заңын орындаймыз.
   Алынған д.қ.ф қысқартылған д.қ.ф. болады.

Мысал. Айталық $f(x_1,x_2,x_3)$ функция кезектегідей кемел д.қ.ф. ретінде берілген болсын:

$D = x_1x_2\, x_3 \vee \neg x_1\, x_2\, x_3 \vee x_1x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1\, x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1 \neg x_2 \neg x_3$.

1) Әр бір жұп э.к. үшін желімдеу заңын орындаймыз:

$D_1 = x_2\, x_3 \vee x_1x_2 \vee \neg x_1\, x_2 \vee x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1 \neg x_3$.

2)Желімдеу заңын екінші рет орындасақ кезектегі д.қ.ф.ға ие боламыз:

$D_2 = x_2 \vee \neg x_1 \neg x_2$.

Мұнда D_2 д.қ.ф. да жұтылу заңы қажет болмағандықтан

$D^к = x_2 \vee \neg x_1 \neg x_2$

болады.

Минимизациялау кестесі.

Айнымалылар саны көп болмаған функциялар үшін қысқартылған д.қ.ф. құру яғни жәй импликанталарды алу минимизациялау кестелері (оны Вейг диаграммасы немесе Карно карталары депте айтады) арқылы да орындалады. Бұл кесте әрбір $x_1,x_2,\ldots,x_n$ айнымалылардың барлық мүмкін болған 2^n комбинацияларына сәйкес 2^n уяшықтардан құрылған. Бұл , бағандары $x_1,x_2,\ldots,x_к$ айнымалылардың, жолдары $x_{к+1}$, $x_{к+2}$,..., x_n айнымалылардың сәйкес мәндерінен (жиналымдарынан) құралған, ал көрші уяшықтары текқана бір айнымалының мәніне айрықша болған ($2^{n-k} * 2^k$) өлшемді кесте болады. Кестенің уяшықтары функцияның жиналымдардағы ақиқат мәніне сәйкес бірлік сандарынан толтырылады. Мұнда толтырылмаған уяшықты нөль нүкте деп қабылдаймыз. Кестеден жәй импликанталарды құру үшін бірлік уяшықтарда тұратын максимал тікбұрыштарды айырып аламыз. Бұл жерде бағандар немесе жолдардың қарама –қарсы жатқан шеткі уяшықтары көрші уяшықтар ретінде қарастырылады. Мұнда түйісетін координаталар (σ_1, σ_2 ,..., σ_{n-k}) жиналымды құрайды және ізделінген импликанта $x_{i1}^{\sigma 1}x_{i2}^{\sigma 2}\ldots x_{in-k}^{\sigma n-k}$ көріністе жазылады.

Мысал: Бульдік f(x,y,z) функцияның f(0,0,0) = f(1,1,0) = f(1,1,1) = f(1,0,1) = 0 ; f(0,1,0) = f(1,0,0) = f(0,0,1) = f(0,1,1) = 1 мәндеріне сәйкес минимизациялау кестесі кезектегі кестеде бейнеленген. 4- кестеге сәйкес жәй импликанталар $\neg x_1 x_2$, $x_1 \neg x_2 \neg x_3$, $\neg x_1 x_3$ болады.

4-кесте

	00	01	11	10
0		1		1
1	1	1		

Квайн матрицасы.

Қысқартылған д.қ.ф.дан минимал д.қ.ф. құру Квайн матрицасы арқылы орындалады. Оның үшін нүктенің бағандар басына кемел д.қ.ф. нің бірлік конституенталары (конъюнкциялары) жазылады, ал жол басына қысқартылған д.қ.ф. дан алынған жәй импликанталар жазылады. Егер жол басындағы э.к. баған басындағы бірлік конституентаның құрамында болса, онда осы жол және баған қиылысындағы уяшыққа жұлдызша (*) белгісін қоямыз.

Бұл жерде дизъюнкциясы барлық бірлік конституенталарды сақтайтын аз санды жәй импликанталардан құралған тұйықты д.қ.ф.лар таңдалады. Олар бір неше болуы табиғи. Сондықтан минимал д.қ.ф. ретінде олар арасынан айнымалылар ең кем енген түйықты д.қ.ф. алынады.

Мысал: Айталық f(x,y,z) = ¬x¬y¬z v ¬x¬yz v x¬yz v xyz кемел д.қ.ф. берілген болсын . Онда алдын қарастырылған әдістердің кез келгенін қолдап f(x,y,z) = ¬x¬y v ¬yz v xz қысқартылған д.қ.ф. алыумыз мүмкін. Осылар негізінде төмендегідей құрылған Квайн матрицасынан f(x,y,z) = ¬x ¬y v xz минимал д.қ.ф. табамыз(5-кесте).

5-кесте

Имплакантт-ар	Бірлік конституенталар			
	¬x ¬y ¬z	¬x ¬ y z	x ¬y z	x y z
¬x ¬y	*	*		
¬y ¬z		*	*	
x z			*	*

.

2. Геометриялық бейне негізіндегі тұйықтылық.

12-анықтама. Егер максимал жақтардан құралған N_f жиыннан кез келген біреуін жою арқылы алынған жиын N_f тің қапталуы болмаса, онда ол келтірілмейтін қапталу жиыны деп айтылады.

13-анықтама. Келтірілмейтін қапталу жиыны N_f ке сәйкес келетін д.қ.ф. тұйықты (геометриялық мағынада) деп айтылады.

Мысал. 8-кесте арқылы берілген $f(x_1,x_2,x_3)$ функция үшін

$N_f = N_{\neg x2\neg x3} \cup N_{\neg x1x3} \cup N_{x1x2}$

келтірілмейтін қапталу жиыны болады, ал оған сәйкес

$\eta= \neg x_2\neg x_3 v \neg x_1x_3 v x_1x_2$ - тұйықты д.қ.ф.

Тұжырым. Геометриялық мағынадағы және I,II ауыстырулар негізінде алынған тұйықты д.қ.ф.лар ұғымы эквивалент.

Осы кезеңге дейін анықталған тұйықты, қысқартылған және минимал д.қ.ф.лар мынадай қатынаста болатындығын байқаймыз:

а) тұйықты д.қ.ф. қысқартылған д.қ.ф.дан кейбір мүшелерді жою жолымен алынады;

б) минимал д.қ.ф. ($L_ә$ ға салыстырмалы) тұйықты д.қ.ф. болады;

в) тұйықты д.қ.ф.лар ішінен минимал д.қ.ф. табылады.

Тұйықты д.қ.ф. құру әдісі : N_f жиынның қапталуы оның барлық $Nk_1^0,\ldots,Nk_m^0$ –максимал интервалдар жүйесінен құралатындығын білеміз.

Айталық $N_f =\{P_1,\ldots,P_\lambda\}$және P_o берілген болсын, бұл жерде $P_o \notin N_f$-кез келген нүкте және $f \neq 1$ деп есептейміз. Осыған байланысты ретінде мынадай тәсілге сәйкес кесте құрастырамыз (6-кесте):

$$\sigma_{ij}=\begin{cases} 0, \text{ егер } P_j \notin Nk_i^0; \\ 1, \text{ егер } P_j \in Nk_i^0, \end{cases}$$

бұл жерде $i=1,2,\ldots,m$; $j=0,1,\ldots,\lambda$.

6-кесте

	P_o	P_1	…	P_j	…	P_λ
Nk_1^0	σ_{10}	σ_{11}	…	σ_{1j}	…	$\sigma_{1\lambda}$
…	…	…	…	…	…	…
Nk_i^0	σ_{i0}	σ_{i1}	…	σ_{ij}	…	$\sigma_{i\lambda}$
…	…	…	…	…	…	…
Nk_m^0	σ_{m0}	σ_{m1}	…	σ_{mj}	…	$\sigma_{m\lambda}$

Бұл жерде $P_o\notin N_f$ болғандықтан бірінші баған нольдік , ал басқа бағандарда кемінде бір элемент бірге тең болады. Сондықтан бірінші баған басқа барлық бағандардан ерекше .

Әр бір j ($0\leq j \leq \lambda$) үшін P_j баған 1 ге тең болған барлық жол нөмірлерінен құралған E_j жиынды табамыз.

Айталық $E_j=\{e_{j1}v,\ldots,ve_{j\mu(j)}\}$ болсын. Осыған сәйкес кезектегідей өрнек құрастырамыз:

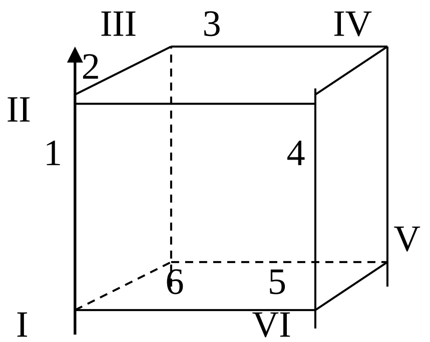
$$\mathop{\&}_{j=1}^{n} (e_{i1} v \ldots v\ e_{j\mu(j)})$$

және е ні бульдік айнымалылар ретінде қарастырып &V → V& түрлендірулер орындаймыз. Алынған логикалық өрнекте нөльдік, қайталанатын және ауысу мүмкін болған мүшелер үшін

$$A*\neg A= 0,\ A*A=A,\ AvA= A,\ A \text{ v } A= A$$

теңдіктерді қолданып қысқарту амалдарын орындаймыз. Табылған формула немесе функция келтірілмейтін қапталуды сипаттайды.

Мысал. 8-кестеде бейнеленген $f(x_1,x_2,x_3)$ функцияны қарастырамыз. Ол функция үшін N_f жиын 6 төбеден құралған. Оларды I,II,…,VI сандары арқылы нөмірлейміз. N_f жиын үшін максимал интервалдар араб сандары арқылы нөмірленген қабырғалар болады (2-сызба). Осы максимал интервалдар негізінде кесте құрастырамыз (7-кесте).



2-сызба

7-кесте

	0	I	II	III	IV	V	VI
1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0	0	0
3	0	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	0	1	1
6	0	1	0	0	0	0	1

Сондықтан, 7-кестеге сәйкес

$E_I=\{1,6\}$, $E_{II}=\{1,2\}$, $E_{III}=\{2,3\}$,

$E_{IV}=\{3,4\}$, $E_V=\{4,5\}$, $E_{VI}=\{5,6\}$.

Тағыда

V&=(1v6)(1v2)(2v3)(3v4)(4v5)(5v6)=(1v2*6)(3v2*4)(5v4*6)=(1v2*6)(3v2*4)(5v4*6)(5v4*6)=(1*3v2*3*6v1*2*4v2*4*6)(5v4*6)= =1*3*5v2*3*5*6v1*2*4*5v2*4*5*6v1*3*4*6v2*3*4*6v1*2*4*6v2*4*6==1*3*5v2*3*5*6v1*2*4*5v1*3*4*6v2*4*6.

Осы өрнектен бес келтірілмейтін қапталу немесе бес тұйықты д.қ.ф. аламыз:

$\eta_1=\neg x_1\neg x_2 \text{ v } x_2x_3 \text{ v } x_1\neg x_3$;

$\eta_2=\neg x_1x_3 \text{ v } x_2x_3 \text{ v } x_1\neg x_3 \text{ v } \neg x_2\neg x_3$,

$\eta_3=\neg x_1\neg x_2 \text{ v } \neg x_1x_3 \text{ v } x_1x_2 \text{ v } x_1\neg x_3$,

$\eta_4=\neg x_1\neg x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \neg x_2\neg x_3$,

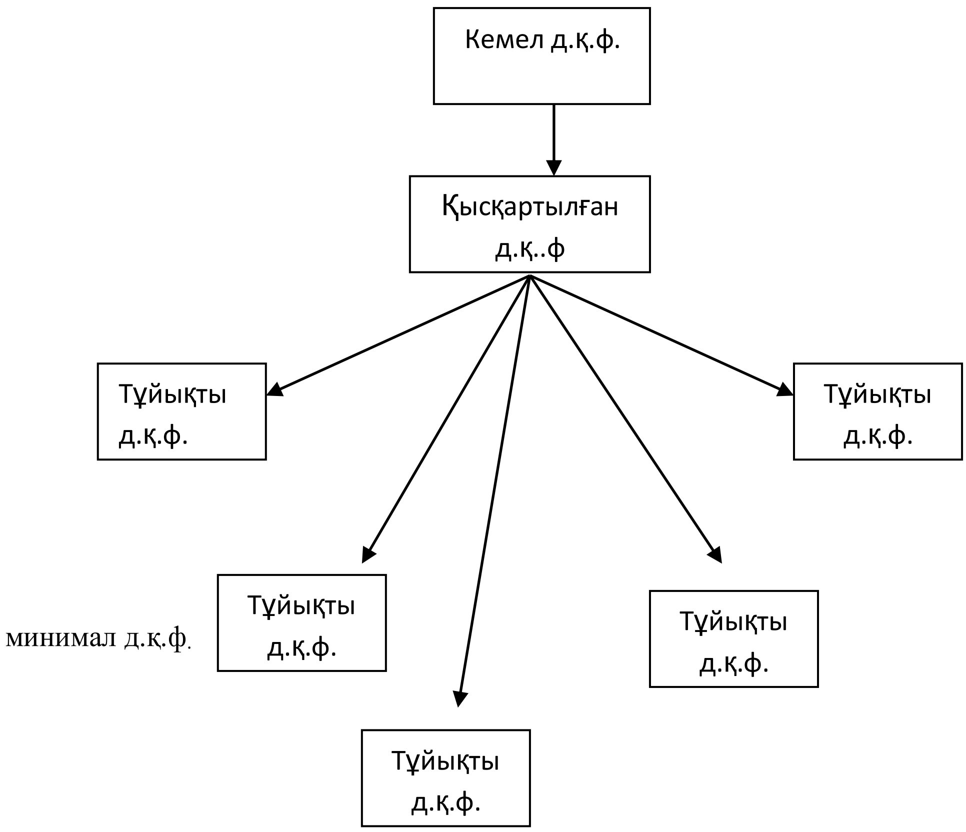
$\eta_5=\neg x_1x_3 \vee x_1x_2 \vee \neg x_2\neg x_3$.

Олардың ішінен η_1 және η_5 минимал д.қ.ф. болады.

3. Минимал д.қ.ф. құруға негізделген ізденулер.

Қысқартылған д.қ.ф. арқылы минимал д.қ.ф. құру кезеңі 3-сызбада бейнеленген.

Бұл процестің өте қиын бөлігі болып түйықты д.қ.ф.лар құру болып есептеледі. Біракта оны екі жағдай есебінен қысқарту мүмкін.



3-сызба

а) Қысқартылған д.қ.ф. мүшелерінің тұйықты д.қ.ф. құруда қатыспайтын бір бөлігін алдын ала қашықтату және сонымен біртіндеп қарастыруды азайту;

б) Ең болмағанда кемінде бір минимал д.қ.ф. құру мүмкін болатындай қысқартылған д.қ.ф. мүшелерін қашықтату.

Мұнда бұл амалдар бірмәнділік заңында орындалуы тиіс.

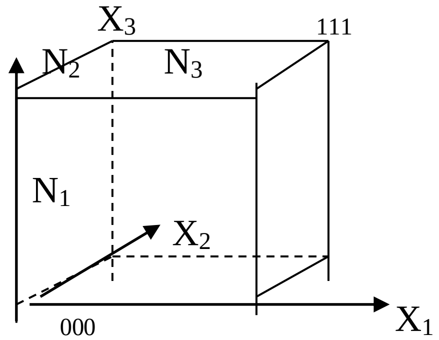
14-анықтама. Егер $N_k \subset N_f$, $\alpha^* \in N_k$ (бұл жерде N_k-максимал жақ) және N_k да ешқандай басқа максимал жақтарға тиісті болмаған α^* нүкте табылса, онда N_k жақ N_f жиынның түйінді (ядролы) максимал жағы деп айтылады.

Мысал. 8-кесте арқылы берілген $f(x_1, x_2, x_3)$ функцияны қарастырамыз. 4-сызбада N_f жиын және оған сәйкес максимал жақтар ретінде N_1, N_2, N_3 қабырғалар бейнеленген.

Бұл жерде N_1 және N_3 жақтар түйінді болады, себебі (0,0,0) нүкте текқана N_1, ал (1,1,1) нүкте текқана N_3 арқылы қапталынған.

8-кесте

$x_1x_2x_3$	$f(x_1x_2x_3)$	$x_1x_2x_3$	$f(x_1x_2x_3)$
000	1	100	0
001	1	101	1
010	0	110	0
011	0	111	1



4-сызба

15-анықтама. Барлық түйінді жақтар жиыны N_f жиын үшін түйін деп айтылады.

16-анықтама. Түйін арқылы қапталатын максимал жақтарға сәйкес барлық жәй импликанталарды тастау жолымен кемел д.қ.ф. дан алынған д.қ.ф. Квайн д.қ.ф.сы деп айтылады және $\eta_{кв}$ ретінде жазылады.

Теорема. (Квайн [4]). Кез келген $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция үшін ($f \neq 0$) тек жалғыз Квайн д.қ.ф.сы бар.

Мысал. 8-кесте арқылы берілген функция үшін

$$\eta_к = \neg x_1 \neg x_2 \vee \neg x_2 x_3 \vee x_1 x_3$$

қысқартылған д.қ.ф.ға иеміз.

Бұл жерде $\neg x_2 x_3$ жәй импликантаға сәйкес келетін N_2 жақты $\{N_1,N_3\}$ түйін қаптайды. Сондықтан Квайн д.қ.ф.сы мынадай болады:

$\eta_{кв}=\neg x_1 \neg x_2 \vee x_1 x_3$

Сөйтіп, қысқартылған д.қ.ф.дан кейбір импликанталарды тастау жолымен сол функцияны іске асыратын және оның барлық тұйықты д.қ.ф.ын өзінде сақтайтын Квайн д.қ.ф.на өту мүмкін екен.

Енді минимизациялау процесіне байланысты болған ΣТ бейнедегі д.қ.ф. ны қарастырамыз.

17-анықтама. Ең кемінде бір келтірілмейтін қапталуға кіретін N_f қапталу жиынына сәйкес барлық максимал жақтар жиынтығы ΣТ бейнедегі д.қ.ф. деп айтылады және $\eta_{\Sigma T}$ ретінде жазылады.

Бұл жерде $\eta_{\Sigma T}$ д.қ.ф. f функцияның барлық тұйықты д.қ.ф.ларының логикалық қосындысынан (яғни дизъюнкциясынан) алынатындығын көру қиын емес.

Анықтамадан әр бір $f(x_1,\ldots,x_n)$ функция үшін оны іске асыратын тек бірғана ΣТ бейнесіндегі д.қ.ф. бар екендігі келіп шығады.Ол қысқартылған д.қ.ф.дан кейбір мүшелерді қашықтату арқылы алынады.

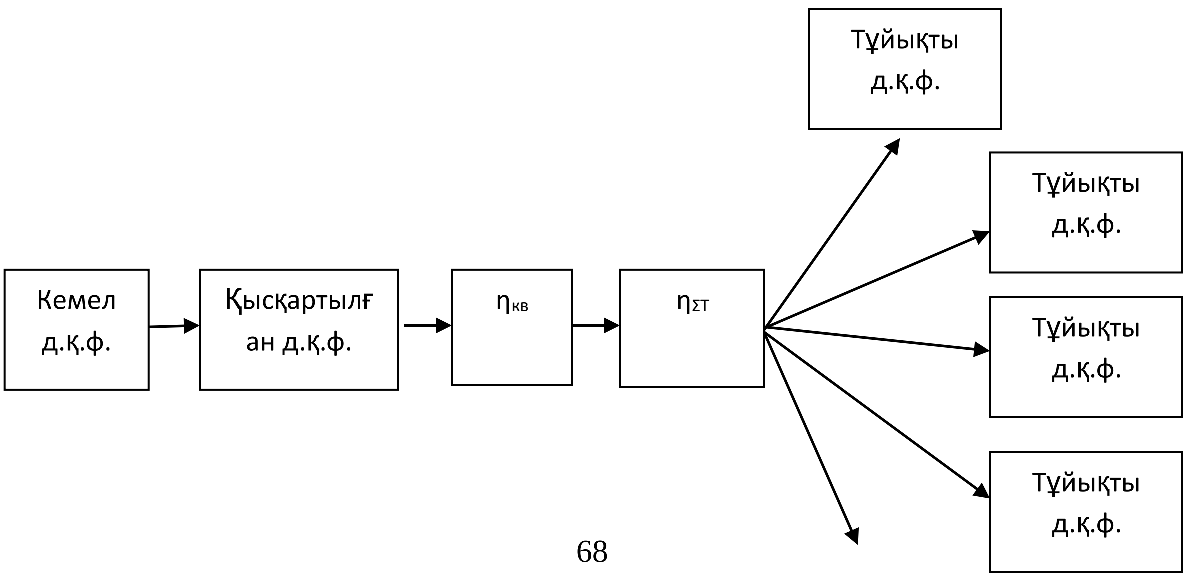
18-анықтама. Айталық $\acute{\alpha} \in N_f$. Онда ά нүктені өз ішіне алған барлық максимал жақтар жиынтығын $(\Pi_{\acute{\alpha}})$ ά арқылы өтетін шоғыр деп айтамыз.

19-анықтама. Айталық $\acute{\alpha} \in N_f$ және N_k^0 – $\acute{\alpha} \in N_k^0$ болған кез келген максимал жақ болсын. Егер $\beta \in N_f \setminus N_k^0$ және $\Pi_\beta \subseteq \Pi_{\acute{\alpha}}$ болған нүкте табылса, онда ά нүкте реттелген нүкте деп айтылады.

20-анықтама. Егер N_f үшін $N_к^0$ максимал жақтың әр бір нүктесі реттелген болса , онда оны реттелген жақ деп айтамыз.

Теорема. (Ю.И.Журавлев[4]). $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функцияның K^0 жәй импликантасы $\eta_{\Sigma T}$ бейнедегі д.қ.ф.ға тиісті болмау үшін сәйкес N_k^0 максимал жақтың реттелген болуы қажет және жеткілікті.

Бұл теорема ΣТ бейнедегі д.қ.ф. құру алгоритімін тұжырымдауға негіз береді: Оның үшін қысқартылған д.қ.ф. ішінен реттелген жақтарға сәйкес болған барлық конъюнкцияларды қашықтатү қажет.



5-сызба

Мысал. 8-кестедегі $f(x_1,x_2,x_3)$ функция үшін жалғыз реттелген N_2 жақ бар. Оны жою арқылы $\eta_{\Sigma T}$ д.қ.ф.ны сипаттайтын $N_1 \cup N_3$ қапталуды аламыз. Ол берілген функцияның жалғыз тұйықты д.қ.ф.ы болады.

Енді Квайн және ΣT бейнедегі д.қ.ф. лардың арақатынас мәселесін қарастырамыз.

Теорема. $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функцияның $\eta_{\Sigma T}$ д.қ.ф.сы $\eta_{кв}$ д.қ.ф.сынан кейбір жай импликанталарды қашықтату жолымен алынады.

Сонымен, енді минимизациялау процесін мынадай схема арқылы (5-сызба) сипаттауымыз мүмкін. Бұл жерде таралу процесі $\eta_{\Sigma T}$ д.қ.ф. құрылуынан соң басталады. Минимизация кезеңінің бірмәнді таралуы әрине, әрі қарай тағыда жалғасуы мүмкін. Ол жалғастыруды оқырманның өзіне қалдырамыз.

9-лекция
Функционал элементтер сұлбасы

1. **Функционал элементтер сұлбасының құрылымдық сипаттамасы.**
2. **Функционал элементтер сұлбасының функционалдық анықтамасы.**
3. **Функционал элементтер сұлбасының синтез мәселесі.**

Логикалық алгебраның әдістерін ЭЕМ дерде қолдану әртүрлі облыстарда: биологияда, медицинада, әскери қызметтерде, автоматтарды басқаруда, тәжірибелерді жоспарлауда және т.б. көптеген маңызды шамалар арасындағы сандық қатынастарда ғана емес, қарастырылып отырған процестерді сипаттауда және олардың логикалық тәуелділігін байланыстыруда да өте маңызды қызмет атқарады , жалпы барлық жерде тиімді қолданылады .

Логикалық алгебраның әдістерін қолдану, ЭЕМ-ді қолдануға негізделген түрлі практикалық мәселелерді шешуге өте үлкен пайдасын тигізеді [1,2,3,4,5,7].

Логикалық алгебраның жаңа ғылыми облыстарындағы қосымша бағыты болып келетін және соңғы кездері өте оптимал жолдармен функционал элементтер схемалары арқылы алынған логикалық теңдеулер жүйесінің шешіміне алып келетін нысандар жиынымен және құбылыстарды танып-білу проблемалары , медициналық немесе техникалық диагностикалары , қазіргі кездегі автоматтардың құрылуы, тестік мәселелерді тексеру , дискреттік құрылымдардағы қателіктерді табу және жөндеуді және т.б. салалар болып табылады.

Мысалы, функционал элементтерден құралған логикалық жүйелерді зерттеуде меншікті зерттеу алгоритмдерін құру үшін діскретті анализ және ондағы күрделіктерді есептеуге негізделген логикалық әдістер қолданылады.

Жалпы жағдайда функционал элементтер сұлбасының(ФЭС) логикалық әдісін қолдану айнымалылары логикалық белгі болып табылатын электрон эсептеу техникасының қәтеліктерін табумен оларды өңдеу осы саланың негізгі бағыты болып табылады. Мүндай ФЭС на байланысты бульдік теңдеулер жүйесінің шешімін құру аса күрделі мәселе .

Осы уақытқа дейін мұндай мәселені шешетін жалғыз ғана универсал, бірақ амалда қолданылмайтын әдіс, бұл біртіндеп көбейту арқылы жүйені бір ғана эквивалентті теңдеуге келтіру болып табылады.

Егер барлық теңдеулердің сол жақтары дизъюнктив нормаль форма (д.н.ф) түрінде берілген болса, онда үлкен сандағы элементар конъюнкциялардың (э.к) бір-біріне көбейту арқылы тізбектің жиынтығын дизъюнктив нормаль формада (д.н.ф) алу мәселесі аса көп есепті қажет етеді. Бұл мәселе шешімінің күрделілігін анықтайтын маңызды факторлар бульдік функцияларды көрсету формасы , пікірлердің (теңдеулердің) тәуелділігін және қайшылығын анықтау , сонымен бірге ішкі жүйенің максимал үйлесімділігін құру болып табылады.

Қазіргі техникалық басқару және есептеу құрылымдарында «кіріс» және «шығыс» параметрлеріне ие болған дискреттік өзгерткіш (ауыстыру)тер өте маңызды орын иелейді (1-сызба).

1-сызба

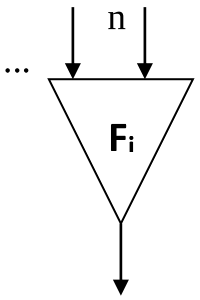
Есептеу және басқару құрылымының кіріс нүктелеріне түсіп жатқан және шығыс нүтелерінде пайда болып жатқан дабылдар(сигналдар) жиналымы белгілі бір шекті жиынға тиісті болады. Бұл құрылым “кіріс” жиналымдар дабылдарын “шығыс” жиналымдар дабылдарына ауыстырады. Бұндай құрылымдардың математикалық моделі болып функционал элементтер сұлбасы(ф.э.с.) есептеледі.

Функционал элементтер с9лбасы ұғымының анықтамасын екі кезеңге бөлу мүмкін. Бірінші кезеңде оның құрылымдық бөлігі, екінші кезеңде функционал бөлігін қарастырамыз.

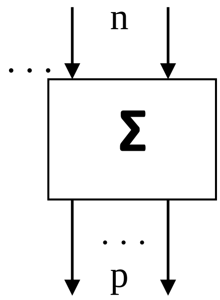
1. Функционал элементтер сұлбасының құрылымдық сипаттамасы

Функционал элементтер сұлбасы (ф.э.с.) құрылым мағынасында төмендегі пункттерге бөлінеді:

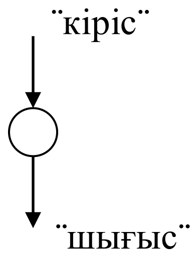
1^0. “Элементтер” деп аталатын $F_i(i=1,\ldots,r)$ нысандардың F шекті жиыны болсын. Әр бір F_i элемент n_i “кіріс” және бір (1) “шығыс” параметріне ие. F_i элементтің графикалық бейнесі төмендегідей сипатталады (2-сызба).



2-сызба



3-сызба



4-сызба

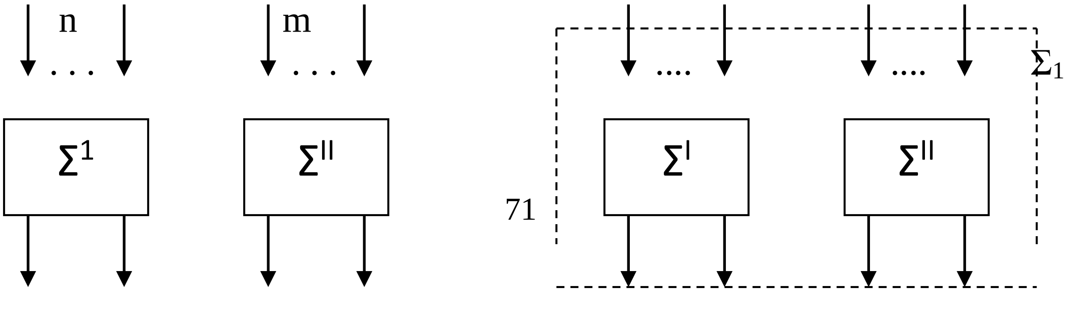
2^0. Логикалық желі анықтамасы.

1-анықтама. Логикалық желі деп n “кіріс” және p “шығыс” параметрлеріне ие болған құрылым айтылады (3-сызба) және ол Σ арқылы белгіленеді.

а) Индукция базисі: Жеке алынған бір “кіріс” және бір “шығыс” төбесі тривиал логикалық желі деп айтылады (4-сызба).

б) Индуктив өту: Бұл бөлім үш амалды қолдануға негізделген:

1) Қиылыспайтын желілерді біріктіру амалы.Айталық Σ' және Σ'' екі қиылыспайтын желілер n, m “кіріс” және оларға сәйкес p,q “шығыс” параметрлеріне ие болсын(бұл жерде “кіріс” және “шығыс” элементтері қайталанбайды) (5-сызба).



'

. . .   .

p   q

5-сызба   6-сызба

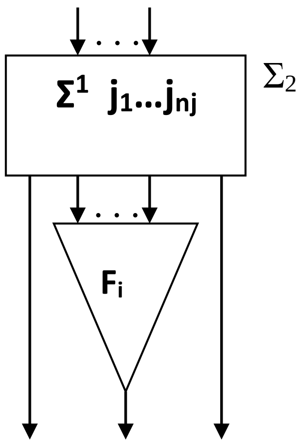
Екі қиылыспайтын Σ' және Σ'' логикалық желілердің теориялық бірігуі бұл жерде барлық “кіріс” және “шығыс” нүктелері Σ' және Σ'' желілердің кіріс-шығыс параметрлері болған Σ_1 желі болып есептеледі (6-сызба) және n+m “кіріс”, p+q “шығыс” нүктелеріне ие.

2) F_i элементтің қосылу амалы.

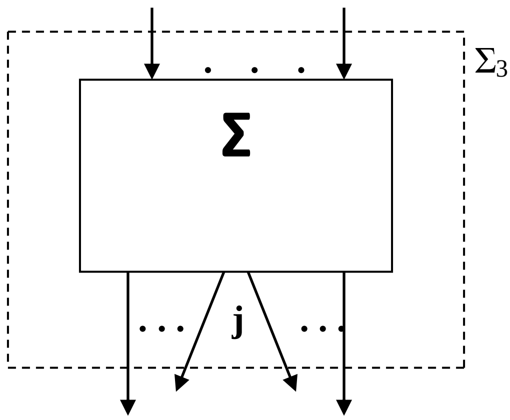
Айталық логикалық желі Σ' және F_i элементтер үшін:

а) $n_i \leq p$;

б) Σ' желіде n_i әр түрлі $j_1, j_2, \ldots, j_{ni}$ нөмерлерге сәйкес шығыс параметрлерінен таңдалған болсын (7-сызба).



7-сызба



8-сызба

Онда Σ_2 желі Σ' логикалық желіге F_i элементтің қосылу нәтижесінен құралған логикалық желі болады. Σ_2 желінің “кіріс” параметрлеріне Σ' желінің барлық кіріс параметрлері, ал “шығыс” нүктелері Σ' желінің $j_1, \ldots, j_{nj}$ нөмерлерінен басқа барлық “шығыс” параметрлерімен, F_i элементтің “шығыс” параметрлеріне сәйкес келеді.

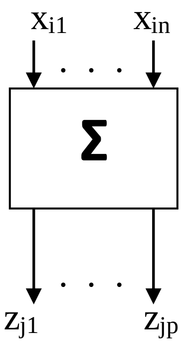
Сондықтан, Σ_2 логикалық желі n “кіріс” және $p\text{-}n_i+1$ “шығыс” нүктелеріне ие болады.

3) Шығыс параметрлерінің таралу амалы: Айталық Σ' логикалық желіде j нөмерлі “шығыс” параметрі жекелеп алынған болсын. Онда Σ_3 желі j “шығыс” параметрін тарату жолымен алынған логикалық желі деп айтылады (8-сызба).

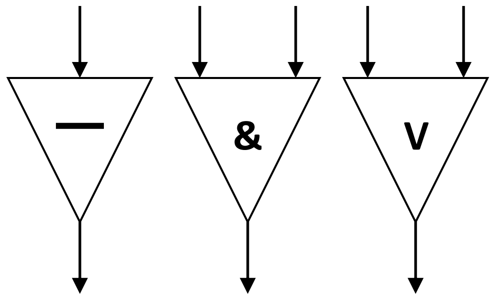
Σ_3 желінің “кіріс” нүктелері Σ' тың барлық “кіріс” параметрлері, ал “шығыс” нүктелері Σ' тың 1,...,j-1, j+1,…,p нөмірлерінен және j нөмірден шығып құралған екі “шығыс” параметрлері болады. Сондықтан, Σ_3 желіде n “кіріс” және p+1 “шығыс” нүктелері бар.

3^0. Айталық $X=\{x_i\}$ $(i=1,2,\ \dots,\ n)$ және $z=\{z_j\}$ $(j=1,2,\ \dots,\ p)$ айнымалылар алфавиті берілген болсын, бұл жерде n “кіріс” және p “шығыс” нүктелері болған Σ логикалық желіні қарастырамыз.

2-анықтама. Функционал элементтердің сұлбасы деп “кіріс” және “шығыс” нүктелеріне X, Z алфавиттері сәйкес келетін $x_{i1},\dots,x_{in}$ және $z_{ji},\dots,z_{jp}$ айнымалыларына қосылған логикалық желі айтылады (9-сызба).



9-сызба



10-сызба

Осындай жолмен алынған сұлбаны $\Sigma(x_{i1},\dots,x_{in};\ z_{j1},\dots,z_{jp})$ ретінде белгілейміз.

Егер ∑ желіде f функциясы іске асыратын “шығыс” нүктесі бар болса, онда f функция ∑ сұлба арқылы іске асырылады деп айтамыз. Мұнда “шығыс” немесе “кіріс” нүктелерінен басқа төбелердегі барлық функционал элементтер санын ф.э.с. ның күрделігі деп есептейміз.

3-анықтама . ∑ минимал желі деп айтылады, егер ол f функцияны іске асыратын басқа кез келген ф.э.с.ларынан ең кіші күрделікке ие болса.

4-анықтама . Ф.э.с. дағы ішкі төбелерді қосу үшін қолданатын функционал белгілер жиынын сұлбаның базисі деп айтылады. Бұдан былай $\{v,\&,\neg\}$ элементтерден құралған сұлбаны стандарт базистегі ф.э.с. деп айтуға келісеміз.

5-анықтама. D базистегі f бульдік функцияның минимал күрделігі осы базистегі f функцияны іске асыратын минимал Ф.Э.С. ның күрделігі деп айтылады. D базистегі ∑ желінің күрделігін $L_D(\sum)$ арқылы белгілейміз. Егер D стандарт базис болса, онда $L(\sum)$ ретінде жазамыз.

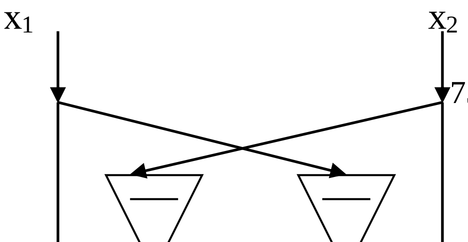
Ескерту: Бұдан былай Ф.Э.С. ны бейнелеу кезінде қолайлық үшін “кіріс” нүктелерін дөңгелекпен, “шығыс” нүктелерді қара дөңгелек арқылы белгілеуге келісеміз.

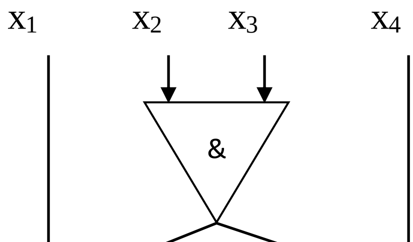
Мысал. а) Айталық F жиын үш элементтен құралған болсын (10-сызба).
Онда 11-сызбада көрсетілген Σ_1 желі 1-3 амалдар негізінде құралған екі кіріс және бір шығыс параметріне ие болған сұлба болады. Онда Σ_1 желі

$$z_1= x_1\,\&\neg x_2 \vee \neg x_1\,\&\, x_2 \quad \text{немесе} \quad z_1 = x_1 + x_2$$

функцияны іске асырады және ол $\Sigma_1(x_1,x_2;\ z_1)$ ретінде жазылады.

б) Σ_2 желі 4 кіріс және бір шығыс параметрлерге ие болған (12-сызба) сұлба болады. Σ_2 желі $z_2 = x_1\&x_4 \vee x_2\&x_3$ формуланы іске асырады және $\Sigma_2(x_1,x_2,\ x_3,x_4\ ;\ z_2)$ ретінде жазылады.





z_2

z_1

11-сызба 12-сызба

2. Функционал элементтер сұлбасының функционалдық анықтамасы.

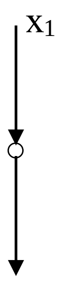
Айталық $\Sigma(x_1,x_2,\dots,x_n;\ z_1,z_2,\dots,z_p)$ функционал элементтер сұлбасы болсын. Оған берілген сұлбалардың өткізгіші деп аталатын төмендегі логикалық алгебраның теңдеулер жүйесіне сәйкес қоямыз:

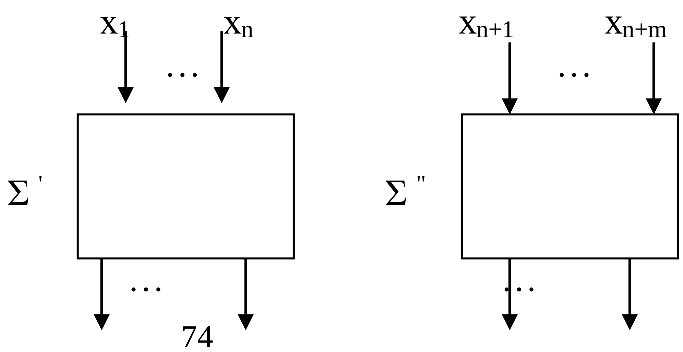
$$\begin{cases} z_1=f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ z_2=f_2(x_1,x_2,\dots,x_n) \qquad (1) \\ \text{---------------------} \\ z_p=f_p(x_1,x_2,\dots,x_n)\ . \end{cases}$$

Оның үшін F жиыннан алынған әр бір F_i элементке $f^0_i\ (y_1, y_2, \dots, y_{ni})$ бульдік функция арқылы берілген f^0_i логикалық оператор сәйкес қойылады. Одан әрі индукция бойынша сұлбаның өткізгіштігі анықталады.

а) Индукция базисі: Σ сұлба тривиал сұлба болады, егер теңдеу $z_1 = x_1$ және өткізгіш теңдік функциясы болса (13-сызба).

б) Индуктив өтү : Айталық Σ' және Σ'' желілері қиылыспайтын және кіріс-шығыс нуктелеріне түрлі айнымалылар сәйкес келетін болсын (14-сызба).





z_1 z_1 z_p z_{p+1} z_{p+g}

13-сызба 14- сызба

Айталық $\Sigma'(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_p)$, $\Sigma''(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}; z_{p+1}, \dots, z_{p+g})$ сұлбаларға

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ Z_p = f_p(x_1,\dots,x_n) \end{array}\right\} (2) \qquad \left.\begin{array}{l} z_{p+1} = f_{p+1}(x_{n+1},\dots,x_{n+m}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_{p+g} = f_{p+g}(x_{n+1},\dots,x_{n+m}) \end{array}\right\} (3)$$

логикалық теңдеулер жуйесі сәйкес келсін.

1) $\Sigma_1(x_1,\dots,x_{n+m}; z_1,\dots, z_{p+g})$ сұлбаға (2) және (3) теңдеулер жуйесінің бірігуінен құралған төмендегі теңдеулер жуйесін сәйкес қоямыз :

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = f'_1(x_1,\dots,x_n, x_{n+1},\dots,x_{n+m}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_p = f'_p(x_1,\dots,x_n, x_{n+1},\dots,x_{n+m}) \\ z_{p+1} = f'_{p+1}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+m}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{p+g} = f'_{p+g}(x_1,\dots,x_n, x_{n+1},\dots,x_{n+m}) \end{array}\right.$$

Бұл жерде $f'_1, \dots, f'_p$ функциялар $x_{n+1},\dots,x_{n+m}$ айнымалыларға , ал $f'_{p+1},\dots, f''_{p+g}$ функциялар $x_1,\dots,x_n$ айнымалыларға байланысты емес және $f'_1=f_1, \dots, f'_p=f_p$, $f'_{p+1}=f_{p+1}, \dots, f'_{p+g}=f_{p+g}$.

2). Айталық

$\Sigma_2(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots,z_{j1-1}, z_{j1+1}, \dots, z_{jni-1}, z_{jni+1}, \dots,z_p,z_{p+1})$

сұлба

$\Sigma'(x_1,\dots,x_n; z_1,\dots,z_p)$

сұлбадан $z_{j1},\dots,z_{jni}$ $(n_i \le p)$ ”шығыс “ параметрлеріне F_i элементті қосу және жаңадан алынған шығыс нуктесіне z_{p+1} айнымалы сәйкестендірілген болсын.

Осы сұлбаға логикалық теңдеулер жүйесін сәйкес қоямыз. Онда (*) жуйеден $j_1,\dots,j_{ni}$ жолдарды өшіріп $z_{p+1}=f^0_i(f_{j1}(x_1,\dots,x_n),\dots,f_{jni}(x_1,\dots,x_n))$ жолдарды қосу арқылы мынадай логикалық теңдеулар жуйесін аламыз:

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = f_1(x_1,\dots,z_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_{j1-1} = f_{j1-1}(x_1,\dots,x_n) \\ z_{j1+1} = f_{j1+1}(x_1,\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_{jni-1} = f_{jni-1}(x_1,\dots,x_n) \\ z_{jni+1} = f_{jni+1}(x_1,\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_p = f_p(x_1,\dots,x_n) \end{array}\right.$$

$$z_{p+1} = f^0_i(f_{j1}(x_1,\ldots,x_n),\ldots, f_{jn}(x_1,\ldots,x_n)).$$

3) . Айталық

$$\Sigma_3(x_1,\ldots,x_n; z_1,\ldots z_p,z_{p+1})$$

сұлба

$$\Sigma'(x_1,\ldots,x_n; z_1,\ldots,z_p)$$

сұлбадан j нөмірлі "шығыс" нүктесін екі " шығыс " нүктесіне тарату және алынған шығыс нүктелеріне z_j және z_{p+1} айнымалыларды сәйкес қою жолымен алынған болсын. Онда бұл сұлбаға төмендегі логикалық теңдеулер жүйесі сәйкес келеді:

$$\begin{cases} z_1 = f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{j-1} = f_{j-1}(x_1,\ldots, x_n) \\ z_j = f_j(x_1,\ldots, x_n) \\ z_{j+1} = f_{j+1}(x_1,\ldots,z_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_p = f_p(x_1,\ldots, x_n) \\ z_{p+1} =f_j(x_1,\ldots, x_n). \end{cases}$$

Сонымен , барлық функционал элементтер сұлбасына бульдік функциялар жуйесі бойынша анықталатын теңдеулер жуйесі сәйкес қойылды.

Теорема [4]. Берілген функционал элементтер базисінде кез келген

$$\begin{cases} z_1 = f_1(x_1,\ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_p = f_p(x_1,\ldots, x_n) \end{cases} \qquad (4)$$

бульдік теңдеулер жуйесіне сәйкес, осы жуйені іске асыратын $\Sigma(x_1,\ldots,x_n ; z_1,\ldots, z_p)$ сұлба бар болуы үшін f^0_i функциялар жуйесі толық болуы қажет және жеткілікті .

3. Функционал элементтер сұлбасының синтез мәселесі

Айталық функционал элементтердің F базисі және кез келген

$$\begin{cases} z_1 = f_1(x_1,\ldots, x_n) \\ z_2 = f_2 (x_1,\ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_p =f_p (x_1,\ldots, x_n) \end{cases} \qquad (5)$$

бульдік теңдеулер жуйесі берілген болсын.

Осы теңдеулер жуйесін іске асыратын берілген функционал элементтерден алынған $\Sigma(x_1,\ldots,x_n; z_1, \ldots, z_p)$ сұлбаны құру талап етіледі.

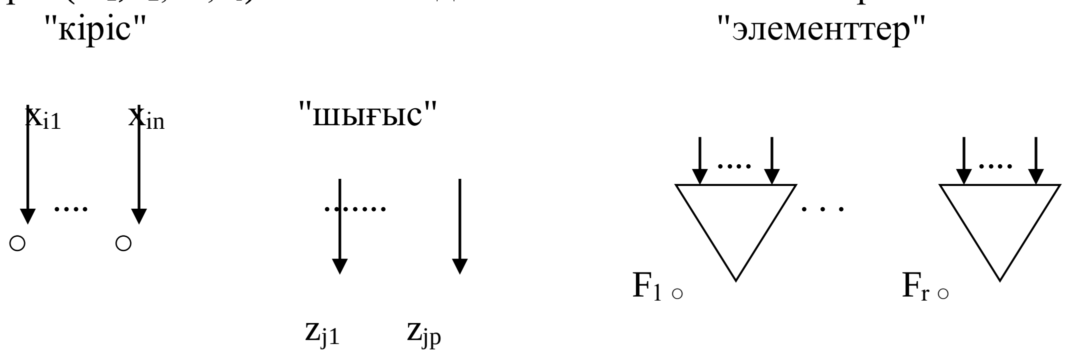
Алдынғы тақырыптарымызда , егер f^0_i функциялар жүйесі толық болса синтез мәселесінің шешімі бар екендігін көрген едік. Сонымен, бульдік функциялардың формулалар арқылы іске асырылуы көп шешімдерге ие болғаны үшін, берілген теңдеулер жүйесін іске асыратын көптеген функционал элементтер сұлбасын құру мүмкін.

Сондықтан синтез мәселесі белгілі бір мағынада тиімді(оптимал) шешімді таңдау қажеттілігін талап етеді. Ол мәселе төмендегідей іске асырылуы мумкін.

Айталық , η кластағы барлық Σ сұлбалар үшін анықталған және сұлбадағы елементтер санын белгілейтін $L(\Sigma)$ функционалды қарастырамыз. $L(\Sigma)$ саны сұлбаның ″курделігі″ деп айтылады. Сонымен барлық уақыт осы сұлбалардың минималдығы талап етіледі. Осындай Σ сұлбалар <u>минимал</u> сұлба деп айтылады. Сондықтан функционал элементтер сұлбасының синтез мәселесі минимал сұлбалар құру мәселесіне келеді.

Енді минимал сұлбаларды құру ушін қажетті болған алгоритмдер тізімін қарастырамыз.

Айталық, n " кіріс" – (x_{i1}, x_{i2},…, x_{in}) , p "шығыс" – (z_{j1},z_{j2},…,z_{jp}) және r элементтер – (F_1,F_2,…,F_r) 15- сызбада бейнеленген сипатта берілген болсын.



15 – сызба

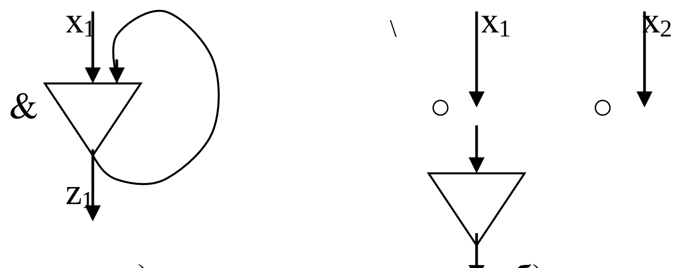
6-анықтама. Берілген "кіріс" ,"шығыс" және "элементтер"ден құралған және мынадай қасиеттерге ие болған :

а) әрбір "кіріс" элементі не "кіріс"ке , не "шығыс" элементіне жалғасқан ;

б) әрбір "шығыс" элементі не "кіріс"ке, не "шығыс" элементіне жалғасқан геометриялық бейне S бірікпе деп айтылады.

Ескерту. Функционал элементтерден алынған $\Sigma(x_{i1},\ldots,x_{in};z_{j1},\ldots,z_{jp})$ сұлба бірікпе болады.

Сонымен , функционал элементтер сұлбасы болмайтын бірікпелерде бар (16-сызба).



а) б)

16-сызба

Лемма. Берілген $x_{i1}, x_{i2},\ldots, x_{in}$ "кіріс" , $z_{j1},\ldots,z_{jp}$ "шығыс" және h функционал элементтерден құралған $S^*(n,p,h)$ бірігулер саны $H^h{}_r(n+h)^{h\gamma+p}$ ден аспайды, мұнда γ= max n_i ($1\le n_i\le r$).

Салдар. Берілген $x_{i1},\ldots,x_{in}$ "кіріс", $z_{j1},\ldots,z_{jp}$ "шығыс" және h функционал элементтерге ие болған S(n,p,h) сұлбалар саны

$$S(n,p,h) \le S^*(n,p,h) \le r^h(n+h)^{h\gamma+p}$$

теңсіздікті қанағаттандырады.

I. Екі бірікпені бірлестіру амалы.

Бұл амал "кіріс","шығыс" және "элементері" ортақ болмаған S′ және S" бірікпелерге қолданылады. Нәтиже екі бірікпенің барлық елементтері және барлық байланыстарын бейнелейді. Оның "кіріс" нуктелері S' және S" тің "кіріс" нуктелері, "шығыс" нуктелері S' және S" тың "шығыс" нуктелері болады.

II.Элементті қосу амалы.

Бұл жерде р "шығыс" параметрлерге ие болған S' бірікпе және $n_i\le p$ болған F_i элемент аламыз. S' бірікпеде n_i "шығыс" нүктелер таңдап алынады және F_i элементтерге қосылады.

II. "Шығыс" параметрлерін тарату амалы.

S' бірікпеде кез келген z_{jt} "шығыс" параметрі таңдап алынады. Ол бірікпенің не "шығыс" , не "кіріс" нуктесіне қосылған. Жаңадан z "шығыс" нүкте аламыз және оны алдын таңдалған z_{jt} төбеге қосамыз.

Лемма. I,II және III амалдардың бірікпелерге қолдану нәтижесі бірікпе болады.

Лемма. Тривиал сұлбадан айрықша болған бірікпе кемінде төмендегі шарттардан біреуі орындалғанда, тек сондағана сұлба болады :

1) S бірікпе сұлба болған S' және S" сұлба –бірікпелердің бірігуінен алынған болса;
2) S бірікпе S' сұлбаға F_i елементті қосу жолымен алынған болса;
3) S бірікпе S' сұлбаның "шығыс" елементіні тарату жолымен алынған болса.

Теорема. Әрбір бульдік теңдеулер жуйесі үшін минимал Σ сұлба құру алгоритмі бар.

Минимал сұлбаларды құрудың көптеген алгоритмдері барлық сұлбаларды қарастыру негізінде құрылғаны үшін олар "варианттарды біртіндеп қарастыру" түріндегі алгоритмдар класына жатады. Осындай алгоритмдер практикалық мақсаттарда қолдану және объекттердің мүмкіншілік қәсиеттерін қарастыруда тиімді нәтижелер бермейді. Сондықтан ізденілген Σ сұлба құрастырудың тиімді әдістерін оқырман өте жай қабылдауы үшін бір "шығыс" параметрге ие болған және осыған сәйкес бір теңдеуден туратын

$$z = f (x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$$

өте жай бульдік теңдеулер жүйесін қарастырамыз.

Минимал сұлбаның күрделігін L(f) арқылы белгілейміз. Тағыда жеке функциялардың сұлбалар синтезімен қоса n айнымалыға байланысты $P^{(n)}$ барлық функциялар класында синтез мәселесін қарастырамыз.

Айталық

$$L(n) = \max_{f \in P^{(n)}} L(f) \quad , \quad L_A(n) = \max_{f \in P^{(n)}} L_A(f)$$

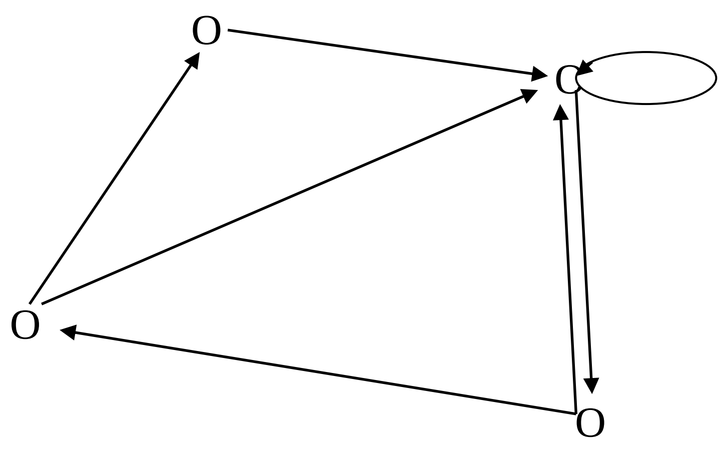
мунда $L_A(f)$ – A алгоритм арқылы f функцияны іске асыратын сұлбаның минимал курделігі. $L(n)$, $L_A(n)$ функциялар Шеннон функциялары деп айтылады. Олар берілген функцияларды іске асыратын минимал сұлбалардың $P^{(n)}$ класындағы күрделігін бейнелейді. Әрине , минималдық берілген алгоритмнің сұлбалармен салыстыру ретінде қарастырылады және $L_A(n) \geq L(n)$ болуы талап етіледі. Синтез проблемасы L(n) ге мумкін болғанша жуық болған $L_A(n)$ (мәселен $L_A(n) \approx L(n)$) күрделіктегі A алгоритмді табу болып есептеледі . Сонымен тағыда A алгоритмнің қиындығы "біртіндеп қарастыру" алгоритмінен әлдеқайда оңай болуы тиіс және $L_A(f)$ күрделікті бейнелейтін A алгоритмге сәйкес сұлба L(n) нің күрделігінен өте көп айрықшылыққа ие болмауы қажет.

10-лекция
Графтар теориясы

1.Графтарда негізгі ұғымдар және анықтамалар.
2. Графтарда изоморфизм және гомеоморфизм.
3. Графтарда маршруттар және жолдар.
4. Графтарда маршруттарды іздеу.

1. Негізгі ұғымдар және анықтамалар.

Көптеген қолданбалы мәселелерде түрлі нысандар арасындағы байланыстар жүйесі қаралады. Нысандар <u>төбелер</u> ретінде қарастырылады және нүктелер арқылы белгіленеді, ал төбелер арасындағы байланыс сызықтармен қосылып нүктелер арасындағы сәйкес көрсеткіштермен белгіленеді(1-сызба). Осындай жүйелер графтарды құрайды. Граф қаладағы жолдар желісін бейнелеуі мүмкін: мұнда граф төбелері–қиылыстар, ал доғалары – біржақты немесе екі жақты бағытталған көшелерді сипаттайды.



1-сызба

Граф ретінде алгоритмдік программалардың блок - схемаларын (төбелер-блоктар, ал доғалар-бір блоктан басқа блокка өту жолдары), электр желілері, географиялық карталар , химиялық бірікпелердің молекулалары , адамдар немесе топтар арасындағы байланыс және т.б. көру мүмкін.

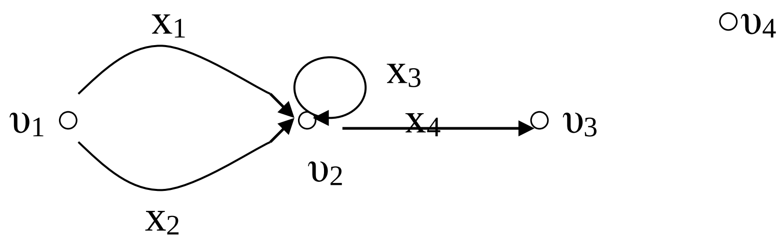
Осындай мәселелерді қарастыру кезінде V, X шекті екі жиынды біргелікте ізденумен шектелу жеткілікті, бұл жерде V-“бос” емес жиын, X- V дан алынған (υ,ω) ретіндегі жұп элементтер құрамы. Еңгізілген жұп (V,X) жиын математикада толыққанды ізденуді талап етеді. V жиынның элементтерін төбелер , ал X жиынның элементтер жиналымын қабырғалар деп атауға келісеміз. Дербес жағдайда X жиналым (υ,υ) көрінісіндегі бір түрлі жұптыққа және бір түрлі элементтерге ие болуыда мүмкін , яғни (υ,υ) түрдегі қабырғаларды тұзақ деп айтылады . X жиындағы бір түрлі жұптық еселі немесе параллел қабырғалар деп айтылады. X жиындағы бір түрлі жұптықтар саны (υ,ω) қабырғаның еселігі болады.

1-анықтама. Төбелері кішкентай дөңгелекпен, ал қабырғалары сәйкес төбелер арқылы сызықтармен қосылған геометриялық құрылым (конфигурация) осы графтың бейнесі деп айтылады және G=(V,X) арқылы жазылады. Бағытталған граф (қысқаша **бграф** деп атауға келісеміз) бейнесінде доғалар бағыты олар соңына көрсеткіш қою арқылы белгіленеді.

2-анықтама. V жиын және X жиналымдар арқылы құралган еселі қабырғалар және тұзақтар қатысқан G=(V,X) граф псевдограф деп айтылады. Тұзақсыз псевдографты еселі қабырғалы немесе мультиграф деп айтамыз. Егер X жиналымда бір жұптық теққана бір рет қатысса G=(V,X) мультиграфты граф деп атауға келісеміз.

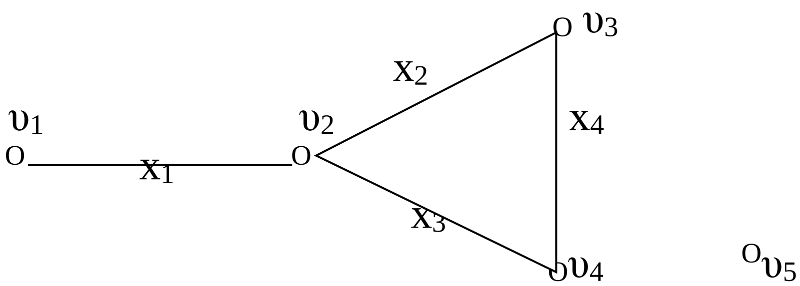
Егер жұптықтар X наборда реттелген болса, ондай граф бағытталған деп айтылады (қысқаша-бграф). Бграфтың қабырғаларын доғалар деп айтамыз. Егер жұптықтар X жиналымда реттелмеген болса, ондай граф бағытталмаған граф деп айтылады (немесе граф деп айтылады). Бағытталған немесе бағытталмаған граф қабырғаларын сәйкесінше (υ,ω) , {υ,ω} ретінде жазамыз. Графтарды (бағытталмаған граф) G немесе индексті G (G_o,G_1,…) әріптері, ал бграфтарды D немесе индексті D (D_o,D_1,…) әріптері арқылы белгілейміз. Тағыда төбелерді υ,u,ω (индекссіз немесе индексті), ал қабырға және доғаларды x,y,z (индекссіз немесе индексті) әріптермен белгілеуге келісеміз.

Мысал-1. Айталық V-$\{\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3,\upsilon_4\}$, $X=\{x_1=(\upsilon_1,\upsilon_2),\ x_2=(\upsilon_1,\upsilon_2),\ x_3=(\upsilon_2,\upsilon_2),\ x_4=(\upsilon_2,\upsilon_3)\}$ болсын. Онда $D=(V,X)$-бағытталған жалпы графтың бейнесі 2-сызбаға сәйкес келеді



2-сызба.

Мысал-2. Айталық $V=\{\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3,\upsilon_4,\upsilon_5\}$, $X=\{x_1=\{\upsilon_1,\upsilon_2\},\ x_2=\{\upsilon_2,\upsilon_3\},\ x_3=\{\upsilon_2,\upsilon_4\},\ x_4=\{\upsilon_3,\upsilon_4\}\}$ болсын. Онда $G=(V,X)$-бағытталмаған графтың (немесе граф) бейнесі 3-сызбаға сәйкес келеді.



3-сызба.

Егер $x=\{\upsilon,\omega\}$ графтың қабырғасы болса, онда υ,ω төбелер x қабырғаның <u>шеттері</u> деп айтылады, сонымен тағыда “x қабырға υ,ω төбелерді қосады” деп айтылады.

Егер $x=(\upsilon,\omega)$ бграфтың доғасы болса, онда υ төбе <u>басы</u>, ал ω төбе x доғаның <u>соңы</u> деп айтылады. Сонымен тағыда бұл жағдайды ″x доға υ төбеден шығады және ω төбеге енеді″ деп айтамыз.

Егер υ төбе x қабырғаның (x доғаның) басы немесе соңы болса, онда υ және x <u>инциденттi</u> деп айтылады.

$G=(V,X)$ графтың υ,ω төбелері <u>іргелес</u> деп айтылады, егер $\{\upsilon,\omega\}\in X$ болса. Сонымен, егер екі қабырға ортақ төбеге ие болса, онда оларды <u>іргелес</u> қабырғалар деп айтамыз.

G граф υ төбесінің <u>дәрежесі</u> деп υ төбеге инцидент болған осы графтағы $\delta(\upsilon)$ қабырғалар саны айтылады. Графтағы 0-дәрежелі төбені <u>бөлектенген</u>, ал 1-дәрежеліні <u>аспалы</u> төбе деп айтамыз.

D бграфтағы υ төбенің ‘шығыс’ дәрежесі (‘ену’ дәрежесі) деп осы графтағы υ төбеден шығатын (енетін) барлық $\delta^+(\upsilon)$ доғалар ($\delta^-(\upsilon)$ доғалар) санына айтылады.

Мысал-3.

1) G графта (2-мысал) x_1 қабырғаның шеттері υ_1,υ_2 төбелер болады; υ_2 төбе x_1,x_2,x_3 қабырғаларға инцидентті; υ_2 төбенің дәрежесі 3 ке тең, яғни $\delta(\upsilon_2)=3$; υ_1,υ_2 төбелер және x_1,x_2 , x_3 қабырғалар іргелес; υ_1 төбе аспалы υ_5 төбе бөлектенген төбе болып есептеледі.

2) D бграфта (1-мысал) x_1 доға υ_1 төбеден шығады және υ_2 төбеге енеді; υ_2 төбе x_1,x_2,x_3,x_4 доғаларға инцидентті; $\delta^+(\upsilon_2)=2$, $\delta^-(\upsilon_2)=3$.

Енді G граф немесе D бграфтың төбелер және қабырғалар немесе төбелер және доғалар санын сәйкес ретінде n(G) және m(G) немесе n(D) және m(D) арқылы белгілейміз.

1-түжырым. Кез келген G граф үшін

$$\sum_{\upsilon\in V}\delta(\upsilon)=2m(G) \qquad (1)$$

теңдік ақиқат.

2-түжырым. Кез келген D бграф үшін

$$\sum_{\upsilon\in V}\delta^+(\upsilon) = \sum_{\upsilon\in V}\delta^-(\upsilon) = m(D) \qquad (2)$$

теңдік ақиқат.

Анықтама. Барлық төбелері өзара іргелес болған графтарды **толық** графтар деп айтамыз.

Толық графтарда қабырғалар саны $m=[n\cdot(n-1)]/2$ теңдік арқылы табылады. Бграфтар үшін да осы теңдіктің дұрыс екендігін дәлелдеуді оқырманның өзіне қалдырамыз.

2. Графтарда изоморфизм және гомеоморфизм

3-анықтама. $G1=(V1, X1)$ және $G2=(V2,X2)$ графтар изоморфты деп айтылады, егер іргелестікті сақтайтын, яғни $\{\upsilon,\omega\}\in X1\leftrightarrow\{\varphi(\upsilon),\varphi(\omega)\}\in X2$ болған өзара бірманді (биектив) көшіру $\varphi:V1\rightarrow V2$ заңы орынды болса.

Осыған сәйкес $D1=(V1,X1)$ және $D2=(V2,X2)$ бграфтар изоморфты болады , егер

$$(\upsilon , \omega) \in X1 \leftrightarrow (\varphi (\upsilon), \varphi(\omega)) \in X2 \qquad (3)$$

болған биектив көшіру $\varphi: V1 \rightarrow V2$ орындалса.

Осы анықтамадан изоморфты графтардың (бграфтардың) тек төбелерінің белгілеулеріменғана айрықшалығын көру қиын емес.

Изоморфизмнің негізгі қасиеттері :

1) егер $G_1 = (V_1,X_1)$, $G_2 = (V_2,X_2)$ графтар изоморфты және іргелестікті сақтайтын $\varphi : V_1\rightarrow V_2$ – биектив көшіруге ие болса, онда

a) кез келген $\upsilon\in V_1$ үшін $\delta(\upsilon) = \delta(\varphi(\upsilon))$;

b) $m (G_1) = m(G_2)$, $n(G_1) = n(G_2)$;

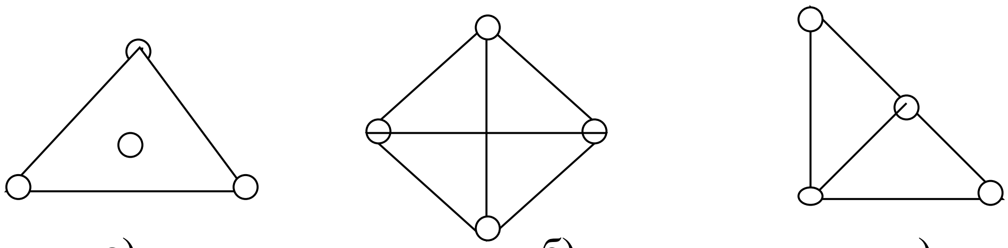
2) егер $D_1=(V_1,X_1)$, $D_2=(V_2,X_2)$ бграфтар изоморфты және іргелестікті сақтайтын $\varphi:V_1 \rightarrow V_2$–биектив көшіру мүмкін болса, онда

a) кез келген $\upsilon \in V_1$ үшін $\delta^+(\upsilon) = \delta^+(\varphi(\upsilon))$, $\delta^-(\upsilon) = \delta^-(\varphi(\upsilon))$;

b) $m(D_1) = m(D_2)$, $n(D_1) = n(D_2)$ болады.

Мысал – 4 .

4а), 4б) сызбаларда бейнеленген графтар изоморфты, бырақ олар 4в) сызбадағы графқа изоморф емес.



а) б) в)

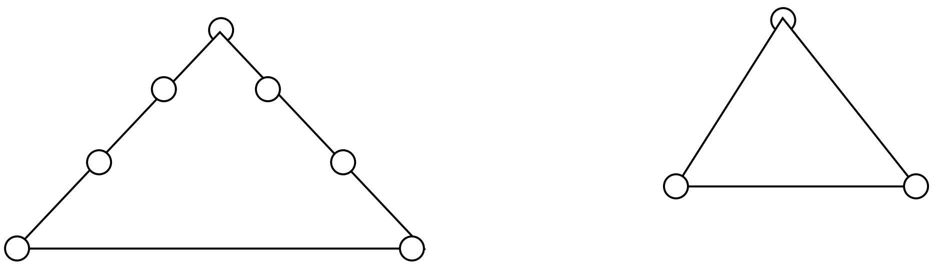
4 – сызба

$D = (V,X)$ бграфтағы (u,υ) доғаны бөлу амалы X жиыннан (u,υ) доғаны жойып, V жиынға жаңа ω төбесін қосу және $X \setminus \{(u,\upsilon)\}$ жиынға екі (u,ω), (ω,υ) доғаларды қосу болып есептеледі. Графтағы қабырғаларды бөлу амалыда осы секілді орындалады.

D_1 бграф D_2 бграфтың ішкі бөлігі деп айтылады, егер доғаларды біртіндеп бөлу амалы арқылы D_1 бграф D_2 бграфтан алынған болса.

Мысал – 5 **.**

5а–сызбада бейнеленген граф 5б – сызбада бейнеленген графтың ішкі бөлігі болып есептеледі.



а) б)

5 – сызба

4-анықтама. Егер D_1 , D_2 бграфтардың (G_1 ,G_2 графтардың) ішкі бөліктері өзара изоморф болса, онда олар гомеоморф бграфтар деп айтылады.

Мысал – 6 .

5 – сызбада бейнеленген графтар гомеоморфты.

3. Графтарда маршруттар және жолдар

$G = (V,X)$ граф үшін маршрут , ал $D = (V,X)$ бграф үшін жол ұғымдарын еңгіземіз.

5-анықтама.

а) Төбелері және қабырғалары кезектесіп келетін және әр бір $x_j (j=1,2,\ldots,k)$ қабырға үшін $\{\upsilon_j , \upsilon_{j+1}\}$ көріністе болған

$$\upsilon_1 x_1 \upsilon_2 x_2 \upsilon_3 \ldots x_к \upsilon_{к+1} \quad (4)$$

(бұл жерде $k \geq 1$, $\upsilon_i \in V$, $i = 1,\ldots,k+1$; $x_j \in X$, $j=1,\ldots,k$) қатар $\upsilon_1,\upsilon_{к+1}$ төбелерді қосатын маршрут деп айтылады.

б) Төбелері және доғалары кезектесіп келетін және әр бір x_j ($j = 1,2,\ldots,k$) доға үшін $(\upsilon_j , \upsilon_{j+1})$ көріністе болған (4) қатар υ_1, $\upsilon_{к+1}$ төбелерді қосатын жол деп айтылады.

Сонымен бұл жерде υ_1 төбе марштруттың (жолдың) бастапқы, $\upsilon_{к+1}$ – соңғы, ал басқалары ішкі төбелері деп айтылады. υ төбе бір кезеңде бастапқы, соңғы және ішкі төбе болуы да мүмкін. Графтардың маршрутын анықтау қабырғалардың жазылу ретіне сәйкес болады. $x = \{\upsilon,\omega\}$ жазу x қабырғаның бағыты υ төбеден ω төбеге бағытталғандығын белгілейді.

Мысал-7.

1. $\upsilon_1 x_1 \upsilon_2 x_3 \upsilon_4 x_4 \upsilon_3$ тізбек-маршрут G графтағы υ_1,υ_3 төбелерді қосады (2-мысал).
2. $\upsilon_1 x_2 \upsilon_2 x_3 \upsilon_2 x_4 \upsilon_3$ тізбек-жол D бграфтағы υ_1,υ_3 төбелерді жалғайды (1-мысал).

Ескерту. (4) қатарды

$$x_1 \, x_2 \ldots x_k \quad (5)$$

қатар арқылы бір мәнді бейнелеу мүмкін, егер (4)-маршрут (5)-қатарда қосымша ретінде қабырғалардың бағыты көрсетілген болса. Сондықтан (4)-қатар орнына қысқаша (5) жазуды қолдану мүмкін.

Тағыда (4) қатардағы $x_1,\ldots,x_k$ қабырғалар дәрежесі 1 ге тең болған жағдайда, оны төбелер шынжыры бойынша бір мәнді бейнелеу мүмкін : $\upsilon_1\upsilon_2\ldots\upsilon_{k+1}$ (6), сондықтан (4) жазу орнына (6) қысқаша жазуды қолдануға болады. Жалпы жағдайда (4) қатар орнына еселігі 1 болған барлық x_i лер түсіріп қалдырылған қысқаша қатарды қолдану мүмкін.

Мысал-8

1. $x_1x_3x_4$ және $\upsilon_1\upsilon_2\upsilon_3\upsilon_4$ қатарлар 7-мысалдың 1-пунктінде келтірілген маршруттың қысқартылған жазуы.
2. $x_2x_3x_4$ және $\upsilon_1\upsilon_2\upsilon_2\upsilon_3$ қатарлар 7-мысалдың 2-пунктінде келтірілген жолдың қысқартылған жазуы.

Айталық $x_1x_2\ldots x_к$ – G графтағы маршрут болсын, онда $i_1,\ldots,i_r$ ($r \geq 1$) нөмірлер қатары үшін құралған $x_{i1}x_{i2}\ldots x_{ir}$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq k$) - G графтағы маршрут болады. Онда $x_{i1}x_{i2}\ldots x_{ir}$ қатар $x_1x_2\ldots x_k$ маршруттың ішкі маршруты деп айтылады. Бұл жерде $x_{i1}x_{i2}\ldots x_{ir}$ ішкі маршрут $x_1x_2\ldots x_k$ маршруттан айырылған деп айтамыз. Бграфтың жолынан айырылған ішкі жолда сол секілді анықталады.

Маршруттағы (жолдағы) қабырғалар (доғалар) саны маршруттың (жолдың) ұзындығы деп айтылады.

(4) тізбектегі маршрут (жол) жабық деп айтылады, егер оның бастапқы төбесі соңғы төбесімен түйіссе, яғни егер $\upsilon_1=\upsilon_{k+1}$ болса.

<u>Ескерту</u>. $x_1x_2\ldots x_k$ жабық маршрутта(жолда) $x_1x_2\ldots x_k$, $x_2x_3\ldots x_kx_1,\ldots,$ $x_kx_1x_2\ldots x_{k-1}$- қатарлар тек бірғана маршруттың(жолдың) жазылуын білдіреді.

Барлық қабырғалары (доғалары) жұбымен әртүрлі болған жабық емес маршрут (жол) <u>тізбек</u> деп айтылады.

Барлық төбелері жұбымен әртүрлі болған тізбек <u>жәй тізбек</u> болады.

Барлық қабырғалары (доғалары) жұбымен әртүрлі болған жабық маршрут (жол) <u>цикл(контур)</u> деп айтылады.

Барлық төбелері жұбымен әртүрлі болған цикл (контур) жай цикл (контур) болады.

Мысал-9. 2-мысалдағы G графты қарастырамыз. Онда:

1) $\upsilon_1x_1\upsilon_2x_3\upsilon_4x_4\upsilon_3$ - υ_1 және υ_3 төбелерді қосатын, ұзындығы 3 ке тең маршрут; оның барлық қабырғалары және төбелері жұбымен әртүрлі болғаны үшін жәй тізбек есептеледі;

2) $\upsilon_2x_2\upsilon_3x_4\upsilon_4x_3\upsilon_2$ – ұзындығы 3 ке тең болған жабық маршрут, ол жәй тізбек;

3) $\upsilon_1x_1\upsilon_2x_2\upsilon_3x_4\upsilon_4x_3\upsilon_2$ - υ_1 және υ_2 төбелерді қосатын, ұзындығы төртке тең болған маршрут. Бұл жерде υ_2 төбе екі рет қатысқаны себебінен ол жай тізбек болмайды;

4) $\upsilon_1x_1\upsilon_2x_2\upsilon_3x_2\upsilon_2$ –υ_1 және υ_2 төбелерді қосатын, ұзындығы үшке тең болған маршрут; ол $x_2=\{\upsilon_2,\upsilon_3\}$ қабырға екі рет кездескені үшін тізбек емес.

Мысал-10. 1-мысалдағы D бграфты қарастырамыз:

1)$\upsilon_1x_1\upsilon_2x_4\upsilon_3$ –υ_1 төбеден υ_3 төбеге бағытталған, ұзындығы екіге тең болған жол. Бұл жерде барлық доғалар және төбелер жұбымен әртүрлі болғаны үшін ол жай тізбек болады;

2)$\upsilon_2x_3\upsilon_2$- ұзындығы бірге тең жай контур.

3)$\upsilon_1x_2\upsilon_2x_3\upsilon_2x_4\upsilon_3$ –ұзындығы үшке тең υ_1 төбеден υ_3 төбеге бағытталған жай болмаған тізбек.

Сонымен псевдограф, мультиграф және графтарда жай циклдың минимал ұзындығы сәйкес ретінде 1,2 және 3 ке тең екендігін анықтау қиын емес.

3-<u>тұжырым</u>. G псевдографта (бағытталғын псевдографта) әрбір циклдан (контурдан) жай цикл (жай контур) айыру мүмкін (дәлелдеу индукция әдісі арқылы орындалады).

4-<u>тұжырым</u>. Әрбір ашық маршруттан (жолдан) бастапқы және соңғы төбелерінен жай тізбек айыру мүмкің(дәлелдеу индукция әдісі арқылы орындалады).

Енді жолдар үшін <u>композиция</u> ұғымын еңгіземіз.

Айталық $\varphi_1=\upsilon_1x_1\upsilon_2\ldots x_{k-1}\upsilon_k$, $\varphi_2=\upsilon_kx_k\upsilon_{k+1}\ldots x_{\ell-1}\upsilon_\ell$ D бграфтағы жолдар болсын, бұл жерде $k\geq2$, $\ell\geq k+1$. $\varphi_1o\varphi_2=\upsilon_1x_1\upsilon_2\ldots x_{k-1}\upsilon_kx_k\upsilon_{k+1}\ldots x_{\ell-1}\upsilon_\ell$- жол φ_1, φ_2 жолдардың композициясы деп айтылады.

4. Графтарда маршруттарды іздеу.

Кейбір қолданбалы мәселелерді шешуде G графта берілген төбелерді қосатын маршрутты табу қажеттілігі жиі кездеседі. Осы мәселені шешу алгоритімін келтіреміз.

Алгоритм № 2. G = (V,X) байланысты графтағы берілген $\upsilon, \omega \in V, \upsilon \neq \omega$ төбелерді қосатын маршрутты іздеудің Терри алгоритмі.

Бұл алгоритм кезектегі ережеге сәйкес орындалады :

1) Таңдалған қабырға бойынша жүріп әр кез өзі өткен қабырғаның бағыты белгіленеді;

2) υ' төбеден шығып барлық уақыт текқана әлі өтілмеген немесе қарама – қарсы бағытта өтілген қабырға бойынша жүріледі ;

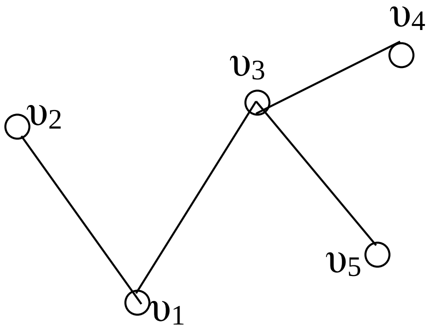
3) υ төбеден басқа кез келген υ' төбе бірінші рет кездессе онда υ_1 ге бірінші кіретін қабырға белгіленеді ;

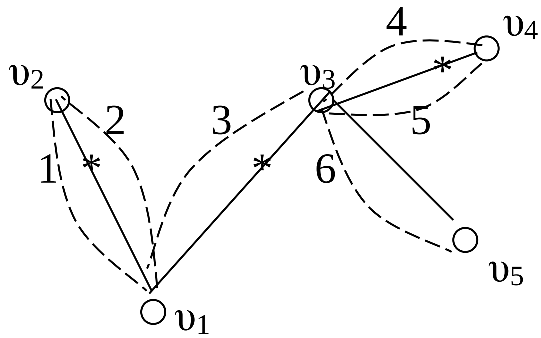
4) υ дан басқа кез келген υ' төбеден шығып υ' ге бірінші кіретін қабырға бойынша басқа мүмкіншіліктер болмағанда және тек сонда ғана жүріледі. Кері жағдайда G байланысты графта берілген екі υ,ω төбелерді қосатын маршрут табу мүмкін.

17 – мысал. 14 – сызбада бейнеленген G графта υ_1 , υ_5 төбелерді қосатын маршрутты Терри алгоритмінен пайдаланып табылсын.

G графтағы υ_5 төбені іздеуді бұл граф тұралы мәліметтер белгісіз деп есептеп жұмыс істейміз, яғни G граф бір лабиринт схемасы , ал υ_5 одан шығу, υ_1 іздеу басталатын таралу нүктесі деп есептейміз.

15 – сызбада Терри алгоритмі негізінде G граф бойынша қозғалыстың бір мүмкіндік варианты көрсетілген.





14 – сызба. 15 – сызба.

Бұл жерде нөмірленген пунктирлік доғалар арқылы G граф бойынша қозғалыс схемасы көрсетілген. * белгі қабырғаның төбеге бірінші рет ену белгісін білдіреді (белгі қабырға енетін төбеге жақын бөлігіне қайылады). 15–сызбадағы қозғалыс схемасы $\upsilon_1\upsilon_2\upsilon_1\upsilon_3\upsilon_4\upsilon_3\upsilon_5$ маршрутқа сәйкес келеді.

Кейбір кезеңдерді атап өтелік, яғни υ_1 төбеден υ_3 төбеге өткеннен соң (3 доға) 4 – қағида бойынша υ_1 ге қайтып келе алмаймыз, себебі бұл төбеден қозғалатын басқа мүмкіндіктер бар, ал $\{\upsilon_1 , \upsilon_3\}$ қабырға υ_3 төбеге бірінші кіріс қабырғасы болады. Одан әрі υ_4 төбеден υ_3 төбеге кіргеннен соң (5 доға) 2 – қағида бойынша υ_4 төбеге қайта алмаймыз, ал 4 – қағида бойынша υ_1 төбеге қозғалу мүмкін емес, сонымен жалғыз мүмкіндік υ_5 төбеге жүру қалады.

Ескерту. № 2 – алгоритм G – байланысты псевдограф болған жағдайдада өз күшінде қалады.

Минимал жолды (маршрутты) іздеу.

D бграфтағы υ төбеден ω төбеге баратын барлық жолдар арасынан минимал узындыққа ие болған жол минимал жол деп айтылады.

Минимал жол (маршрут)дардың кейбір қасиеттері:

21 – тұжырым. Кез келген минимал жол (маршрут) жәй тізбек болады.

22 – тұжырым (Минимал жолдың минимал ішкі жолы туралы).

Айталық $\omega = \upsilon_1\upsilon_2 \ldots \upsilon_k$, $\upsilon_1 \neq \upsilon_k$ – D бграфтағы минимал жол (маршрут) болсын. Онда кез келген i , j (бұл жерде $1 \leq i < j \leq k$) нөмір үшін $\omega_0 = \upsilon_i\, \upsilon_{i+1} \ldots \upsilon_j$ жол (маршрут) минимал болады.

Енді минимал жолды (маршрут) іздеу мәселесін қарастырамыз.

Айталық $D = (V,X)$ – бграф, $\upsilon \in V$, $V_1 \in V$.

$D(\upsilon) = \{\omega \in V \mid (\upsilon,\omega) \in X\}$ – υ төбенің бейнесі (образы);

$D^{-1}(\upsilon) = \{\omega \in V \mid (\omega, \upsilon) \in X\}$–$\upsilon$ төбенің түпкі бейнесі (алғашқы бейнесі) ;

$$D(V_1) = \bigcup_{\upsilon \in V1} D(\upsilon)$$ – V_1 төбелер жиынының бейнесі ;

$$D^{-1}(V_1) = \bigcup_{\upsilon \in V1} D^{-1}(\upsilon)$$ – V_1 төбелер жиынының түпкі бейнесі ;

Ескерту . G = (V,X) графтарғада осы белгілеулерді қолданамыз.

Айталық $D = (V,X)$ – төбелер саны $n \geq 2$ және $\upsilon,\omega \in V$, $\upsilon \neq \omega$ болған бграф болсын.

D бграфтағы υ дан ω төбеге қозғалатын минимал жолды іздеу алгоритімін сипаттаймыз.

Алгоритм № 3.

1 – қадам. υ төбені 0 (нөл) индексті деп белгілейміз . Соң υ төбе бейнесіне тиісті төбелерге 1(бір) индекс арқылы белгі қоямыз. Бір индексті төбелер жиынын $FW_1(\upsilon)$ арқылы белгілеу енгіземіз. Бастапқыда $k = 1$ деп есептейміз.

2 – қадам. Егер $FW_k(\upsilon) = \varnothing$ немесе $k = n-1$, $\omega \notin FW_k(\upsilon)$ болса, онда ω төбе υ төбеден жетеалмайтын болып есептеледі және алгоритм жұмысын тоқтатады. Басқа жағдайда 3 – қадамға өтеміз.

3 – қадам. Егер $\omega \in FW_k(\upsilon)$ болса онда 4 – қадамға өтеміз. Басқа жағдайда k ұзындықтағы υ дан ω төбеге жүретін жол бар, ал ол минимал болады. Ол $\upsilon\, \omega_1\omega_2 \ldots \omega_{k-1}\, \omega$ төбелер тізбегі, бұл жерде

$\omega_{k-1} \in FW_{k-1}(\upsilon) \cap D^{-1}(\omega)$;

$\omega_{k-2} \in FW_{k-2}(\upsilon) \cap D^{-1}(\omega_{k-1})$;

– – – – – – – – – – – – – – – – (11)

$\omega_1 \in W_1(\upsilon) \cap D^{-1}(\omega_2)$

ізделінген υ төбеден ω төбеге баратын минимал жол болады. Осымен алгоритм жұмысын аяқтайды.

4 – қадам. k индексті төбелер жиынының бейнесіне тиісті болған барлық белгіленбеген төбелерді k+1 индексі арқылы белгілейміз. k+1 индексті төбелер жиынын FW_{k+1} (υ) арқылы белгілейміз. k : = k+1 амалды орындап 2 – қадамға өтеміз.

Ескерту. Алгоритмдегі $FW_k(\upsilon)$ жиынды әдетте к-ші деңгейдің майдан (фронт) толқыны деп атайды.

18 – мысал. № 3–алгоритм негізінде 4 – кестедегі іргелестік матрицасы арқылы берілген D – бграфтағы υ_1 және υ_6 төбелер арасындағы минимал жолды табамыз.

Алгоритм бойынша к индексті төбелер жиынын анықтаймыз:

$FW_1(\upsilon_1) = \{\upsilon_4,\upsilon_5\}$, $FW_2(\upsilon_1)=D(FW_1(\upsilon_1))\setminus\{\upsilon_1,\upsilon_4,\upsilon_5\}= \{\upsilon_2 , \upsilon_3\}$;

$FW_3(\upsilon_1) = D(FW_2(\upsilon_1)) \setminus \{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4, \upsilon_5\} = \{\upsilon_6\}$.

Сондықтан , $\upsilon_6 \in FW_3(\upsilon_1)$, ал ол ұзындығы үшке тең және минимал болған υ_1 төбеден υ_6 төбеге баратын жол бар екендігін білдіреді.

Енді υ_1 төбеден υ_6 төбеге баратын минимал жолды табамыз. Оны (11) тізбек арқылы анықтаймыз:

$FW_2(\upsilon_1) \cap D^{-1}(\upsilon_6) = \{\upsilon_2, \upsilon_3\} \cap \{\upsilon_2, \upsilon_3\} = \{\upsilon_2, \upsilon_3\}$

Табылған жиыннан кез келген бір төбені таңдаймыз, мәселен υ_3 :

$FW_1(\upsilon_1) \cap D^{-1}(\upsilon_3) = \{\upsilon_4, \upsilon_5\} \cap \{\upsilon_4, \upsilon_5, \upsilon_6\} = \{\upsilon_4, \upsilon_5\}$.

Тағыда табылған жиыннан кез келген бір төбені таңдаймыз, мәселен υ_5 төбені.

Онда D бграфтағы (ұзындығы 3) ізделінген минимал жол – $\upsilon_1\ \upsilon_5\ \upsilon_3\ \upsilon_6$ болады.

4 – кесте.

	υ_1	υ_2	υ_3	υ_4	υ_5	Y_6
υ_1	0	0	0	1	1	0
υ_2	1	0	0	1	1	1
υ_3	1	1	0	1	1	1
υ_4	0	1	1	0	1	0
υ_5	1	1	1	1	0	0
υ_6	1	1	1	1	1	0

11-лекция
Графтарда матрицалар
1. Графтардың матрицалы бейнесі.

2. **Бульдік матрицалар.**
3. **Графтарда байланыстылық.**
4. **Байланыстылық матрицасы. Уоршел әдісі.**

---

1. Графтардың матрицалы бейнесі.

Айталық $D=(V,X)$-бграф берілген болсын, бұл жерде $V=\{\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n\}$, $X=\{x_1,\ldots,x_m\}$.

6-анықтама. D бграфтың <u>іргелестік матрицасы</u> деп n- ретті $A(D)=[a_{ij}]$ квадрат матрицаға айтылады, бұл жерде

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ егер } (\upsilon_i,\upsilon) \in x, \\ 0, \text{ егер } (\upsilon_i,\upsilon_j) \notin x. \end{cases}$$

7-анықтама. D бграфтың <u>инциденттілік матрицасы</u> деп (n*m) өлшемді $B(D)=[b_{ij}]$ матрицаға айтылады, бұл жерде

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ егер } \upsilon_i \text{ төбе } x_j \text{ доғаның соңы болса,} \\ -1, \text{ егер } \upsilon_i \text{ төбе } x_j \text{ доғаның басы болса,} \\ o, \text{ егер } \upsilon_i \text{ төбе } x_j \text{ доғаға инцидентті болмаса.} \end{cases}$$

Бағытталмаған графтар үшін іргелес және инцидентті матрицаларды енгіземіз. Айталық $G=(V,X)$ граф берілген болсын, бұл жерде $V=\{\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n\}$, $X=\{x_1,\ldots,x_m\}$.

8-анықтама. G графтың <u>іргелестік матрицасы</u> деп n-ретті $A(G)=[a_{ij}]$ квадрат матрицаға айтамыз, бұл жерде

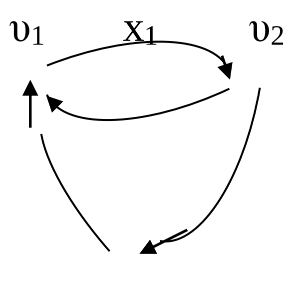
$$a_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ егер } \{\upsilon_i,\upsilon_j\} \in x, \\ 0, \text{ егер } \{\upsilon_i,\upsilon_j\} \notin x. \end{cases}$$

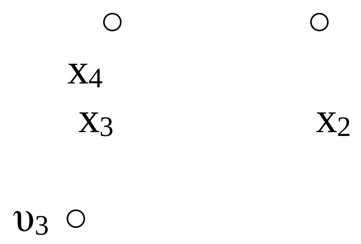
9-анықтама. G графтың инциденттілік матрицасы деп (n*m) өлшемді $B(G)=[b_{ij}]$ матрицаға айтамыз, бұл жерде

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ егер } \upsilon_i \text{ төбе } x_j \text{ қабырғаға инцидентті болса;} \\ 0, \text{ егер } \upsilon_i \text{ төбе } x_j \text{ қабырғаға инцидентті болмаса.} \end{cases}$$

11-мысал. 6-сызбада бейнеленген D бграф үшін A(D), B(D) матрицалар 1а, 1б кестелерге сәйкес болады.

1а-кесте





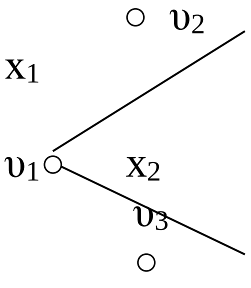
6 – сызба.

υ \ υ	υ1	υ2	υ3
υ1	0	1	0
υ2	1	0	1
υ3	1	0	0

1б-кесте

υ \ x	x1	x2	x3	x4
υ1	-1	0	1	1
υ2	1	-1	0	-1
υ3	0	1	-1	0

12-мысал. 7-сызбада бейнеленген G граф үшін A(G), B(G) матрицалар 2а, 2б кестелер арқылы берілген.



7-сызба

2а-кесте

υ \ υ	υ1	υ2	υ3
υ1	0	1	1
υ2	1	0	0
υ3	1	0	0

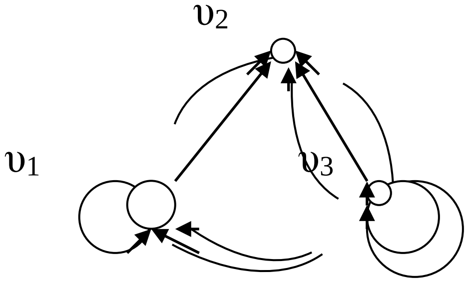
2б-кесте

υ \ x	x1	x2
υ1	1	1
υ2	1	0
υ3	0	1

Ескерту: Іргелестік матрицаларын псевдографтар үшін да анықтау мүмкін. Онда бағытталған (бағытталмаған) псевдограф үшін $a_{ij}=k$ болады, бұл жерде k-(υ_i,υ_j) доғаның ($\{\upsilon_i,\upsilon_j\}$ қабырғаның) осы псевдографтағы еселігі. Инцидентті

матрицаның анықтамасы кез келген мультиграфтар (бағыталған немесе бағытталмаған), псевдографтар ушында өзгеріссіз ауыстырылады.
Графтың (бграфтың) іргелестік матрицасы бойынша оларға жұп инцидент төбелер ретінде барлық уақыт графтың қабырғасын (бграфтың доғасын) анықтау мүмкін, ал псевдограф үшін қабырғаның (доғаның) дәрежесін де білсе болады. Бірақ, егер қабырға (доға) нөмірленген болса, оның нөмірлерін іргелестік матрицасы арқылы анқтау мүмкін емес. Бұл мағынада инциденттілік матрицасы көптеу ақпарат беруі мүмкін. Ол қабырғалардың (доғалардың) барлық ақпараттарын өзінде сақтайды.

13-мысал. 8-сызбада бейнеленген D бағытталған псевдограф үшін A(D) матрица 3-кестеге сәйкес келеді.



8 – сызба.

3-кесте

υ \ υ	υ_1	υ_2	υ_3
υ_1	1	2	0
υ_2	0	0	0
υ_3	2	3	2

Еңгізілген матрицалар көмегімен графтарды (бграфтарды) ЭЕМ ларында іске асыру өте қолайлы. Біракта төбелердің саны өте көп болғанда іргелестік матрицасы өте үлкен болып, элементтер саны ЭЕМ жадысының мүмкіндік дәрежесінен асып кетуі мүмкін. Осы пікірді инциденттілік матрицасы туралы да айту мүмкін. Онда ол қосымша қабырғалар (доғалар) санынада байланысты болады.

Матрицалардың қасиеттері.

1. A(G) матрицаның i-жол (немесе i-баған) бойынша элементтер қосындысы $\delta(\upsilon_i)$ ге тең, бүл жерде G=(V,X)-мультиграф, $V=\{\upsilon_1,\dots,\upsilon_n\}$.
2.A(D) матрицаның i-жол және i-баған бойынша элементтер қосындысы сәйкес ретінде $\delta^+(\upsilon_i)$, $\delta^-(\upsilon_i)$ ге тең, бұл жерде D=(V,X)-бағытталған бграф, $V=\{\upsilon_1,\dots,\upsilon_n\}$.
3. Айталық D-“бос” болмаған доғалар жиынындағы бағытталған мультиграф болсын. Онда
а) B(D) матрицаның жолдар қосындысы нөлдік жол болады;
б) B(D) матрицаның кез келген жолы басқа жолдардың сызықты комбинациясы болады.
в) B(D) матрицаның рангы n(D)-1 ден аспайды.
г) D дағы кез келген контур үшін осы контурда жататын доғаларға сәйкес B(D) матрицаның бағандар қосындысы нөльдік бағанға тең.

4. Айталық G-“бос” болмаған қабырғалар жиынындағы мультиграф болсын. Егер оларга қолданылатын амалдарды mod 2 бойынша орындасақ, онда
а) B(G) матрицаның жолдар қосындысы нөлдік жол болады;
б) B(G) матрицаның кез келген жолы басқа жолдар қосындысы болады.
в) G дағы кез келген цикл үшін осы циклда жататын қабырғаларға сәйкес B(G) матрицаның бағандар қосындысы нөлдік бағанға тең.
Енді D бграфтің іргелестік матрицасы A=A(D) ның k-дәрежесін $A^k=[a^{(k)}_{ij}]$ арқылы белгілейміз (G граф ушында осындай белгілеу еңгіземіз).
5-<u>тұжырым</u>. Бағытталған D=(V,X) псевдографтың (G=(V,X) псевдографтың) $A^{(k)}$ матрицасының $a^{(k)}_{ij}$ элементі υ_i және υ_j төбелерді қосатын k ұзындықтағы барлық жолдар (маршрутар) санына тең.
6-<u>тұжырым</u>. A=A(D) іргелес матрицалы және n төбелі D бграф кемінде бір контурға ие болуы үшін $k=A^2+A^3+\ldots+A^n$ матрицада нөль болмаған диогонал элементтерінің бар болуы қажет және жеткілікті.

2. Бульдік матрицалар.

10-анықтама. Элементтері $c_{ij}\in\{0,1\}$, i=1,2,…,m; j=1,2,…,n, болған (m*n)-өлшемді $C=[c_{ij}]$ матрицаны бульдік матрица деп айтамыз.
G – псевдограф қайталанбайтын қабырғаларға ие болған жағдайда A(G) – іргелес матрицасы тек нөл және бірлерден құралады, яғни бульдік матрица болады. Бұл жағдай бағытталған D псевдографтарғада орындалады. G псевдографтарда B(G) матрица бульдік болады.
Бір өлшемді бульдік матрицалар үстінде қарапайым логикалық амалдар орындаймыз. Мысалы: егер $C = [c_{ij}]$, $D = [d_{ij}]$ (m*n) өлшемді бульдік матрицалар болса , онда $F = [f_{ij}] = C \vee D$ дизъюнкция $f_{ij} = c_{ij} \vee d_{ij}$, i =1,2,…, m ; j = 1,2,…,n, болған (m*n) - өлшемді бульдік матрица болады.
Тағыда бульдік матрицаларға логикалық көбейту (&) амалын еңгіземіз.
Айталық $C = [c_{ij}]$ – (m*n) өлшемді және $D = [d_{ij}]$ – (k*n) өлшемді бульдік матрицалар болсын. Онда $F=[f_{ij}]= C\&D$ логикалық көбейту $f_{ij} = \vee^{\kappa}_{r=1} (c_{ir} \& d_{rj})$, i = 1,2,…,m; j = 1,2,…,n болған (m*n) - өлшемді бульдік матрица болады.
Егер $D = C_1\&C_2 \&\ldots\& C_k$ және $C_1=C_2 =\ldots=C_k = C$, (бұл жерде C – бульдік квадрат матрица) болса , онда $D = C_{\&}^{\kappa}$ ретінде жазамыз.
Енді кез келген (m*n) - өлшемді $D =[d_{ij}]$ матрицасынан тек оң элементтерден құралған (m*n) - өлшемді $C = [c_{ij}] = \mathrm{sign}\, D$ бульдік матрицасына ауысудың sign амалын енгіземіз , мұнда $C=\mathrm{sign}\, d_{ij}$, i = 1,2,…,m; j = 1,2,…,n және кез келген $t \geq 0$ сан үшін

$$\mathrm{sign}\, t = \begin{cases} 1, \text{ егер } t > 0 \\ 0, \text{ егер } t = 0. \end{cases}$$

Өлшемдері сәйкес келетін кез келген оң элементті D_1 , D_2 матрицалар үшін мынадай теңдік орындалады:

sign $(D_1 + D_2)$ = sign D_1 v sign D_2,
sign $(D_1 D_2)$ = sign D_1& sign D_2 (9)

Бульдік матрицалар бүтін санды матрицаларға қарағанда есептеу мағынасында көбірек үнемді болады. Шынында, бульдік матрицаларды ЭЕМ нің жадысында сақтау бүтін санды матрицаларға қарағанда аз көлемді талап етеді. Логикалық амалдарды ЭЕМ де қолданууда да осындай мүмкіндіктер бар. Осыларға байланысты графтар теориясындағы мәселелерді шешу әдістері бульдік матрицалар негізінде орындалатындығы тиімді нәтижелерге алып келеді.

Енді (9) теңдіктер негізіндегі бграфтағы контурлар саны туралы 6 – тұжырымды басқаша логикалық тұжырым бойынша баяндаймыз.

7 – тұжырым A = A(D) іргелес матрицалы n төбелі D бграф кемінде бір контурға ие болуы үшін $A_\&^2$ v $A_\&^3$ v…v $A_\&^n$ матрица нөль болмаған диагонал элементтерінен құралған болуы қажет және жеткілікті.

3. Графтарда байланыстылық.

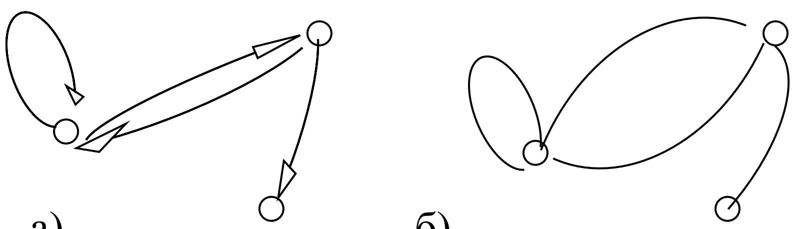
11-анықтама. D бграфтың (G – графтың) ω төбесі υ төбеден жете алатын деп айтамыз, егер не ω = υ немесе υ төбеден ω төбеге жол (маршрут) бар болса.

Граф (бграф) байланысты (күшті байланысты) деп айтылады, егер оның кез келген екі төбесі υ,ω үшін оларды қосатын маршрут (жол) бар болса.

Бграф біржақты байланыста деп айтылады, егер оның кез келген екі төбесі үшін кемінде біреуі екіншісіне жете алатын болса.

$G = (V,X_0)$ псевдограф бағытталған $D = (V,X)$ псевдографпен бірлескен (ассоцияланған) деп айтылады , егер X_0 жиын X жиынның барлық реттелген (υ,ω) жұптарын реттелмеген {υ, ω} жұптарына ауыстыру жолымен алынған болса.

9 – сызбада : а – бағытталған псевдограф, б – онымен бірлескен псевдограф бейнеленген.



а) б)

9 – сызба

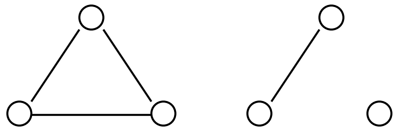
Егер бграф өзінің бірлескен псевдографы мен байланыста болса , ол күшсіз байланысты деп айтылады.

Егер граф (бграф) байланысты болмаса онда ол байланыссыз деп айтылады.

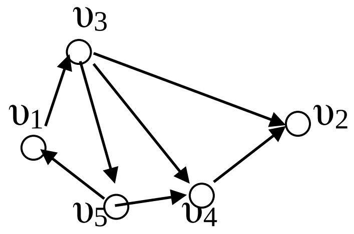
G графтың (D бграфтың) байланыс (күшті байланыс) компонентасы деп G графтағы басқа ешқандай байланысты (күшті байланысты) ішграфқа меншікті ішграф болмаған оның байланысты (күшті байланысты) ішграфы айтылады.

<u>14 – мысал.</u> 10 – сызбадағы графта үш байланыс компонентасы бейнеленген.

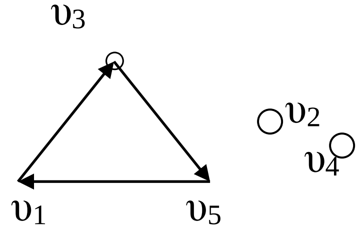
<u>15 – мысал.</u> 11 – сызбада бейнеленген бграфтың үш күшті байланыс компонентасы 12(а – в) – сызбада көрсетілген.



10 – сызба



11 – сызба



а) б) в)

12 - сызба

Байланыс (күшті байланыс) компонентасының анықтамасынан қорытынды.

9 – тұжырым.

1) Айталық $G_1 = (V_1 , X_1)$ – G графтың байланыс компонентасы болсын. Онда G_1 ішграф G графтың V_1 жиынмен туылған ішграфы болады.

2) Айталық $D_1=(V_1 , X_1)$ – D бграфтың күшті байланыстағы компонентасы болсын. Онда D_1 ішграф D бграфтың V_1 жиынмен туылған ішграфы болады.

Ескерту. 9-түжырым кез келген (бағытталған , бағытталмаған) псевдографтар үшін күшін сақтайды.

10 – тұжырым . Айталық $G= (V, X)$ – p компоненталы байланысқа , яғни $G_1 = (V_1,X_1), \dots , G_p= (V_p, X_p)$ болған псевдограф болсын. Онда

1) $V = V_1 \cup\dots\cup V_P$, $X = X_1 \cup\dots\cup X_p$, яғни $G = G_1 \cup\dots\cup G_p$.

2) $V_i \cap V_j = \varnothing$, $X_i \cap X_j = \varnothing$, $i \neq j$,

3) $n(G_1) +\dots+ n(G_p) = n(G)$,

$m(G_1) +\dots+ m(G_p) = m(G)$

болады.

11 – тұжырым . Айталық $D = (V , X)$ $D_1 = (V_1,X_1),\dots , D_p = (V_p , X_p)$ p компоненталы күшті байланысқа ие болған бағытталған псевдограф болсын. Онда

1)$V = V_1 \cup\dots\cup V_p$, $X = X_1 \cup\dots\cup X_p$;

2) $i \neq j$ болғанда $V_i \cap V_j = \varnothing$, $X_i \cap X_j = \varnothing$;

3) $n (D_1) +\dots+ n (D_p) = n (D)$,

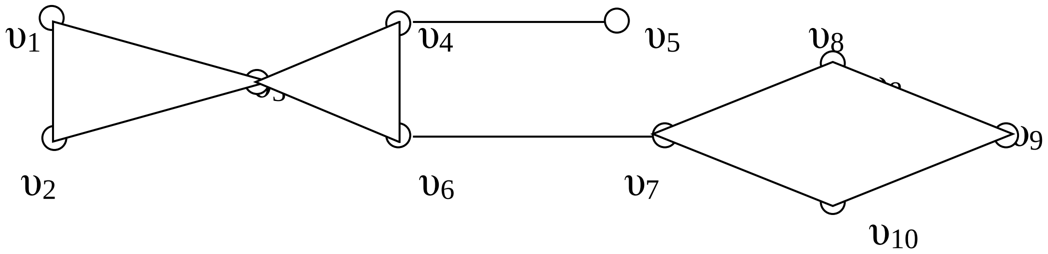
$m(D_1) +\dots+ m (D_p) \leq m(D)$.

болады.

Әрі қарай G графтың байланыс компоненталар санын $P(G)$ арқылы белгілейтін боламыз . Осы сияқты $P(D)$ арқылы D бграфтың күшті байланыс компоненталары санын белгілейміз.

Графтан (бграфтан) төбелерді қашықтату (жою) амалы деп кейбір төбелерді өзіне инцидент болған қабырғалармен (доғалармен) бірге жою түсініледі. Байланыс компоненталары санын улкейтетін граф төбелерінің қашықтатылуы бөліну немесе ажыралу нүктесі деп айтылады.

16 – мысал . 13 – сызбада бейнеленген графтың бөліну нүктелері υ_3 , υ_4 , υ_6 , υ_7 төбелер болады.



13 – сызба

14 –тұжырым. Егер D^1 – бграф D бграфтың бірнеше төбелерін қашықтату нәтижесінде алынған болса, онда $A(D^1)$ матрица қашықтатылған төбелерге сәйкес A(D) матрицаның жол және бағандарын жою арқылы құрылады.

4. Байланыстылық матрицасы. Уоршел әдісі.

Айталық D = (V,X) – бграф берілген болсын, бұл жерде
$V = \{\upsilon_1 ,\dots, \upsilon_n\}$.
D бграфтың жетеалатындылық матрицасы деп n - ретті $T(D) = [t_{ij}]$ квадрат матрицаға айтамыз, бұл жерде

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ егер } \upsilon_j \text{ төбе } \upsilon_i \text{ дің жетеалатын төбесі болса ,} \\ 0, \text{ кері жағдайда.} \end{cases}$$

D бграфтың күшті байланыс матрицасы деп n- ретті $S(D) = [S_{ij}]$ квадрат матрицаға айтылады , бұл жерде

$$S_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ егер } \upsilon_i \text{ төбе } \upsilon_j \text{ дің және біруақытта } \upsilon_j \text{ төбе } \upsilon_i \text{ дің жетеалатын төбесі болса ;} \\ 0, \text{ кері жағдайда} \end{cases}$$

яғни

1, егер υ_i , υ_j төбелер D бграфтың күшті байланыстағы бір компонентасына тиісті болса ;

S_{ij} =

0, кері жағдайда.

Айталық G = (V,X) граф берілген болсын, бұл жерде V = {υ_1 ,…, υ_n}. G графтың <u>байланысты</u> матрицасы деп n – ретті S(G) = [S_{ij}] квадрат матрицаға айтады, бұл жерде

$$S_{ij} = \begin{cases} 1, \text{егер } i = j \text{ немесе } \upsilon_i, \upsilon_j \text{ төбелерді жалғайтын маршрут бар болса ;} \\ 0, \text{кері жағдайда.} \end{cases}$$

4 – және 5 – тұжырымдар негізінде кезектегі тұжырымдарды баяндаймыз.
15 – тұжырым. Айталық G = (V,X) , V={υ_1,…,υ_n}- A = A(G) іргелес матрицалы граф болсын.
Онда $S(G) = \text{sign}(E+A+A^2+\ldots+A^{n-1}) = EvAvA^2{}_{\&}v\ldots vA_{\&}{}^{n-1}$
болады , бұл жерде E – n- ретті бірлік матрица.
16 – тұжырым. Айталық D=(V,X), V = {υ_1,…, υ_n}- A = A(D) іргелес матрицалы бграф болсын.
Онда

1) $T(D) = \text{sign}(E + A + A^2 +\ldots+ A^{n-1}) =$
$EvAvA^2{}_{\&}\, v\ldots v\, A^{n-1}{}_{\&}$;

2) $S(D) = T(D)\ \&\ [T(D)]^T$,

болады , бұл жерде Т – матрицаның транспортирлау операциясын білдіреді. Бұл жерде 15 және 16 – тұжырымдар S(G) , T(D) , S(D) матрицалардың ЭЕМ де есептеуді іске асырудың қарапайым әдісін бейнелейді. Бірақ осы матрицаларды есептеудің бұданда тиімді әдістері бар.

<u>Уоршелл әдісі.</u>

17 – тұжырым. Айталық A G = (V,X) графтың (D = (V,X) бграфтың), мунда V = {υ_1,…, υ_n}, іргелес матрицасы болсын. Элементтері келесі итерационды формулалар арқылы есептелетін n-ретті $B^{(k)}$, к=0,1,…,n бульдік квадрат матрицалар тізбегін қарастырамыз :
$B^{(0)} = A\ v\ E$,
$b_{ij}{}^{(к)} = b^{(к-1)}{}_{ij}\ v\ (b^{(к-1)}{}_{iк}\ \&\ b^{(к-1)}{}_{кj})$,
бұл жерде к = 1,2,…,n.
Онда $S(G) = B^{(n)}$ (және осыған сәйкес $T(D) = B^{(n)}$, $S(D) = T(D)\ \&\ [T(D)]^т$) болады.

Ескерту. Егер 17 – тұжырымда $B^{(0)} = A\ v\ E$ теңдікті $B^{(0)} = E\ v\ \text{sign}\ A$ теңдігіне ауыстырсақ, онда ол кез келген псевдограф (бағытталған және бағытталмаған) үшын орынды болады.

Енді бграфтың күшті байланыс компоненталар санын анықтау және осы компоненталарды айыру алгоритмін қарастырамыз.

Бағытталған графтар үшін байланыс компоненталарын айыру және олардың санын табу мәселесіде осы секілді шешіледі.
Бірақ анықтық үшін талқылауды бграф үшін келтіреміз. Оның үшін кезектегі тұжырымды қолданамыз.
18 – тұжырым. Айталық D $p \geq 2$ компоненталы D_1 , D_2 ,…, D_p күшті байланысты бграф болсын. Онда D дан D_1 де бар болған төбелерді қашықтату нәтижесінде p – 1 компоненталы D_2, D_3 ,…, D_p күшті байланысты бграф аламыз.
19 – тұжырым._Айталық D' – D бграфтың күшті байланыс компонентасы болсын. Тағыда $p(D) \geq 2$ және D'' – D дан D' та бар болған төбелерді қашықтату нәтижесінде алынған бграф болсын . Онда $A(D'')$, $S(D'')$ матрицалар D' бграфтың төбелеріне сәйкес болған $A(D)$, $S(D)$ матрицалардың жол және бағандарын жою (сызу) нәтижесінде алынған ішкі матрицасы болады.
20 – тұжырым. $D = (V,X)$, $V = \{\upsilon_1 ,…, \upsilon_n\}$ – бграфтың күшті байланыс матрицасындағы і – ы жол немесе j – ы баған бірлері D бграфтың υ_i төбені өз ішіне алған күшті байланыс компоненталарының төбелеріне сәйкес келеді.
D бграфтың күшті байланыс компоненталарының саны және осы компоненталар байланыс матрицасын анықтау алгоритімін 18 – 20 тұжырымдар негізінде келтіріп шығарамыз.

Бірінші тәсіл.

1 – қадам. Бастап $p = 1$, $S_1 = S(D)$ деп аламыз ;
2 – қадам. D бграфтағы кезекті D_p күшті байланыстағы компоненталарының V_p төбелер жиынына S_p матриканың бірінші жолындағы бірлерге сәйкес төбелерді қосамыз. $A(D_p)$ ретінде V_p төбелеріне сәйкес $A(D)$ матриканың жолдар және бағандар қиылысында жайғасқан ішкі матриканы аламыз.
3-қадам. S_p матрицадан V_p төбелеріне сәйкес жолдар және бағандарды өшіреміз. Егер осындай өшірулер нәтижесінде бірде бір жол және баған қалмаса, онда p күшті байланысты компоненталар саны және $A(D_1)$,..., $A(D_p)$ матрицалар D бграфтағы D_1,…, D_p күшті байланысты компоненталардың іргілес матрицалары болады. Кері жағдайда S_p дағы қалған жол және бағындарды S_{p+1} арқылы белгілейіз, $p=p+1$ амалды орындаймыз және 2 қадамға өтеміз.

12-лекция

Графтар және амалдар қолдану

1. **Эйлерлік графтар.**
2. **Гамилтондық графтар.**
3. **Графтарда амалдар қолдану.**
4. **Графтарда қашықтықтар.**

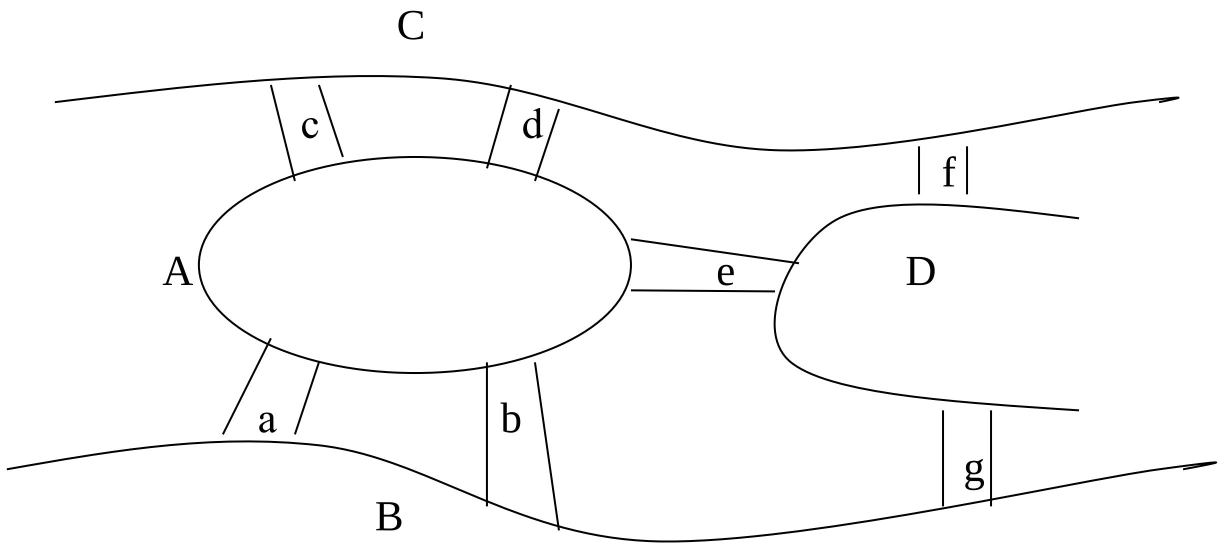
1. Эйлерлік графтар

Графтар теориясында графтардың айналма жолы туралы ұғым бар. Бұл белгілі бір қасиеттерге ие болған барлық қабырғаларды немесе төбелерді жүріп өту жолы.

Графтар айналма жолының танымал мәселесі болып эйлерлік және гамильтондық тізбелер және циклдар туралы мәселелер есептеледі.

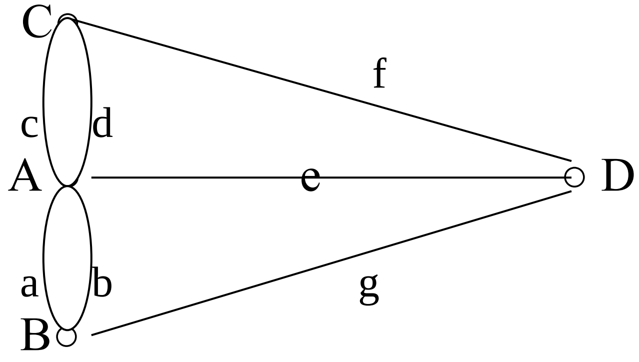
Эйлерлік тізбелер, циклдар , жолдар , контурлар.

Бұл ұғым Эйлердің 1736 жылы жазған Кенигсберг көпірлері туралы мақаласында жарияланған. Кенигсберг қаласы (қазіргі Каленинград) Преголи өзенінің жағалаулары мен ондағы аралдар орналасқан қаланың барлық бөліктері көпірлермен қосылған. Төмендегі сызбада Кенигсбергтегі жеті көпірдің орналасу сұлбасы келтірілген:



Мәселе(Кенигсберг көпірлері туралы).

Әрбір көпірден тек бір рет өтіп алғашқы C нүктесіне қалай жетуге болады (жоғарыдағы сызба).



Кенигсберг көпірлерінен тек бір ретқана өту мәселесін граф турінде кескіндеуге болады. Мұндағы графтың қабырғалары көпірлерге сәйкес келсе , оның төбелері қаланың әртүрлі бөліктерін анықтайды. Жолдың соңында алғашқы нүктеге (қаланың алғашқы бөлігіне) қайта оралу керек болғандықтан және әрбір көпірмен тек бір рет қана өту керектігінен бұл маршрут графтың барлық қабырғаларынан өтетін жай цикл болатындығын көреміз. Мұндай циклдар эйлерлік циклдар, ал оған сәйкес келетін (эйлерлік циклдері бар) графтар эйлерлік графтар деп аталады.

Сонымен эйлерлік граф қалам ұшын қағаз бетінен үзбей бір нүктеден бастап соңында осы нүктемен аяқталатын графты сызып шығу процесі болып есептеледі.

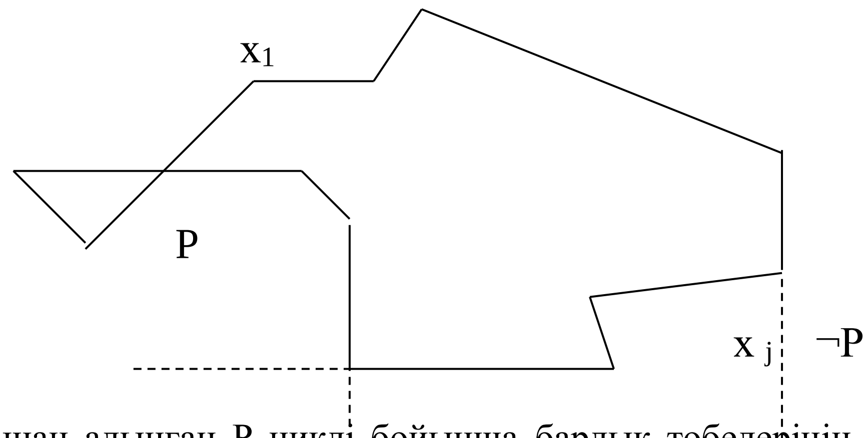
Эйлер бұл мәселеде графтағы барлық қабырғалардан бірақ рет өтетін циклдың жоқ екенін көргеннен соң мәселенің келесі жалпы шешімін тұжырымдады. Қандай жағдайда графта жоғарыда айтылған цикл болуы мумкін? Бұл сұраққа келесі теорема жауап береді.

Теорема (Эйлер теоремасы).

Бағдарланбаған байланысты мультиграфтың Эйлерлік граф болуы үшін оның төбелерінің дәрежесі жұп болуы қажет және жеткілікті.

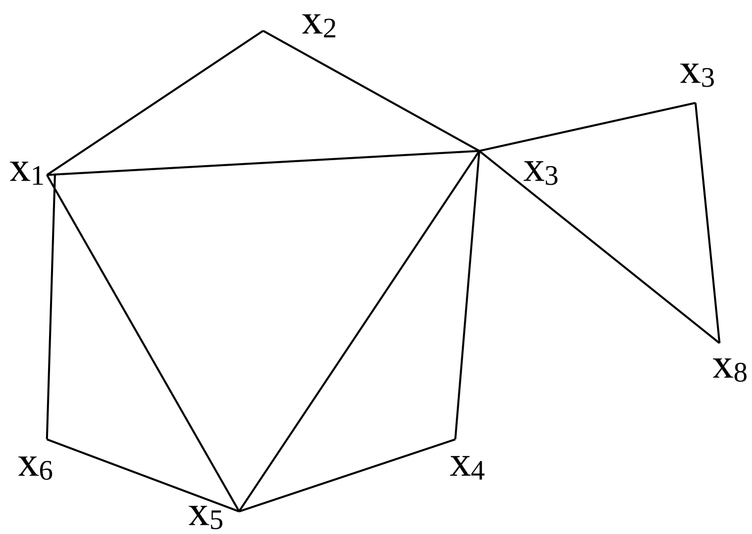
Дәлелдеуі. Эйлерлік цикл кез келген бір төбе арқылы өткен әрбір жағдайда бұл төбеге бір қабырға арқылы кіріп басқа бір қабырға арқылы шығуға тиісті. Сондықтан, тақ дәрежелі төбелердің болмауы Эйлерлік графтар үшін қажетті шарт.

Айталық , графтың барлық төбелері жұп дәрежелі болсын. G графының P тізбесін кез келген x_i төбесінен бастап әр уақытта жаңа қабырға арқылы өтетін барлық мүмкіндіктер бойынша жалғастырайық . Әрбір төбедегі қабырғалар саны жұп болғандықтан бұл процес тек x_i төбесінде аяқталады. Егер P циклі G графының барлық қабырғаларынан өтпейтін болса , онда G графының P циклына сәйкес келмейтін бөлігін алып тастаймыз.



G графынан алынған P циклі бойынша барлық төбелерінің дәрежелері жұп. Ендеше, қалған ¬P графының да төбелерінің дәрежесі жұп болуға тиісті. G графы байланысты болғандықтан P ціклінде ¬P графының қабырғаларымен болатын x_j төбесі табылуға тиісті. Онда, x_j арқылы теккана ¬P графының қабырғаларын қамтитын жаңа P тізбесін құруға болады. Ал, мұндай тізбе теккана x_j-ге оралғанда ғана аяқталады. Онда, P және P^1

графтары үшін x_1 оралатын және қабырғалар саны Р-дан көп болатын жаңа цикл құру мүмкін: $P_1=P(x_I,x_j) \cup P^1(x_j,x_i)$. Егер P_1 эйлерлік цикл болмаса, онда цикл құруды қайталаймыз. Құрылым аяқталғанда міндетті түрде эйлерлік цикл алынады. Осындай эйлерік цикл құру процесі төменде келтірілген. Мысалы, $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_1\}$ және $\{x_3,x_7,x_8,x_3,x_5,x_1,x_3\}$ біріктіру арқылы $\{x_1,x_2,x_3,x_7,x_8,x_3,x_5,x_1,x_3,x_4,x_5,x_6,x_1\}$ эйлерлік цикл аламыз (төмендегі сызба).



Көрмедегі әр бір бөлмені көрсеткіштің көмегімен өту арқылы әрбір экспонатты тек бірретқана көріп өтуге болатын жолдың сызбасын эйлерлік циклді графтың мысалы ретінде қарастыруға болады. Бағдарланбаған G(X) графының барлық қабырғаларын қамтитын және сонымен x_i басы, x_j соңы ($x_i \neq x_j$) болған әртурлі тізбені эйлерлік тізбе деп айтады. Графтарда эйлерлік тізбе байланысты болуы қажет, сонымен қатар x_i және x_j төбелерінен басқа төбелердің дәрежесі жұп болуы міндетті.

Мұнда x_i төбесінен бірақ рет шығып x_j төбесіне бірақ рет енетін болғандықтан олардың дәрежелері тақ болады, бұл шарт эйлерлік тізбенің бар болуының жеткілікті шарты. Теорема дәлелденді.

Келесі сұрақта өте маңызды:

Байланысты G(X) графын көмкеруші (көмкеруші-тізбедегі графтың барлық қабырғаларын қамтұшы) қабырғалар арқылы қилыспайтын тізбелердің ең кіші саны қанша? Бұл сұраққа келесі теорема жауап береді.

Терема . Тақ дәрежелі k төбесі бар бағдарланған байланысты D(X) графын көмкеретін (D(x)-ті) қабырғалар арқылы қиылыспайтын тізбелердің саны к/2-ге тең.

Дәлелдеу. Айталық D(X)-эйлерлік граф болмасын және к оның тақ дәрежелі төбелерінің саны болсын. Жоғарыда k-ның жұп сан болатындығы дәлелденген. Әрбір тақ дәрежелі төбе графты көмкеретін ең болмағанда бір тізбенің ұшы (соңы немесе басы) болуға тиісті. Яғни, мұндай тізбелердің саны к/2-ден кем емес. Енді, осы санның к/2-ден артық болмайтынын көрсетейік. Тақ дәрежелі төбелерді к/2 қабырғалармен біртіндеп қосайық.

Онда, әрбір төбенің дәрежесі бір санға артады да ол жұп болады. нәтижесінде эйлерлік циклі бар эйлерлік граф аламыз. Енді, біртіндеп өзара қосылған қабырғаларды алып тастайық. Бірінші қабырғаны алып тастағанда эйлерлік тізбеге айналады, ал келесі қабырғаны алып тастағанда осыған дейін пайда болған тізбенің біреуі екіге бөлінеді. Сол себепті, бұл тізбелердің жалпы саны к/2 –ге тең болады. Теорема дәлелденді.

Теоремадан, егер бағдарланбаған байланысты мультиграфта тақ дәрежелі x_i және x_j төбелері бар болса, онда x_i-ден басталып x_j-де аяқталатын эйлерлік тізбе табылады. Егер байланысты мультиграф D(X)-тің тақ дәрежелі төрт төбесі болса, онда оны екі түрлі қаламмен сызып шығуға болады.

Егер тақ дәрежелі төбелердің саны k болса, онда бұл графты к/2-түрлі түсті қаламмен сызып шығуға болады. Енді, бағдарланған граф жағдайын қарастырайық. Бағдарланған графта эйлерлік контур болуы үшін оған енетін және одан шығатын доғалардың енуі мен шығуының жарты дәрежесінің тең болуы қажет және жеткілікті, яғни кез келген $x_i \in X$ үшін $\delta^+(x_i)=\delta^-(x_i)$.

Тұжырымның дәлелдеуі бағдарланбаған графтағы теоремаға ұқсас. Кез келген бағдарланбаған графқа сәйкес келетін бағдарланған граф бар болатындығы белгілі. Енді, осы бағдарланбаған графтың әрбір қабырғасын оның төбелерімен инциденттi болатын қарама – қарсы бағытталған екі доғамен ауыстырамыз. Сонда келесі теореманы аламыз.

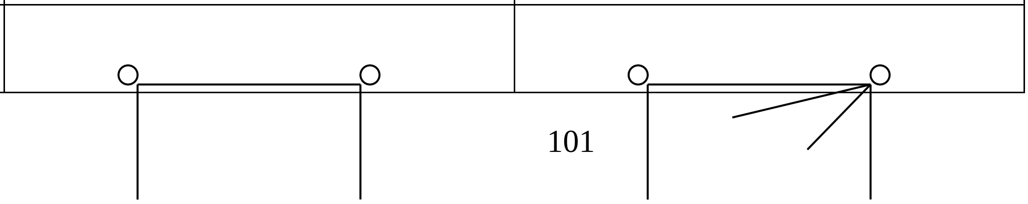
Теорема . Байланысты графта екі бағыттың әрқайсысында әрбір қабырға арқылы бірақ рет өтетін бағдарланған цикл құруға болады. Мұндай цикл графтың қабырғаларын айналып өту әдісі деп аталады. Ол графтарға байланысты барлық қолданбалы мәселелерде қолданылады.

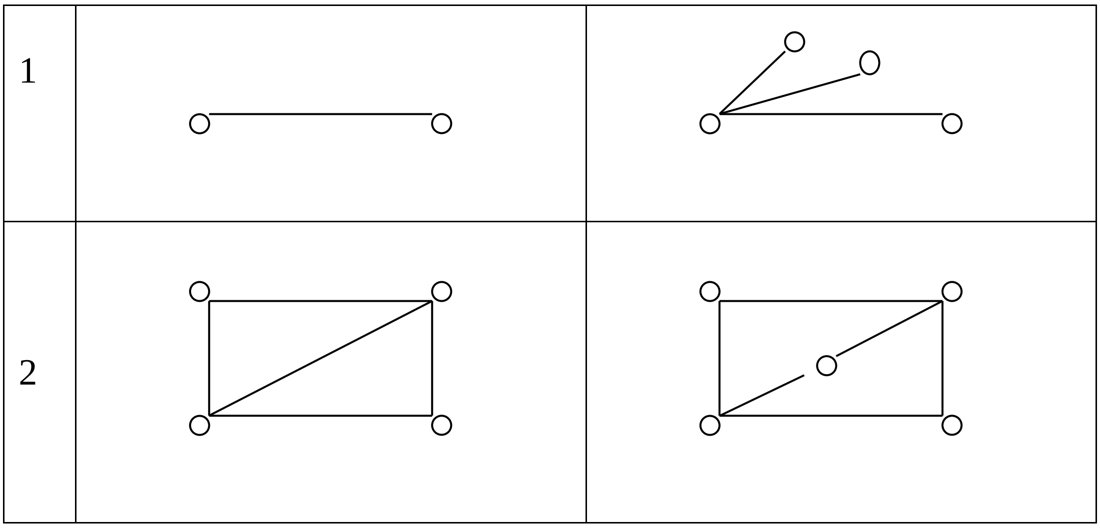
2. Гамильтондық графтар.

Бағдарланбаған графтағы гамильтондық тізбе деп графтың әрбір төбесі арқылы бір-ақ рет, текқана бір-ақ рет өтетін тізбе айтылады. Бағдарланбаған графтағы гамильтондық цикл деп графтың әрбір төбесі арқылы бір рет, текқана бір рет өтетін цикл айтылады. Бағдарланған графтағы гамильтондық жол деп бграфтың барлық төбелері арқылы бір рет, текқана бір рет өтетін $S(x_1,\dots,x_n)$ жол айтылады. Бағдарланған графтағы гамильтондық контур деп оның барлық төбелері арқылы бір рет, текқана бір рет өтетін $M(x_0,x_1,\dots,x_n,x_0)$ контурын айтады.

Гамильтондық цикл туралы көп мәселелер бар: Түскі ас дөңгелек столға жасалған. Шақырылған қонақтардың арасында кейбіреулері достар. Қандай жағдайда барлық қонақтарды, столдың екі жағында әрбір қатысушының (қонақтың) достары отыратындай етіп отырғызуға (орналастыруға) болады?

	1	2





Сызба.4.

Графтардың әртүрлі ойындарда қолдануларында төбелерге позициялар сәйкес келеді. Гамильтондық циклдің бар болуы әрбір позицияны (төбелерді) бір-ақ рет қамтитын жүрістердің циклдік тізбектерінің бар болуымен тең. Оған мысалы белгілі шахмат аты туралы мәселе қарастыруымыз мүмкін. Шахмат тақтасының кез келген өрісінен (клеткасынан) бастап атпенен оның барлық алпыс төрт клеткасын жүріп өтіп бастапқы позицияға (клеткаға) келуге болама?

Гамильтондық циклдерге сол сияқты “Кезбе сатушы тұралы мәселе” жатады. Сатушы сауда жасайтын ауданда n қала бар. Қалалардың бір - бірінен ара қашықтығы белгілі. Барлық қалаларды аралап шығып, қайтадан бастапқы нүктеге әкелетін ең қысқа жолды табу. Бұл есеп экономикада, операцияларды зерттеуде қолданылады, мысалға транспорттық мәселе.

Енді гамильтондық тізбектердің, циклдердің, жолдардың және контурлардың бар болуының бірнеше жеткілікті шарттарын тұжырымдайық.

Айталық $\delta(x_i)$, $\delta(x_j)$ мәндер x_i және x_j төбелерінің дәрежелері болсын. Онда кезектегі тұжырым ақиқат.

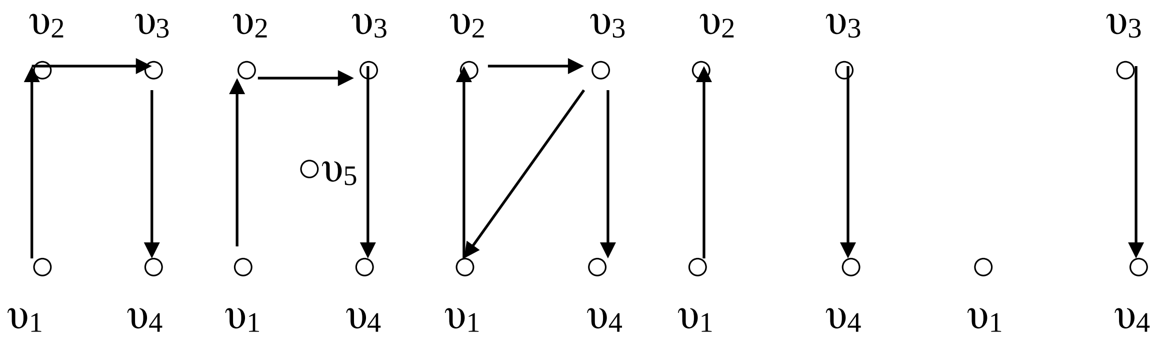
Теорема. Егер n төбесі бар G(X) графында кез келген x_i және x_j төбелері үшін $\delta(x_i)+\delta(x_j)\geq n-1$ теңсіздігі орынды болса, онда G(X) графының гамильтондық тізбесі болады.

Эйлерлік және гамильтондық циклдер анықтамаларының ұқсастығына қарамастан сәйкес теориялардың осы ұғымдарға қатысты ортақтығы шамалы. Эйлерлік циклдің бар болу критериі өте қарапайым, ал гамильтондық цикл үшін осы уақытқа дейін жалпы ереже белгісіз. Сондықтан “Кейбір нақты граф үшін мұндай цикл табу мүмкін ба?”-деген сұрақта туындайды. Әрине, бұл мәселе графтың төбелерінің санына байланысты болғандықтан мәселені барлық мүмкіндіктерді талдау әдісі арқылы шешуге болады, бірақ ең тиімді алгоритм белгісіз. Осы мәселе негізінде АҚШ-ның астанасын осы елдің штаттарымен қосатын ең қысқа әуе жолын Данцич, Джексон және Фалкерсон сияқты математиктер есептен шығарған. Ал ол мемлекет экономикасына осы күнге дейін өте үлкен пайда келтіруде.

3. Графтарда амалдар қолдану.

1. $D_1 = (V_1, X_1)$ бграфқа υ төбені қосу амалы :
   $D = (V_1 \cup \{ \upsilon \}, X_1)$;
2. $D_1 = (V_1, X_1)$ бграфқа (υ , ω) доғаны қосу амалы :
   $D = (V_1 U \{ \upsilon , \omega \}, X_1 \cup (\upsilon , \omega))$;
3. $D_1 = (V_1, X_1)$ бграфтан υ төбені қашықтату амалы :
   $D = (V_1 \setminus \{ \upsilon \} , X_1 \setminus \{(u, \omega) \mid u = \upsilon \vee \omega = \upsilon \})$;
4. $D_1 = (V_1, X_1)$ бграфтан (υ, ω) доғаны қашықтатұ амалы:
   $D = (V_1, X_1 \setminus \{ (\upsilon , \omega) \})$.

Мысал . Төмендегі сызбада D бграфқа υ_5 төбені қосу арқылы D_1 , (υ_3, υ_1) доғаны қосу арқылы D_2 , (υ_2, υ_3) доғаны қашықтату арқылы D_3 және υ_2 төбені қашықтату арқылы D_4 бграфтар алынған:

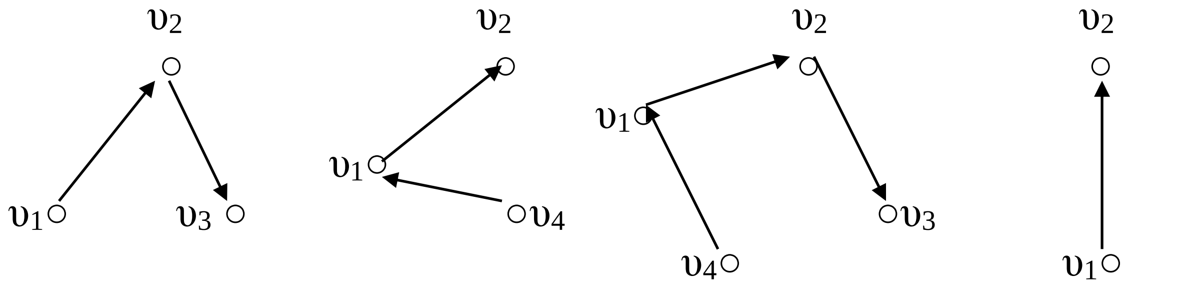


D D1 D2 D3 D4

1. $D_1 = (V_1 , X_1), D_2 = (V_2 , X_2)$ бграфтардың <u>бірігуі</u> деп $D=D_1\cup D_2= (V_1 \cup V_2 , X_1 \cup X_2)$ бграфқа айтылады;

6. $D_1 = (V_1 , X_1) , D_2 = (V_2 , X_2)$ бграфтардың <u>қиылысуы</u> деп $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$ болған $D= D_1 \cap D_2 = (V_1 \cap V_2 , X_1 \cap X_2)$ бграфты айтамыз.

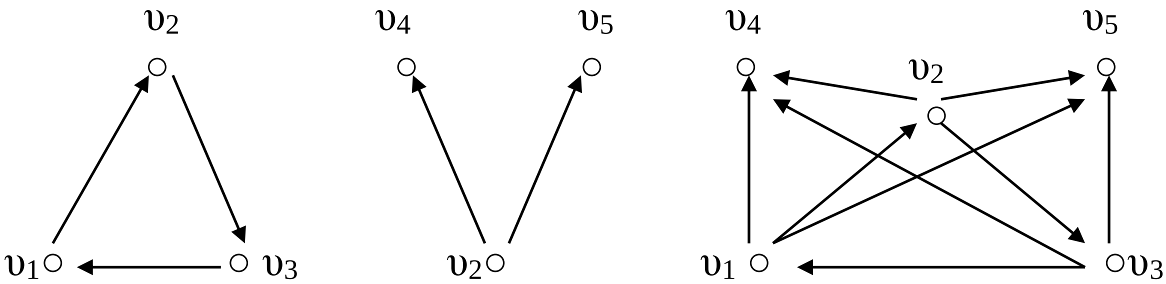
Мысал. Төмендегі сызбада $D_1 = (\{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\}, \{(\upsilon_1,\upsilon_2), (\upsilon_2,\upsilon_3)\}$ және $D_2=(\{\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_4\}, \{(\upsilon_1,\upsilon_2), (\upsilon_4,\upsilon_1)\}$ бграфтардың бірігуі және қиылысуы бейнеленген :



D_1 D_2 $D_1\cup D_2$ $D_1\cap D_2$

7. $D_1= (V_1, X_1)$, $D_2=(V_2,X_2)$ бграфтардың қосындысы:
$D=(V_1\cup V_2,\ X_1\cup X_2\cup \{(\upsilon,\omega)|\upsilon \in V_1,\ \omega \in V_2,\ \upsilon \neq \omega \})$.

Мысал. Төмендегі сызбада $D_1 = (\{\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3\}, \{(\upsilon_1,\upsilon_2),(\upsilon_2,\upsilon_3),(\upsilon_3,\upsilon_1)\})$ және $D_2=(\{\upsilon_2,\upsilon_4,\upsilon_5\},\{(\upsilon_2,\upsilon_4),(\upsilon_2,\upsilon_5)\})$ бграфтардың қосындысы бейнеленген :



D_1 D_2 D_1+D_2

G графтың <u>ішкі графы</u> (бұдан былай <u>ішграф</u> деп айтылады) деп барлық төбелері және қабырғалары текқана G графтың төбе және қабырғалары ішінен алынған графқа айтамыз.

Егер ішграф графтың өзінен айрықша болса, онда оны <u>меншікті</u> деп айтамыз. $G = (V,X)$ графтың G_1 ішграфы $V_1 \in V$ ($V_1\neq \emptyset$) ішкі жиынмен <u>туылған</u> деп айтылады , егер $G_1 = (V_1 , X_1)$ графтың X_1 жиын – қабырғаларының уштары V_1 де жатып тек қана G графтың қабырғаларынан құралған болса .

Айтылған барлық анықтамалар бграфтарғада орынды.

<u>**8 – тұжырым.**</u> Айталық $G = (V,X)$ – граф берілген болсын және $G_1 = (V_1,X_1)$, $V_1 \in V$, $V_1 \neq \emptyset$, - V_1 ішкі жиынмен туылған G графтың ішграфы болсын. Онда $A(G_1)$ матрица V_1 ден алынған төбелерге сәйкес, жолдар және бағандар қиылысында жайғасқан $A(G)$ матрицаның ішкі матрицасы болады.

Бұл тұжырым кез келген псевдограф(бағытталған , бағытталмаған) үшін ақиқат.

4. Графтарда қашықтықтар.

Айталық $G = (V,X)$ – граф (жалпы жағдайда псевдограф) берілген болсын. Егер $\upsilon,\omega \in V$, $\upsilon \neq \omega$ төбелер болса, онда екі төбені жалғастыратын маршрут бар және олардың ішінен минимал маршрут табу мүмкіндігін байқаймыз. Шынында, егер $к_1$ ұзындықтағы q_1 маршрут минимал болмаса, онда $к_2 < к_1$ ұзындықтағы q_2 маршрут табылады. Егер q_2 маршрут минимал болмаса, онда $к_3 < к_2$ ұзындықтағы q_3 маршрут бар болады және т.б.

Осы секілді маршруттардың ұзындығын кемітуді $(к_1–1)$ ретке дейін ғана мүмкіндігін көру қиын емес, себебі өте минимал маршруттың ұзындығы бірге тең. Соның үшін G да υ,ω төбелерді қосатын минимал маршрут міндетті түрде табылады.

Осы маршруттың ұзындығын $d(\upsilon,\omega)$ арқылы белгілейміз. Сонымен кез келген $\upsilon \in V$ төбе үшін $d(\upsilon,\upsilon)=0$.Тағыда кез келген $\upsilon,\omega \in V$ үшін G да υ,ω $(\upsilon \neq \omega)$төбелерді қосатын маршрут болмаса, онда $d(\upsilon,\omega) = +\infty$ немесе $d(\upsilon,\omega) = \infty$ ретінде жазамыз. Сонымен кез келген $\upsilon,\omega \in V$ төбелер үшін $d(\upsilon,\omega)$ шаманы анықтадық.

Осы $d(\upsilon,\omega)$ – шаманы <u>υ , ω төбелер арасындағы қашықтық</u> деп айтамыз.

$d(\upsilon,\omega)$ қашықтық метрикалық аксиомаларды қанағаттандырады:

1.$d(\upsilon,\omega) \geq 0$, бұл жерде $d(\upsilon,\omega) = 0$ теңдік $\upsilon = \omega$ болғанда және тек сонда ғана орынды ;

2. $d(\upsilon,\omega) = d(\omega,\upsilon)$;
3. $d(\upsilon,\omega) \leq d(\upsilon,u) + d(u,\omega)$, бұл жерде υ,u,ω – G графтың кез келген төбесі ;
4. $d(\upsilon,\omega) < \infty$.

<u>Граф диаметрі, радиусы және орталығы.</u>

Айталық $G = (V,X)$ – байлаынсты граф немесе жалпы жағдайда псевдограф болсын.

1. Онда $d(G) = \max\limits_{\upsilon,\omega \in V} d(\upsilon,\omega)$

шекті шама болады және G графтың <u>диаметрі</u> деп айтылады.

2. Егер $\upsilon \in V$ кез келген төбе болса, онда

$$r(\upsilon) = \max_{\omega \in V} d(\upsilon,\omega)$$

шекті шама G графтағы υ төбенің максимал эксцентриситетті (алыстағы) нүктесі деп айтылады.

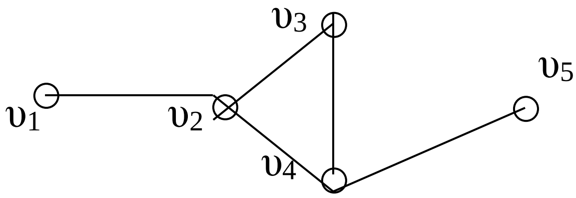
3. G графтың <u>радиусы</u> деп

$$r(G) = \min_{\upsilon \in V} r(\upsilon)$$

шаманы айтамыз.

4. Кезкелген $\upsilon \in V$ үшін $r(\upsilon) = r(G)$ болған төбе G графтың <u>орталығы</u> деп айтылады.

19 – мысал. 16 – сызбада бейнеленген G граф үшін : $d(G) = 3$, $r(\upsilon_1) = 3$, $r(\upsilon_2) = 2$, $r(\upsilon_3) = 2$, $r(\upsilon_4) = 2$, $r(\upsilon_5) = 3$, $r(G) = 2$; υ_2, υ_3, υ_4 – G графтың орталықтары.



16-сызба.

13-лекция
Ағаштар және оның қасиеттері.

1. **Ағаштар. Негізгі ұғымдар және анықтамалар.**
2. **Ағаштарда вектор-циклдар.**
3. **Мультиграфтың циклді базисі.**
4. **Цикломатикалық матрица.**

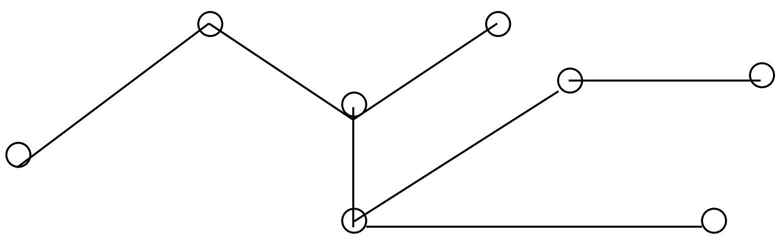
---

1. Ағаштар. Негізгі ұғымдар және анықтамалар.

Егер G граф байланысты, бірақ цикл болмаса оны <u>ағаш</u> деп айтамыз.

Барлық байланыс компоненталары ағаш болған G граф <u>орман</u> деп айтылады.

27 – мысал: 23 – сызбада бейнеленген G граф ағаш болады.



23 – сызба .

Ағаштардың қасиеттері.

Кезектегі тұжырымдар ақиқат:

a) Сызбадағы G граф ағаш болады ;
b) G граф – байланысты және жәй циклға ие емес ;
c) G граф байланысты және оның қабырғалары төбелер санынан дәл бір санға кем ;
d) G графтың кез келген екі төбесін тек жалғыз бір тізбек арқылы жалғастыру мүмкін ;
e) G графта цикл жоқ, бірақта оған кез келген бір қабырға қосу арқылы дәл бір ғана жәй цикл (қосылған қабырға арқылы өтетін) алу мүмкін.

33 – тұжырым. Егер G ағаштың кемінде бір қабырғасы болса, бұл ағашта аспалы төбе әлбетте табылады.

34 – тұжырым. Айталық, G байланысты граф, υ – осы графтағы аспалы төбе, G1 – G графтан υ төбе және оған инцидент болған қабырғаны қашықтату арқылы алынған граф болсын. Онда G1 – байланысты граф болады.

Ескерту. 34 – тұжырым кез келген G псевдограф үшын өз күшін сақтайды.

35 – тұжырым. Айталық G – n төбелі және m қабырғалы ағаш болсын. Онда m = n-1.

36 – тұжырым. Айталық G1 – граф ағаш болсын. Егер G граф G1 графқа жаңа υ төбені және $\{\upsilon,\omega\}$ қабырғаны, бұл жерде ω – G1 графтан алынған төбе, қосу нәтижесінде алынған болса, онда G – ағаш болады.

37 – тұжырым. Айталық, G = (V,X) m қабырғалы, n төбелі байланысты граф және сонымен m = n-1 теңдік орындалатын болсын. Онда G ағаш болады.

38 – тұжырым. G – ағаш болса, онда G дағы кез келген тізбек жәй тізбек болады.

39 – тұжырым. (a) тұжырымның ақиқат болуы үшін (d) тұжырымның орындалуы қажет және жеткілікті.

40 – тұжырым. (a) тұжырымның ақиқат болуы үшін (e) тұжырымның орындалуы қажет және жеткілікті.

Байланысты графтың бұтақ ағашы.

12-анықтама. Барлық төбелері G графтың төбелерінен құралған және ағаш болатын кез келген ішграф G байланысты графтың бұтақ ағашы деп айтылады.

Егер G байланысты граф болса, онда 35 – тұжырымға сәйкес G графтың бұтақ ағашы (егер ол бар болса) n(G) – 1 қабырғадан құралған болуы қажет. Сондықтан G графтың кез келген бұтақ ағашы G дан дәл m(G) – (n(G) – 1) = m(G) – n(G)+1 қабырғаны қашықтату нәтижесі болады.

Осы m(G) – n(G)+1 сан байланысты G графтың цикломатикалық саны деп айтылады және ν(G) арқылы белгіленеді.

Енді кез келген байланысты G = (V,X) псевдограф үшін бұтақ ағаштың бар екендігін көрсетеміз.

Алгоритм № 6.

1 – қадам. G псевдографтың ішграфы және ағаш болған G_1 ді құрайтын G дағы кез келген u_1 төбені таңдаймыз. Айталық i=1 болсын.

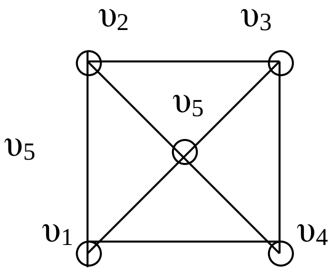
2 – қадам. Егер i=n болса, бұл жерде n=n(G), онда G_i – ізделінген G ағаш бұтағы болып есептеледі. Басқа жағдайда 3 – қадамға өтеміз.

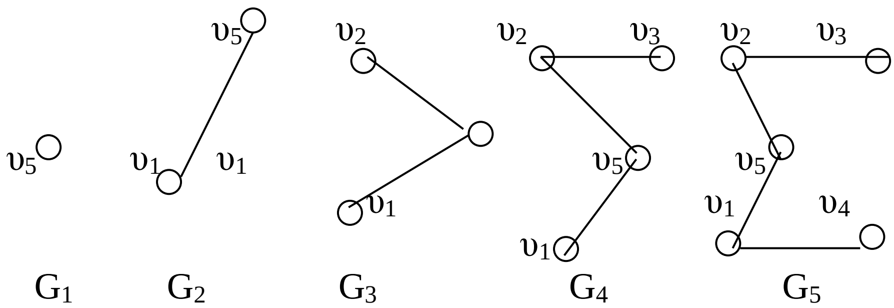
3 – қадам. Айталық G псевдографтың ішграфы және $u_1,\ldots,u_i$ $(1 \le i \le n\text{-}1)$ төбелерге ие болған G_i ағаш құрылған болсын.

Енді G_i графқа $u_{i+1} \in V$ жаңа төбе және $\{u_{i+1}, u_j\}$ жаңа қабырғаны қосып G_{i+1} граф құрамыз, бұл жерде u_{i+1} төбе G_i графтағы u_j төбеге іргелес. 36 – тұжырымға сәйкес G_{i+1} граф ағаш болады. i: = i+1 амалды орындап 2 – қадамға өтеміз.

Ескерту. Жалпы айтқанда байланысты графтың бұтақ ағашы тек бірғана әдіс арқылы алынбайды. Байланысты граф бұтақ ағаштарының саны жалпы өте үлкен болуы мүмкін. Мысалы n төбелі толық граф үшін ол n^{n-2} ге тең.

28 – мысал. № 6 – алгоритм негізінде 25 – сызбада бейнеленген G графтың бұтақ ағашын айырамыз. 26 – сызбада алгоритм негізінде алынған G_i , i=1,2,3,4,5 графтар тізбегі келтірілген. Сонда , n(G) = 5 болғанда G графтың ағаш бұтағы G_5 болады.





25 – сызба. 26 – сызба.

Тиелген графтардың минимал бұтақ ағаштары.

Айталық байланысты G = (V,X) графтың әр бір $x \in X$ қабырғасына $\ell(x)$ – қабырқа ұзындығы сәйкес қойылған, яғни G тиелген граф болсын.

Анықтама. Байланысты тиелген G граф бұтақ ағашының өзінде болған қабырғалар ұзындықтары қосындысы минимал болған ағаш G графтың минимал бұтақ ағашы (МБА) деп айтылады.

Енді G граф үшін МБА табу алгоритімін келтіреміз.

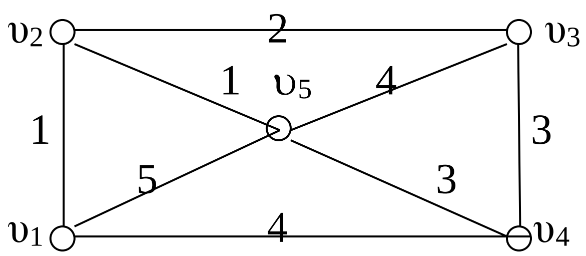
Алгоритм № 7. (Байланысты тиелген G графтан МБА ны бөлу):

1 – қадам. G графта минимал ұзындықтағы қабырға айырып аламыз. Ол өзіне инцидентті болған төбемен G_2 ішграфты құрайды. i = 2 болсын.

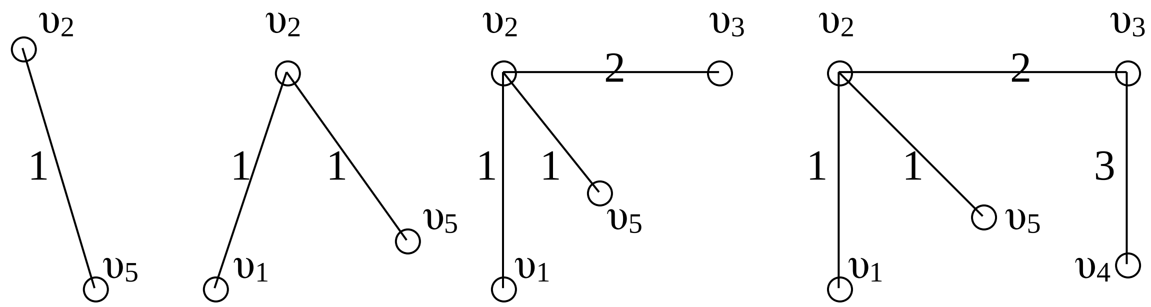
2 – қадам. Егер i = n болса (n = n(G)), онда G_1 – ізделінген МБА деп қабылданып, мәселе соңына жетеді. Басқа жағдайда 3 – қадамға өтеміз.

3 – қадам. Енді G_i де жатпайтын, G_i графтағы қалайда бір төбеге инцидентті болған және G графтың барлық қабырғалары ішінен таңдалған минимал ұзындықтағы жаңа қабырғаны G_i графқа қосып G_{i+1} граф құраймыз. Осы қабырғамен бірге оған инцидентті болған, бірақ G_i де жатпайтын төбеніде G_{i+1} ге енгіземіз. i:=i+1 орындап 2 – қадамға өтеміз.

29 – мысал. 27 – сызбада бейнеленген G тиелген графтың МБА сын алгоритм негізінде анықтаймыз. 28 - сызбада алгоритмді орындау нәтижесінде алынған G_i, i = 2, 3,4,5 графтар тізбегі келтірілген. Бұл жерде n(G)=5 болғандықтан G графтың МБАсы G_5 болады.



27- сызба



28 – сызба.

2. Ағаштарда вектор - циклдар.

Айталық G = (V,X) – мультиграф берілген болсын, бұл жерде X = $\{x_1,\ldots,x_m\}$, $m \geq 1$. X қабырға үшін кез келген бағдар енгіземіз, яғни әр бір x = $\{\upsilon,\omega\} \in X$ қабырғаны не $x' = (\upsilon,\omega)$, не $x' = (\omega,\upsilon)$ болған x' доғаға аустырамыз. Нәтижеде берілген G = (V,X) мультиграфтан D= (V,X') – бағытталған мультиграф аламыз.

Енді G мультиграфтағы кез келген

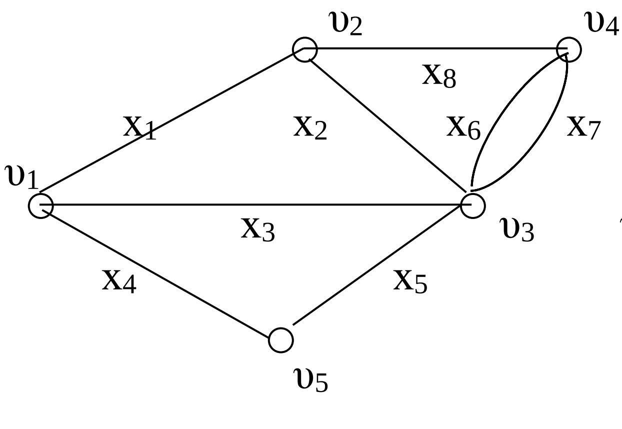
$$\mu = \upsilon_1 y_1 \upsilon_2 y_2, \ldots, \upsilon_k y_k \upsilon_1 \qquad (27)$$

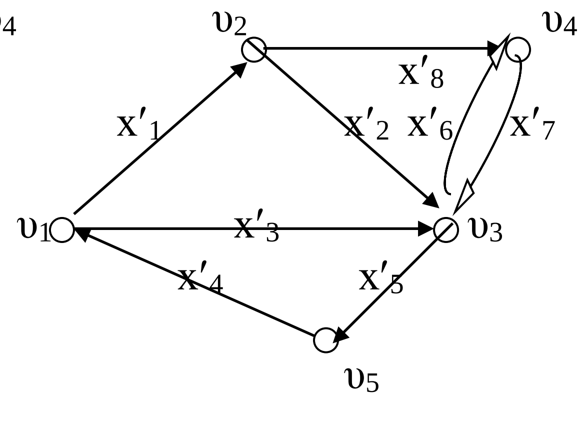
циклды қарастырамыз, бұл жерде $y_i = \{\upsilon_i, \upsilon_{i+1}\} \in X$, $i=1,2,\ldots,k$, $k \geq 2$, сонымен $\upsilon_{k+1} = \upsilon_1$. (27) жазылу μ циклдың әрбір $y_i = \{\upsilon_i, \upsilon_{i+1}\}$ қабырға арқылы υ_i төбеден υ_{i+1} төбеге бағыт бойынша қозғалуын білдіреді. Бұл жерде μ циклді $y_i = \{\upsilon_i, \upsilon_{i+1}\}$ таңдалған бағдар бойынша бағытталған қабырға арқылы өтеді деп айтамыз, егер $y_i' = (\upsilon_i, \upsilon_{i+1})$ болса. Басқа жағдайда, яғни $y_i' = (\upsilon_{i+1}, \upsilon_i)$ болса, μ цикл қарама – қарсы таңдалған бағдар бойынша бағытталған қабырға арқылы өтеді деп айтылады.

Айталық Z^m – бүтін санды координаталы m өлшемді векторлар жиыны және μ – G мультиграфтағы өзіне тиісті қабырға арқылы таңдалған бағыт бойынша өтетін қайсыбір цикл болсын.

13-анықтама. Егер $C(\mu) \in Z^m$ вектордың $C_i(\mu)$ i – ы координатасы $C_i^+(\mu) - C_i^-(\mu)$ айырмаға тең болса, онда оны вектор- цикл деп айтылады. Бұл жерде $C_i^+(\mu)$ – μ циклдағы x_i қабырға арқылы таңдаулы бағдарланған бағыт бойынша өту саны, $C_i^-(\mu)$ – сондай бағдар бйынша қарама – қарсы бағыттағы өту саны.

30 – мысал. Айталық G = (V,X) (29а) – сызбада бейнеленген мультиграф болсын. G мультиграфтың қабырғаларына бағдар енгіземіз. Нәтижеде 29б-сызбада бейнеленген D – бағытталған мультиграф құралады.





29 – сызба.

G мультиграфтағы кейбір циклдарды қарастырамыз:

$\mu_1 = \upsilon_1 x_1 \upsilon_2 x_2 \upsilon_3 x_3 \upsilon_1$;

$\mu_2 = \upsilon_1 x_3 \upsilon_3 x_2 \upsilon_2 x_8 \upsilon_4 x_7 \upsilon_3 x_2 \upsilon_2 x_1 \upsilon_1$;

$\mu_3 = \upsilon_1 x_3 \upsilon_3 x_2 \upsilon_2 x_1 \upsilon_1 x_4 \upsilon_5 x_5 \upsilon_3 x_2 \upsilon_2 x_1 \upsilon_1$;

$\mu_4 = \upsilon_1 x_4 \upsilon_5 x_4 \upsilon_1$;

$\mu_5 = \upsilon_3 x_7 \upsilon_4 x_6 \upsilon_3$.

Онда

$C(\mu_1) = (1,1,-1,0,0,0,0,0)$;

$C(\mu_2) = (-1,-2,1,0,0,0,1,1)$;

$C(\mu_3) = (-2,-2,1,-1,-1,0,0,0)$;

$C(\mu_4) = (0,0,0,0,0,0,0,0);$

$C(\mu_5) = (0,0,0,0,0,-1,-1,0).$

G мультиграфтағы барлық вектор-циклдар жиынын Z_G^m арқылы белгілейміз.

Егер $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_к$ циклдар және $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_к$ рационал сандар үшін

$$C(\mu) = \alpha_1 C(\mu_1) + \ldots + \alpha_k C(\mu_k) \qquad (28)$$

теңдік орындалса, онда μ цикл $\mu_1,..., \mu_к$ циклдардың сызықты комбинациясы деп айтылады. Бұл жерде $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \in Q$, Q – рационал сандар жиыны.

Кейбір кездерде қолайлық үшін (28) теңдікті

$$\mu = \alpha_1 \mu_1 + \ldots + \alpha_k \mu_k \quad (29)$$

ретінді жазу қабылданған.

$\bar{O}$ арқылы Z^m дегі нөлдік векторды белгілейміз (яғни $\bar{O} = (0,0,\ldots,0) \in Z^m$).

Егер $\{\mu_1,\ldots, \mu_k\}$ циклдар жүйесіне сәйкес болған вектор-циклдар жүйесі сызықты тәуелсіз болса (яғни, егер кез келген $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k \in Q$ үшін $\alpha_1 C(\mu_1) + \ldots + \alpha_k C(\mu_k) = 0$ теңдіктен $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ келіп шықса), оны тәуелсіз циклдар жүйесі деп айтамыз. Бұл жерде $Z_G^m \in Q^m$ (Q^m – m өлшемді сызықты кеңістік) болғандықтан тәуелсіз циклдар жүйесіндегі элементтердің максимал саны m нен аспаун атап өткен жөн.

Тағыда, егер $\{\mu_1,\ldots,\mu_e\}$ – тәуелсіз циклдар жүйесі және μ_{e+1} цикл оның сызықты комбинациясы болмаса, онда $\{\mu_1,\ldots,\mu_e, \mu_{e+1}\}$ – тәуелсіз циклдар жүйесі болады.

3. Мультиграфтың циклді базисы.

G мультиграфтан алынған кез келген цикл сызықты комбинациялы болса $\{\mu_1,\ldots, \mu_k\}$ тәуелсіз циклдар жүйесі G мультиграфтың циклды базисы деп айтылады.

Енді G мультиграфта циклді базистің бар болу мәселесін қарастырамыз.

G мультиграф ациклдық деп айтылады, егер не m=0, не $Z_G^m = \{0\}$, яғни G да жәй циклдар жоқ болса.

Осыдан ациклдық мультиграфта циклдік базистер жоқ екендігін көрү мүмкін.

41 – тұжырым. Егер G мультиграф циклді болса, онда G құрамында циклді базис болады.

Кез келген мультиграфтың циклді базисін табу мәселесі:

Алгоритм № 8. Айталық G байланысты мультиграф болсын.

Егер $\nu(G) = 0$ болса, онда G – ациклды мультиграф болады, демек циклды базис жоқ .

Енді $\nu(G) > 0$ болсын. Онда G мультиграфтан T бұтақ ағаш айырып аламыз.

Айталық $n = n(G)$, $m = m(G)$, $x_1,\ldots,x_{n-1}$ – T дағы қабырғалар, ал $x_n,\ldots,x_m$ – G мультиграфтың басқа қабырғалары болсын.

Бұл жерде $\nu(G) > 0$ болғандықтан $n \geq 2$, $m \geq n$ теңсіздіктер орындалатындығын байқау қиын емес. Сонғы қабырғалар саны $m - n + 1$ ге тең, яғни $\nu(G)$ сәйкес келеді. Енді T ағашқа кез келген бір x_i $i=n,\ldots,m$, қабырғаны қосу арқылы G мультиграфтан қосылған x_i қабырғадан өтетін және $\mu_{i-(n-1)}$ – жәй цикл болған ішграф айырып аламыз.

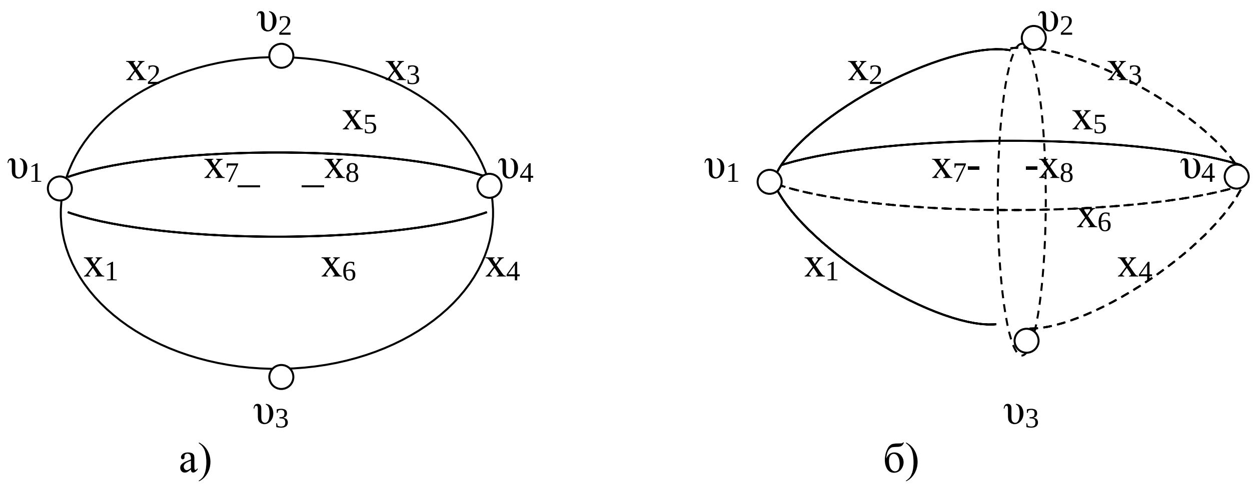
Осындай тәсілмен $\{\mu_1,\ldots,\mu_{m-n+1}\}$ жәй циклдар жиынын табамыз. Осы жүйенің әр бір циклында басқа циклдарда болмаған қабырға қатысқандықтан табылған циклдар жүйесі тәуелсіз болады. Демек, біз G мультиграфтың циклді базисі болған $\nu(G)$ элементті тәуелсіз циклдар жүйесін таптық.

31 – мысал. № 8 алгоритм негізінде 31а – сызбада бейнеленген G мультиграфтың циклді базисін табамыз. Мынаған иеміз:

$$\nu(G) = m(G) - n(G) + p(G) = 8\text{-}4+1 = 5 > 0,$$

яғни G мультиграф ішінде циклді базис бар.

G мультиграфтан кез келген T ағаш бұтағын айырып аламыз. 31б – сызбада T бұтақ ағашын айырып алуда G мультиграфтағы қашықтатылған қабырғалар пунктирлік сызықтар арқылы көрсетілген.



31 – сызба

T бұтақ ағашын айырып алуда G байланысты мультиграфтан барлығы $\nu(G) = 5$ қабырға, яғни x_3,x_4,x_6,x_7,x_8 қабырғалар қашықтатылған. Осы қабырғаларды T ға біртіндеп қосу арқылы G мультиграфтың циклді базисын құрайтын жәй циклдерге ие боламыз:

$\mu_1 = \upsilon_1 x_2 \upsilon_2 x_3 \upsilon_4 x_5 \upsilon_1$; $\mu_2 = \upsilon_1 x_5 \upsilon_4 x_4 \upsilon_3 x_1 \upsilon_1$;

$\mu_3 = \upsilon_1 x_5 \upsilon_4 x_6 \upsilon_1$; $\mu_4 = \upsilon_1 x_2 \upsilon_2 x_7 \upsilon_3 x_1 \upsilon_1$;

$\mu_5 = \upsilon_1 x_2 \upsilon_2 x_8 \upsilon_3 x_1 \upsilon_1$.

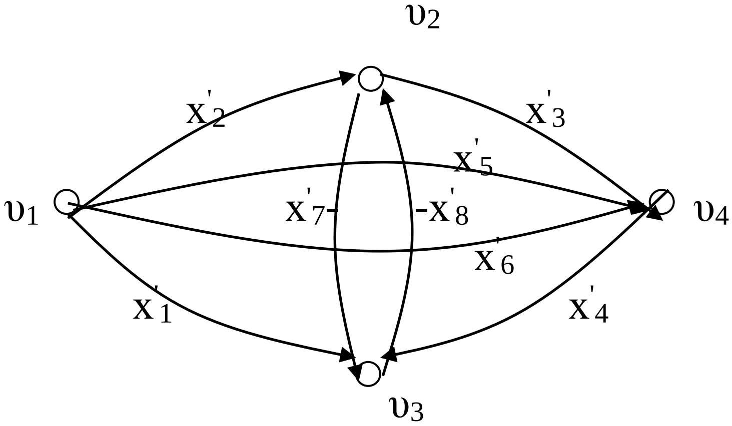
Осы алгоритмнің сипаттамасынан алгоритм нәтижесінде алынған G мультиграфтың циклді базисі барлық уақыт жәй циклдардан құралатындығын көру мүмкін .

4.Цикломатикалық матрица.

Айталық G ациклды болмаған мультиграф, яғни $\nu(G) > 0$ болсын.

14-анықтама. Жолдары G мультиграф циклді базисінің вектор-циклдары болған $\nu(G) * m(G)$ өлшемді $C(G)$ матрица G ның <u>цикломатикалық</u> матрицасы деп айтылады.

32 – мысал. 31-мысалда қарастырылған G мультиграф үшін цикломатикалық матрица анықтаймыз. G мультиграф қабырғаларына бағыт енгіземіз. Нәтижеде 32 – сызбада бейнеленген бағытталған мультиграф аламыз.



32 – сызба.

Енді 31 – мысалда табылған, G мультиграф циклді базисына сәйкес вектор-циклдарды жазамыз

$C(\mu_1) = (0,1,1,0,-1,0,0,0);$
$C(\mu_2) = (-1,0,0,1,1,0,0,0);$
$C(\mu_3) = (0,0,0,0,1,-1,0,0);$
$C(\mu_4) = (-1,1,0,0,0,0,1,0);$
$C(\mu_5) = (-1,1,0,0,0,0,0,-1).$

Онда

$$C(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Егер $\{\mu_1,\ldots,\mu_\nu\}$ – алгоритм бойынша байланысты G мультиграфтан алынған циклді базис және $C(G)$ – осы мультиграфтың цикломатикалық матрицасы болса, онда T бұтақ ағашына кірмейтін қабырғаларға сәйкес $C(G)$ матрицаның бағандарынан бас диогонал элементтері текқана $\{-1,1\}$ жиынға тиісті болған $\nu(G)$ реттік квадрат матрица құру мүмкін. Мысалда нүктелі сызық арқылы көрсетілген бөліктер осы матрицаны құрайды. Бұл нақты факт әр бір μ_i жай циклда өзінен басқа циклда жатпайтын қабырға бар екендігін білдіреді.

14-лекция
Графтарды қолдану

1. **Графтарда қуат және ток үшін Кирхгоф теңдеулері.**
2. **Графтарда ішкі және сыртқы тұрақтылық.**
3. **Графтарда транспорттық желілер.**
4. **Транспорттық желілерде толық және максимал ағын.**

---

1. Графтарда қуат және ток үшін Кирхгоф теңдеулері.

Айталық S электр желісі өткізгіштер арқылы қосылған $a_1,...,a_m$ екі полюстік элементтерден құралған болсын (бұл жерде $a_1,...,a_m$ кедергілер, конденсаторлар, индуктивтер, тоқ шығу көздері және т.б. болу мүмкін).

S электр желісіне G = G(S) мультиграфты сәйкестендіреміз. Бұны іске асыру үшін тізбекте қосылған элементтердің әр бір j – шы түйініне υ_j төбені, ал әр бір a_i элементке x_i қабырғаны сәйкес қоямыз.

Мультиграф қабырғаларына өз қалаумызша бағдар енгіземіз. Нәтижеде G мультиграфтан x'_1, x'_2,..., x'_m доғалары болған бағытталған D мультиграф алынады.

Әр бір i(i = 1,2,…,m) нөмір үшін a_i элементтен өтетін тоқ шамасын I_i арқылы, ал a_i элемент полюстары арасындағы қуатты U_i арқылы белгілейміз.

Бұл жерде тоқ бағытын барлық уақыт алдын ала болжау мүмкін болмағандықтан G мультиграфтан еңгізілген қабырғалар бағдарын тоқ бағыты ретінде шартты түрде қарастырамыз. Онда I_i анықталғаннан соң осы шаманың белгісі a_i элемент бойынша
($i\in\{1,2,\ldots,m\}$) тоқтың шын бағытын көрсетеді. Осы сияқты U_i шаманың белгісіде x_i қабырғада таңдалған бағдар бойынша анықталады, атап айтқанда U_i деп x'_i доғаның басталуына сәйкес келетін a_i элементтің полюс потенциалынан осы доғаның соңына сәйкес полюс потенциалын айыру нәтижесіндегі шаманы түсінеміз (бұл жерде i=1,2,…,m). Сонымен қатар S электр желісіндегі ток және қуаттарды сәйкесінше $I=(I_1,\ldots,I_m)$ және $U=(U_1,\ldots,U_m)$-векторлар арқылы белгілейміз. Тағыда бұл жерде R^m нен алынған кез келген $A=(A_1,\ldots,A_m)$, $B=(B_1,\ldots,B_m)$ векторлар үшін векторлардың скаляр көбейтіндісін

$$(A,B)=\sum_{i=1}^{m} A_i B_i$$

арқылы белгілейміз.

Егер μ-G мультиграфтың кез-келген тізбесі болса, онда Кирхгоф заңы бойынша қуат үшін $(C(\mu),U)=0$ болады. Онда
кез келген $C\in Z_G^m$ үшін , $(C,U)=0$ (36) теңдік ақиқат, бұл жерде Z_G^m-G мультиграфтың барлық вектор-циклдар жиыны.

(36)-теңдеу U ға салыстырма ретінде қуат үшін Кирхгоф теңдеулері деп айтылады. Сонда

$$C(G)*U=0 \quad (37)$$

теңдеулер жүйесін қуат үшін Кирхгофтың базистік теңдеулер жүйесі деп айтамыз. Бұл жерде C(G) матрицаның рангі (37) дегі теңдеулер санына тең болғандықтан олар сызықты үйлесімсіз. Екінші жағынан C(G)ның анықтамасы бойынша (36) теңдіктен алынған кез келген теңдеу (36) базис жүйесі теңдеулерінің сызықты комбинациясы болады. Базистік теңдеулер жүйесінің қасиеттерінен электр тізбесінің маселелерінде “Қуат үшін Кирхгофтың базистік теңдеулер жүйесі”ні қолдану өте тиімді болатындығын көру қиын емес.

33-мысал. S электр желісі үшін (33а-сызба) “Қуат үшін Кирхгофтың базистік теңдеулер жүйесін” анықтаймыз. S электр желісіне G граф (33б-сызба) сәйкес келеді. Бұл жерде x_i қабырға r_i кедергіге (i=1,2,3,4,5), ал x_6 қабырға тоқ шығу желісіне сәйкестелінген. G граф қабырғаларына бағдар еңгіземіз. Нәтижеде D бграф алынады (33в-сызба). G графтан T бұтақ ағашын айырып аламыз (33г-сызба). №8-алгоритм бойынша G графтың циклдар базисін анықтаймыз. G графтан T бұтақ ағашын айыру кезінде барлығы үш қабырға бөлінеді: x_2, x_4, x_5, яғни $\nu(G)=3$ (33г-сызбада пунктир сызықтармен белгіленген). T бұтақ ағашына әр бір қабырғаны біртіндеп қосып және сол сияқты графтан жәй циклдарды айыра отырып, G графтың мынадай циклді базистеріне ие боламыз:

$\mu_1= \upsilon_1 x_1 \upsilon_2 x_2 \upsilon_3 x_6 \upsilon_1$;
$\mu_2=\upsilon_1 x_3 \upsilon_4 x_4 \upsilon_3 x_6 \upsilon_1$;
$\mu_3= \upsilon_1 x_1 \upsilon_2 x_5 \upsilon_4 x_3 \upsilon_1$.

Осыларға сәйкес вектор-циклдарды жазамыз:
$C(\mu_1)=(1,1,0,0,0,1)$;
$C(\mu_2)=(0,0,-1,1,0,1)$;
$C(\mu_3)=(1,0,1,0,-1,0)$;

Онда

$$C(G)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

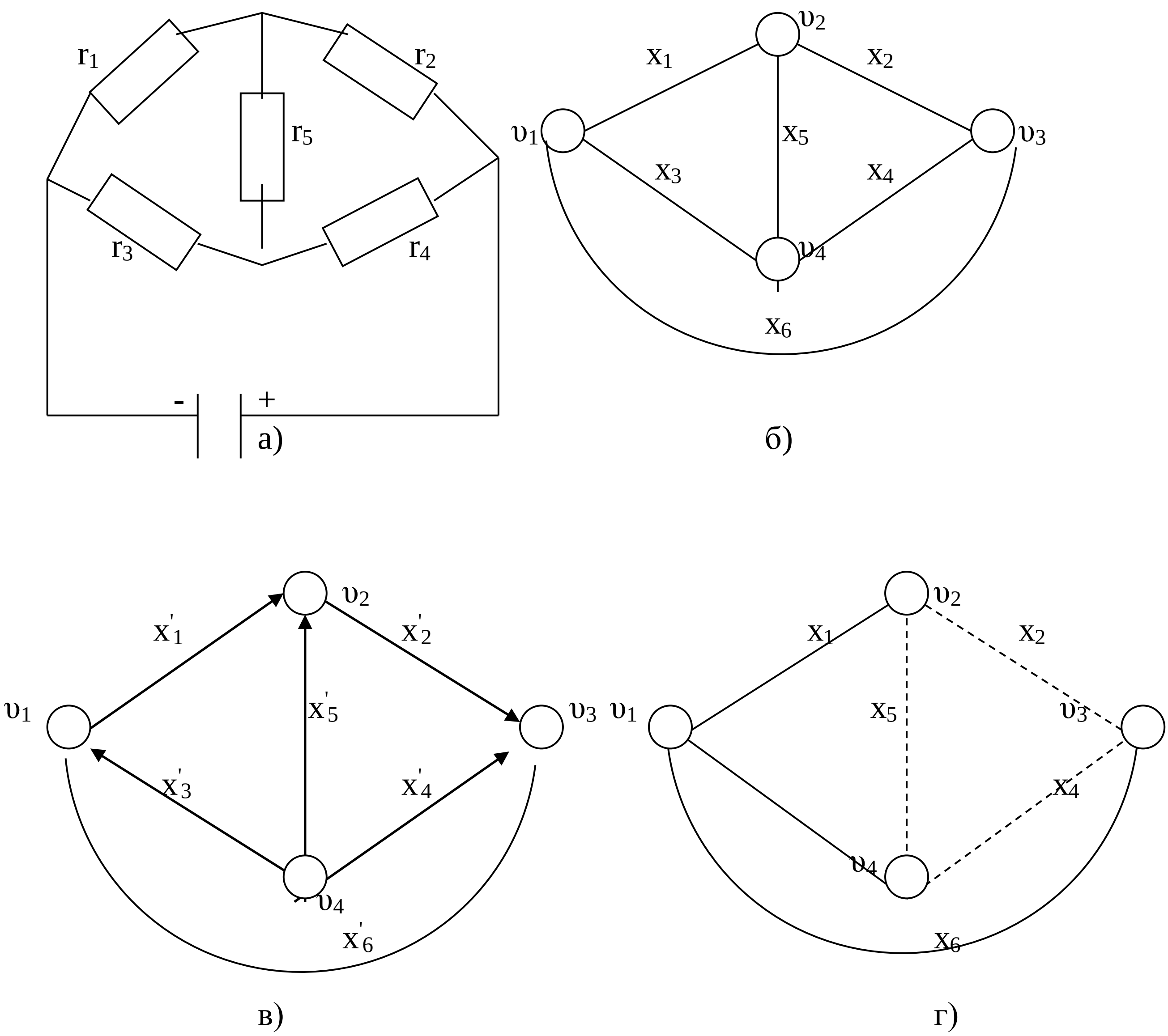
және сонымен $C(G)*U=0$ қуат үшін Кирхкофтың базисті теңдеулер жүйесі мынадай болады

$$\begin{cases} U_1+U_2+U_6=0 \\ -U_3+U_4+U_6=0 \\ U_1+U_3-U_5=0 . \end{cases}$$

Бұл жерде Т бұтақ ағашына кірмеген және x_2 ,x_4 ,x_5 қабырғаларға сәйкес C(G) цикломатикалық матрица бағандары (олар нүктелі сызықтар арқылы көрсетілген) бас диогонал элементтері {-1,1} жиынына тиісті болған ν(G) ретті квадраттық матрица құрайды. Сондықтан x_2, x_4, x_5 қабырғаларға сәйкес болған U_2, U_4, U_5 айнымалылар арқылы оңай өрнектеледі:

$$\begin{cases} U_2=-U_1-U_6 \\ U_4= U_3-U_6 \\ U_5= U_1+U_3 . \end{cases} \qquad (38)$$

(38) теңдеулер жүйесіндегі U_2,U_4,U_5 айнымалылар базисті, ал U_1,U_3,U_6- еркін айнымалылар деп айтылады.



33-сызба

Ток үшін Кирхгоф теңдеулері.

Електр желілерінің есебі үшін тек бірғана қуат үшін Кирхгоф теңдеулері жеткілікті емес. Сондықтан ток үшін Кирхгоф теңдеулерін қарастырамыз.

Айталық S электр желісіне G мультиграф сәйкестелінген болсын. Тағыда қабырғаларға бағыт еңгізу арқылы D бағытталған мультиграф құрастырылған. Ток үшін Кирхгоф теңдеулері бағытталған D мультиграфтың әр бір төбесіне сәйкес құрастырылады. Бұл теңдеулердің математикалық өрнектелу факты S электр тізбесінің құрылу кезеңінде осы желіге кіретін токтар қосындысы одан шығатын токтар қосындысына тең болуын бейнелейді. Сол себептен бағытталған D мультиграфтың шартты бағдарланған токтарын есепке алсақ S желідегі ток үшін Кирхгофтың барлық теңдеулер жүйесі мынадай болады:

$$B(D) * I = 0 ,$$

бұл жерде B(D)-бағытталған D мультиграфтың инциденттілік матрицасы.

34-мысал. 33.а-сызбада келтірілген электр желісіндегі ток үшін Кирхгоф теңдеулерінің жиынтығын анықтаймыз. 33в-сызбадағы бағытталған D бграфқа сәйкес төмендегідей матрица құрастырамыз:

$$B(D)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Онда $B(D) * I = 0$ ток үшін Кирхгофтың теңдеулер жүйесі мынадай болады

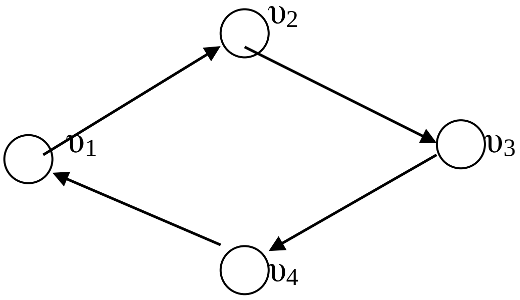
$$\begin{cases} -I_1 + I_3 + I_6 = 0 \\ I_1 - I_2 + I_5 = 0 \\ I_2 + I_4 - I_6 = 0 \\ -I_3 - I_4 - I_5 = 0 \end{cases}$$

Бұл жерде B(D) матрицаның анықтамасынан кез келген бағытталған D мультиграф үшін B(D) матрицаның барлық жолдар қосындысы нөльдік жолды беретіндігі келіп шығады. Сондықтан B(D) матрицаның кез келген жолы басқа жолдардың сызықты комбинациясы болады.

2. Графтардағы ішкі және сыртқы тұрақтылық

15-анықтама. Айталық D=(V,X) бграф берілген болсын. Егер кез келген $\upsilon \in U$ үшін, $U \cap D(\upsilon) = \varnothing$ (40) , яғни D бграфта *U* дан алынған қандай болмасын екі төбені жалғастыратын доғалар болмаса, онда $U \in V$ жиын <u>іштен тұрақты</u> деп айтылады.

Мысал-35. 38-сызбада бейнеленген D бграф үшін $U_1=\{\upsilon_1\}$, $U_2=\{\upsilon_1,\upsilon_3\}$, $U_3=\{\upsilon_2,\upsilon_4\}$ жиындар іштен тұрақты болады. Ал $U_4=\{\upsilon_1,\upsilon_2\}$ жиын іштен тұрақты емес, өйткені D бграфта (υ_1,υ_2) доға бар. Егер іштен тұрақты жиын U ға кез келген $\upsilon\in V\backslash U$ төбені қосу арқылы іштен тұрақты болмаған жиын алсақ, онда $U\in V$ максимал іштен тұрақты жиын деп айтылады. Көбінесе практикалық мәселелерді шешу кезінде максимал төбелері болған іштен тұрақты жиындарды табу талап етіледі. Ал оларды максимал іштен тұрақты жиындар арасынан іздеу қажет.



38-сызба

Мысал-36. 35-мысалда келтірілген U_1, U_2, U_3 жиындардан пайдаланамыз. Бұл жерде $U_1=\{\upsilon_1\}$ жиын максимал іштен тұрақты жиын болмайды, өйткені U_1 жиынға υ_3 төбені қоссақ тағыда іштен тұрақты болған U_2 жиын аламыз. Біракта U_2, U_3 жиындар максимал іштен тұрақты болады.

$\sigma(D)$ арқылы D бграфтың барлық максимал іштен тұрақты төбелер жиынын белгілейміз. Онда

$$\alpha(D)=\max_{U\in\sigma(D)} |U|$$

D бграфтың ішкі тұрақтылық саны деп айтылады.

Максимал іштен тұрақты жиындар үйірін табудың Магу әдісі .

Айталық $D=(V,X)$-бграф берілген болсын, бұл жерде $X\neq\varnothing$, $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$. Тағыда D бграфтан алынған U жиынды ($U\in V$) қарастырамыз және $\upsilon_i(i=1,2,\ldots,n)$ төбелерге сәйкес Y_i бульдік айнымалылар еңгіземіз.

$\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_n\}$ айнымалылар тізімінің бағаларын $<\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n>$ ретінде қарастырамыз, бұл жерде

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, \text{ егер } \upsilon_i\in U; \\ 0, \text{ егер } \upsilon_i \neg\in U, \ i= 1,2,\ldots,n. \end{cases} \qquad (41)$$

Тағыды (40) шарт кез келген $i,j\in \{1,2,\ldots,n\}$ ушін

$$[\upsilon_i\in U, \upsilon_j\in D(\upsilon_i)] \Rightarrow \upsilon_j \neg\in U$$

орындалуға эквивалент екендігін ескереміз. Ал (41) шарт бойынша ол тағыда кез келген $i,j\in \{1,2,\ldots,n\}$ үшін,

$$(\varepsilon_i \ \& \ a_{ij}) \rightarrow \neg\varepsilon_j=1 \qquad (42)$$

теңдеуге тең болады, бұл жерде a_{ij}-A(D) іргелес матрицаның (i,j)-ы элементі.

(42) теңдеудің сол жағын дизъюнкцияға түрлендірсек кез келген $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ үшін,

$$\neg a_{ij} \vee \neg \varepsilon_i \vee \neg \varepsilon_j = 1 \qquad (43)$$

теңдеуге ие боламыз.(43) шартты мынадай жазуға болады:

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} \mathop{\&}_{j=1}^{n} (\neg a_{ij} \vee \neg \varepsilon_i \vee \neg \varepsilon_j) = 1 \quad . \qquad (44)$$

Осы теңдеуден $a_{ij}=0$ болғанда $\neg a_{ij} \vee \neg \varepsilon_i \vee \neg §_j = 1$ теңдіктің барлық уақыт орындалуын байқаймыз, ал $a_{ij}=1$ болғанда $\neg a_{ij} \vee \neg \varepsilon_i \vee \neg \varepsilon_j = \neg \varepsilon_i \vee \neg \varepsilon_j$ ақиқат. Сондықтан (44) шартты мынадай жазуға болады:

$$\mathop{\&}_{aij=1} (\neg \varepsilon_i \vee \neg \varepsilon_j) = 1$$

немесе $$F(Y_1,\ldots,Y_n) = \mathop{\&}_{a_{ij}=1} (\neg Y_i \vee \neg Y_j),$$

$$F(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) = 1. \qquad (45)$$

Сонымен біз төмендегі тұжырымның ақиқат екендігін көрсеттік.

51-тұжырым: $U \in V$ жиынның іштен тұрақты болуы үшін $<\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n>$ бағалар (41) шартты қанағаттандырғанда (45) теңдеудің орындалуы қажет және жеткілікті.

Магу әдісі .

D бграф төбелерінің максимал іштен тұрақты жиынын табу үшін төмендегідей амалдар орындалады:

1) F логикалық формуланы & және v үшін дистрибутивтік заңдар негізінде д.қ.ф.да бейнелейміз;

2) Осы д.қ.ф. да төмендегі теңдіктер негізінде мүмкін болғанша қысқарту амалдарын орындаймыз:

Av(A&B)=A,

AvA=A, A&A=A, (46)

ABvA¬B=A,

(AvB)&(AvC)&…&(AvD)=AV(B&C&…&D),

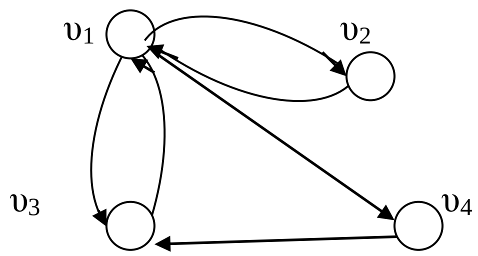
бұл жерде A,B,C,…,D-логикалық алгебраның кез келген формуласы.

3) Табылған д.қ.ф. дағы әр бір $\neg Yi_1 \& \neg Yi_2 \& \ldots \& \neg Yi_k$ мүшеге максимал іштен тұрақты $V \setminus \{\upsilon_{i1}, \upsilon_{i2},\ldots,\upsilon_{ik}\}$ жиынды сәйкес қоямыз. Сонда – $\{j_1,\ldots,j_l\}=\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}$, $k+l=n$, $U=\{\upsilon_{j1}, \upsilon_{j2},\ldots,\upsilon_{jl}\}$. Сонымен Магу әдісі арқылы табылған кез келген жиын D бграф төбелерінің максимал іштен тұрақты жиыны болады және ол барлық максимал іштен тұрақты жиынды бейнелейді.

Мысал-37. Магу әдісін қолданып, 39-сызбада бейнеленген D бграф төбелерінің максимал іштен тұрақты жиынын анықтаймыз.

Осы сызбаға сәйкес іргелестік матрицасын жазамыз.

$$A(D)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



39-сызба

Сонда

$$\underset{a_{ij}=1}{\&}(\neg Y_i \vee \neg Y_j)=(\neg Y_1 \vee \neg Y_2)\&(\neg Y_1 \vee \neg Y_3)\&(\neg Y_1 \vee \neg Y_4)\&(\neg Y_2 \vee \neg Y_1)\&$$

$(\neg Y_3 \vee \neg Y_1)\&(\neg Y_4 \vee \neg Y_3) = (\neg Y_1 \vee \neg Y_2)(\neg Y_1 \vee \neg Y_3)(\neg Y_1 \vee \neg Y_4)(\neg Y_4 \vee \neg Y_3) = (\neg Y_1 \vee \neg Y_2 \neg Y_3 \neg Y_4)(\neg Y_4 \vee \neg Y_3) =$
$\neg Y_1 \neg Y_4 \vee \neg Y_1 \neg Y_3 \vee \neg Y_2 \neg Y_3 \neg Y_4 \neg Y_4 \vee \neg Y_2 \neg Y_3 \neg Y_4 \neg Y_3 = \neg Y_1 \neg Y_4 \vee \neg Y_1 \neg Y_3 \vee \neg Y_2 \neg Y_3 \neg Y_4$.

Сонымен әрі қарай (46) теңдіктер арқылы қысқартуға мүмкін болмаған д.қ.ф. құрастырылады. Демек D бграф төбелерінің ізделінген максимал іштен тұрақты жиыны $\{\upsilon_3,\upsilon_2\},\{\upsilon_2,\upsilon_4\},\{\upsilon_1\}$ болады және бұл жерде $\alpha(D)=2$.

Бағытталған графтарда сыртқы тұрақтылық .

Айталық D=(V,X) бграф берілген болсын.

16-анықтама. Егер кез келген $\upsilon \in V \setminus U$ үшін,

$$U \cap D(\upsilon) \neq \varnothing \quad (48)$$

шарт орындалса, яғни U ға тиісті болмаған кез келген $\upsilon \in V$ төбе U дан алынған доғалар басталуының кемінде бір төбесіне байланысты болса, онда $U \in V$ жиын сырттан тұрақты жиын деп айтылады.

Мысал-38. 38-сызбада берілген D бграф және $U_1=\{\upsilon_1\}$, $U_2=\{\upsilon_1,\upsilon_3\}$, $U_3=\{\upsilon_2,\upsilon_4\}$, $U_4=\{\upsilon_1, \upsilon_2\}$, $U_5=\{\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3\}$ жиындардан U_2,U_3,U_5 жиындар сырттан тұрақты болады.

17-анықтама. Егер $U \in V$ сырттан тұрақты жиыннан кез келген бір төбені алу нәтижесінде сырттан тұрақты болмаған жиын құралса, онда U минимал сырттан тұрақты жиын деп айтылады.

Көбінесе практикалық мәселелерді шешу кезінде сырттан тұрақты жиындардың төбелері минимал санды болған жиынды табу өте қажет болып есептеледі. Ал олар минимал сырттан тұрақты жиын ішінен табылады.

Мысал-39. 38-мысалдағы U_2,U_3 минимал сырттан тұрақты жиындар болып есептеледі. Ал U_5 жиын минимал емес, себебі U_5 жиыннан υ_2 төбені алу нәтижесінде тағыда сырттан тұрақты болған U_2 жиын құралады.

$\psi(D)$ арқылы D бграфтың барлық минимал сырттан тұрақты төбелер жиынын белгілейміз. Онда

$$\beta(D) = \min_{U\in \psi(D)} |U|$$

сан D бграфтың сырттан тұрақтылық саны деп айтылады.

Минимал сырттан тұрақты жиындар үйірін табудың Магу әдісі.

Айталық $V=\{\upsilon_1,\dots,\upsilon_n\}$ болған $D=(V,X)$ бграф және D дан алынған кез келген $U\in V$ төбелер жиыны берілген болсын. Тағыда алдынғы тақырыпта қолданылған $Y_1,\dots,Y_n$ бульдік айнымалыларға сәйкес $<\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n>$ бағалар тізімінен пайдаланамыз.

Бұл жерде сырттан тұрақты U жиынның анықтамасындағы (48) шарт кез келген $i\in\{1,2,\dots,n\}$ үшін кемінде төмендегі шарттардың біреуіне теңдес екенін байқаймыз:

1) $\upsilon_i\in U$
2) $U\cap D(\upsilon_i) \neq \varnothing$ (яғни $j\in\{1,2,\dots,n\}:\upsilon_j \in U, \upsilon_j\in D(\upsilon_i)$)

және тағыда (41) шарт бойынша

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n}[\varepsilon_i \vee \bigvee_{j=1}^{n} (a_{ij}\& \varepsilon_j)] = 1 \qquad (49)$$

теңдеуге эквивалент ($[a_{ij}] = A(D)$).

Егер әр бір белгіленген i нөмірде барлық $j\in\{1,2,\dots,n\}$ нүктелер $a_{ij}=1$ болатын мәндер жиыны деп қабылдасақ, онда (49) шартты мынадай жазуға болады:

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} (\varepsilon_i \vee \bigvee_{aij=1} \varepsilon_j) = 1$$

немесе $F(Y_1,\dots,Y_n)=\mathop{\&}_{i=1}^{n} (Y_i \vee \bigvee_{aij=1} Y_j)$

$$F(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) = 1. \qquad (50)$$

Сонымен біз мынадай тұжырымның ақиқат екендігін көрдік.

52-тұжырым. $U\in V$ жиын сырттан тұрақты болуы үшін (41) және (50) шарттардың орындалуы қажет және жеткілікті.

Магу әдісі.

D бграф төбелерінің минимал сырттан тұрақты жиынын табу үшін төмендегідей амалдар орындалады:

1) F логикалық формуланы & және V амалдарына сәйкес дистрибутивтік заңдар негізінде д.қ.ф. ретінде бейнелейміз.

2) Алынған д.қ.ф. ны (46) теңдіктер бойынша қысқарту амалдарын орындаймыз.

3) Табылған д.қ.ф. дағы әр бір мүше $Yi_1\&Yi_2\&\ldots\&Yi_k$ үшін сәйкес болған $\{\upsilon i_1,\ldots,\upsilon i_k\}$- минимал сырттан тұрақты жиынды аламыз.

Магу әдісі арқылы табылған кез келген жиын D бграф төбелерінің минимал сырттан тұрақты жиыны болады және ол барлық минимал сырттан тұрақты жиындарды бейнелейді.

Мысал-40. 37-мысалдағы D бграфтың барлық минимал сырттан тұрақты төбелер жиынын Магу әдісі арқылы анықтаймыз. (50) шарт бойынша:

$$\mathop{\&}_{i=1}^{4}(Y_i v \mathop{\mathbf{V}}_{aij=1} Y_j)=(Y_1vY_2vY_3vY_4)\&(Y_2vY_1)\&(Y_3vY_1)\&(Y_4vY_3)=$$

[(46) және (47) теңдіктерді қолданамыз]

$=(Y_2vY_1)\&(Y_3vY_1)\&(Y_4vY_3)=(Y_1vY_2Y_3)(Y_4vY_3)=Y_1Y_4vY_1Y_3v\ Y_2Y_3Y_4\ v\ Y_2Y_3\ Y_3= Y_1Y_4\ v\ Y_1Y_3\ v\ Y_2Y_3$.

Сонымен әрі қарай (46) теңдіктер арқылы қысқартуға мүмкін болмаған д.қ.ф. алынады. Демек D бграф төбелерінің ізделінген минимал сырттан тұрақты жиыны $\{\upsilon_1,\upsilon_4\}$, $\{\upsilon_1,\upsilon_3\}$, $\{\upsilon_2, \upsilon_3\}$ және $\beta(D)=2$.

Бағытталған граф ядросы .

Айталық D=(V,X) бграф берілген. Егер $N\in V$ жиын бір уақытта іштен және сырттан тұрақты жиын болса, яғни

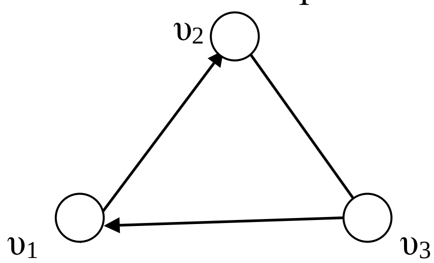
1) кез келген $\upsilon\in N$ ушін, $N\cap D(\upsilon) = \varnothing$;

2) кез келген $\upsilon\in V \setminus N$ ушін, $N\cap D(\upsilon)\neq \varnothing$

шарттар орындалса N жиын D бграфтың ядросы деп айтылады. Бграфта ядро болмауы да, біреу немесе бірнеше болуы да мүмкін. Егер D бграф N ядроға ие болса, онда барлық уақыт $\beta(D) \leq |N| \leq \alpha(D)$ теңсіздік ақиқат болады.

Мысал-41. 40-сызбада бейнеленген бграфты қарастырамыз.

Ол ядроға ие емес. Кез келген бір төбелі жиын сырттан тұрақты, ал кез келген екі немесе үш төбелі жиын іштен тұрақты болалмайды.



40-сызба

Мысал-42. 38-сызбада бейнеленген және 35, 36, 38, 39-мысалдарда қарастырылған D бграфтың ядролары U_2, U_3 болады.

Теорема. $N\in V$ жиын D=(V,X) бграфтың ядросы болуы үшін ол бір уақытта максимал іштен тұрақты және минимал сырттан тұрақты болуы қажет және жеткілікті.

Теорема бойынша D бграф ядросын айырып алу үшін D бграфтағы барлық минимал сырттан тұрақты төбелер жиынынан ішкі түрақты жиынды таңдау жеткілікті болады.

3. Графтарда транспорттық желілер ұғымы

18-анықтама. $V=\{\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n\}$ төбелер жиынына ие болған D=(V,X) бграф транспорттық желі деп айтылады, егер мынадай шарттар орындалса:

1) <u>көз</u> деп аталатын $D^-(\upsilon_1)=\varnothing$ болған, яғни бірде бір доға кірмейтін тек біреуғана υ_1 төбе бар;

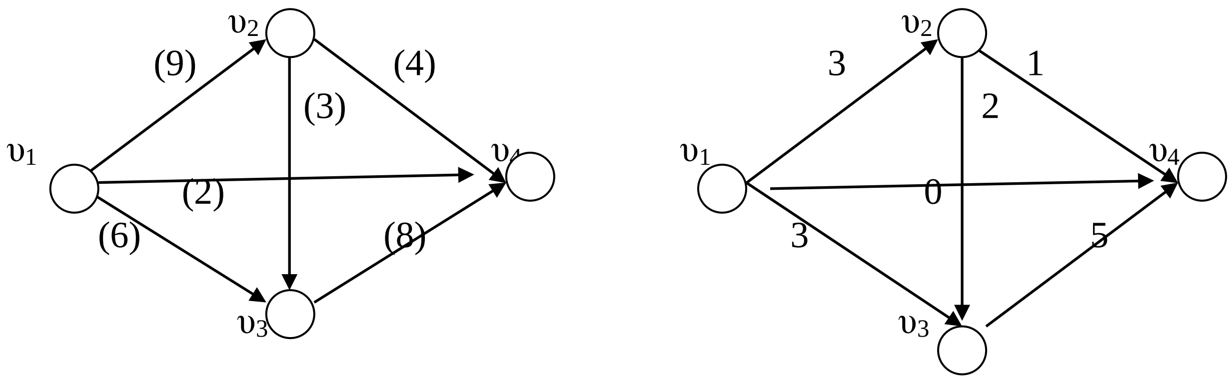
2) <u>соңы</u> деп аталатын $D^+(\upsilon_n)=\varnothing$ болған, яғни бірде бір доға шықпайтын тек біреуғана υ_n төбе бар;

3) әр бір $x\in X$ доғаға "доғаның өткізу қабилеті" деп аталатын $c(x)\geq 0$ бүтін сан сайкес қойылған.

Транспорт желісіндегі көз және соңы болмаған төбелер аралық төбелер деп айтылады.

Мысал-52. $46_а$-сызбада υ_1-көзі, υ_4-соңы, υ_2, υ_3-аралық төбелері болған транспорттық желі көрсетілген.

Әр бір доғада жақшадағы сан арқылы оның өткізу қабілеті жазылған.



а) б)

46-сызба

<u>Транспорттық желідегі ағын</u>

19-анықтама. D транспорттық желінің X доғалар жиынында анықталған және бүтін санды мәндер қабылдайтын $\varphi(x)$ ф-я үшін

1) кез келген $x \in X$ үшін x доға бойынша ағын деп аталатын $\varphi(x)$ шама $0 \leq \varphi(x) \leq c(x)$ шартты қанағаттандырса;

2) кез келген υ аралық төбелер үшін

$$\sum_{\omega \in D^-(\upsilon)} \varphi(\omega,\upsilon) - \sum_{\omega \in D^+(\upsilon)} \varphi(\upsilon,\omega) = 0$$

теңдік орындалса, яғни υ төбеге кіретін доғалар бойынша ағын қосындысы, осы төбеден шығатын доғалар бойынша ағын қосындысына тең болса, онда $\varphi(x)$ функцияны D транспорттық желінің мумкіндік ағыны деп айтылады.

Мысал-53. $46_б$-сызбада транспорттық желінің мүмкіндік ағыны көрсетілген. Әр бір доғада ағын шамасы жазылған. Бұл жерде “мұмкіндік ағын” анықтамасында көрсетілген барлық шарттар орындалатындығы айқын.

56-тұжырым. D транспорттық желідегі кез келген φ мүмкіндік ағын үшін

$$\sum_{\upsilon \in D^+(\upsilon_1)} \varphi(\upsilon_1,\upsilon) = \sum_{\upsilon \in D^-(\upsilon_n)} \varphi(\upsilon,\upsilon_n) \qquad (58)$$

теңдік ақиқат.

Тағыда φ мүмкіндік ағын анықтамасынан

$$\sum_{\upsilon \in V \setminus \{\upsilon_1,\upsilon_n\}} \Big[\sum_{\omega \in D^-(\upsilon)} \varphi(\omega,\upsilon) - \sum_{\omega \in D^+(\upsilon)} \varphi(\upsilon,\omega) \Big] = 0 \qquad (59)$$

теңдік орынды.

D транспорттық желідегі υ_n төбеге кіретін барлық доғалар бойынша ағындар қосындысына және сол секілді υ_1 төбеден шығатын барлық доғалар бойынша ағындар қосындысына тең болған φ^* шама φ ағынның шамасы деп айтылады және мынадай есептеледі:

$$\varphi^* = \sum_{\upsilon \in D^-(\upsilon_n)} \varphi(\upsilon,\upsilon_n) = \sum_{\upsilon \in D^+(\upsilon_1)} \varphi(\upsilon_1,\upsilon).$$

Айталық D транспорттық желінің φ-мүмкіндік ағыны берілген болсын. Егер $x \in X$ доға ағыны өзінің өткізу қабілетіне тең, яғни $\varphi(x)=c(x)$ болса, онда x қанық доға деп айтылады.

4. Транспорттық желілерде толық және максимал ағындарды табу мәселесі

20-анықтама. Егер D транспорттық желінің υ_1 төбеден υ_n төбеге баратын кемінде бір қанық доғаға ие болған кез келген бір жолы табылса, онда φ толық ағын деп айтылады. Егер D транспорттық желінің ағын шамасы басқа мүмкіндік ағындарға салыстырғанда ең ұлкен φ^* мән қабылдаса, онда оны максимал ағын деп айтылады.

Барлық максимал ағындар толық болады. Ал кері жағдай болуы мүмкін емес. Бірақта толық ағынды максимал ағынға жұқық ретінде қарастыруымыз мүмкін. Осыған байланысты D транспорт желісінің толық ағынын табу алгоритімін келтіреміз.

Алгоритм №10.

1. Кез келген $x \in X$ ушін $\varphi(x)=0$, яғни нөлінші ағын ретінде бастаймыз. Сонымен қатар $D^1=D$ деп аламыз.

2. D^1 бграфтың D транспорттық желісіндегі φ ағында қанық болған барлық доғаларды жоямыз . Алынған бграфты тағыда D^1 арқылы белгілейміз.

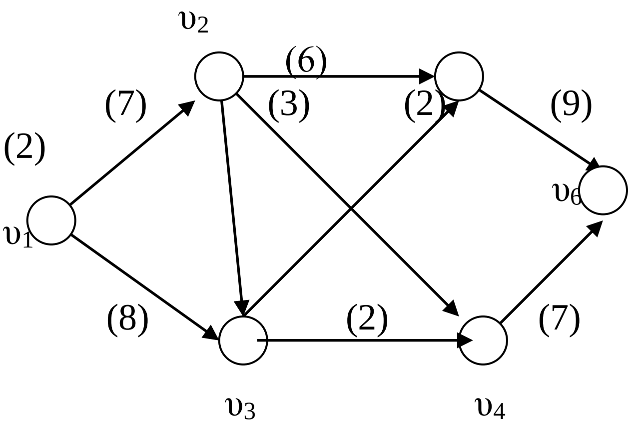
3. D^1 бграфта υ_1 төбеден υ_n ге баратын ξ жай тізбекті табамыз. Егер ондай тізбе болмаса, онда D транспорт желісінің ізделінген толық ағыны φ болып есептеледі және алгоритм соңына жетеді. Ал, кері жағдайда 4-қадамға өтеміз.

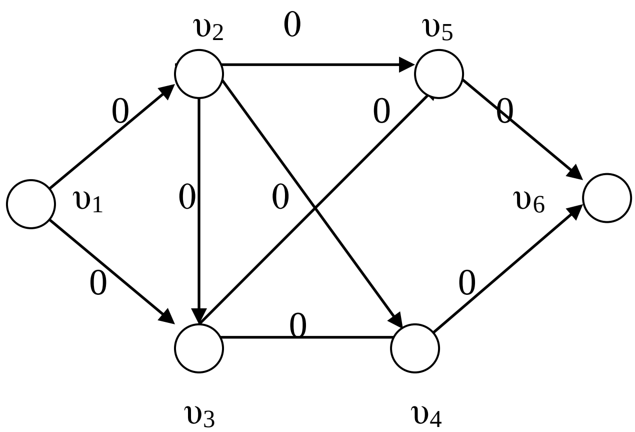
4. $\varphi(x)$ ағынның ζ тізбесіндегі әр бір доғаны бір шамаға (a>0) үлкейтеміз. Ол кезде ζ тізбенің кемінде бір доғасы қанық доғаға өтуі тиіс, ал басқа доғалардағы ағындар өзінің өткізу мүмкіншілігінен асып кетпеуі талап етіледі. Сонда φ^* ағын шамасы a ға үлкейеді, ал D транспорт желісіндегі φ ағынның өзі мүмкіндік қалпында қалады. Бұдан кейін 2-қадамға өтеміз.

Мысал-54. $47_а$-сызбада бейнеленген D транспорттық желінің толық ағынын табамыз (сызбадағы жақшалар ішіндегі сан доғалардың мүмкіндік қабілетін білдіреді.)

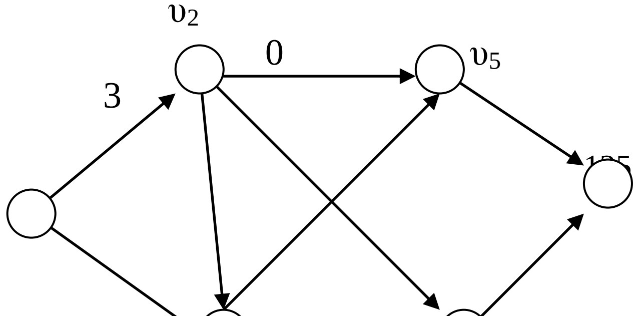
10-алгоритмді қолданамыз. Бастап $D^1=D$, $x \in X$, $\varphi(x)=0$ деп қабылдаймыз. (Бұл жағдай үшін D бграфтың доғалар бойынша φ ағынның шамасы $47_б$-сызбада бейнеленген). Нөльдік ағында қанық доғалар қатыспайды. D^1 бграфта $\zeta_1=\upsilon_1\upsilon_2\upsilon_4\upsilon_6$ жәй тізбе айырамыз және ζ_1 дегі доғалар бойынша ағындарды a=3 санына ((v_2,v_4)-доға қанық болғанға дейін) үлкейтеміз. Нәтижеде бір қанық доғаға ие болған $\varphi=\varphi_1$ ағын аламыз (47в-сызба).

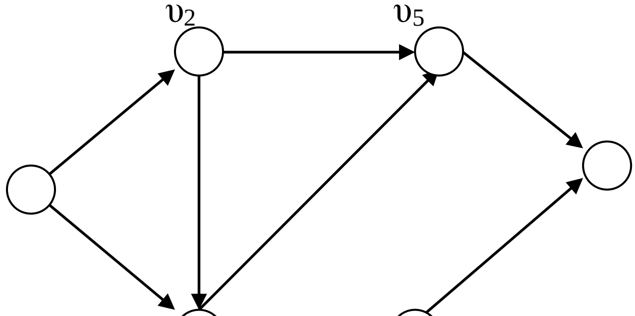
Ол доғаға ☼ белгі қоямыз. Қалған бграфты тағыда D^1 арқылы белгілейміз (47г - сызба) . D^1 графтан кезектегі $\zeta_2=\upsilon_1\upsilon_2\,\upsilon_3\upsilon_4\,\upsilon_6$ жай тізбені айырамыз және ζ_2 дегі доғалар бойынша ағынды a=2 ге үлкейтеміз ((υ_2,υ_3),(υ_3,υ_4) доғалар қанық болғанға дейін). Нәтижеде үш қанық доғаға ие болған $\varphi=\varphi_2$ ағын аламыз (47д-сызба). D^1 графтан белгіленген қанық доғаларды жоямыз.





(б)





0 3 0 υ_6 υ_1

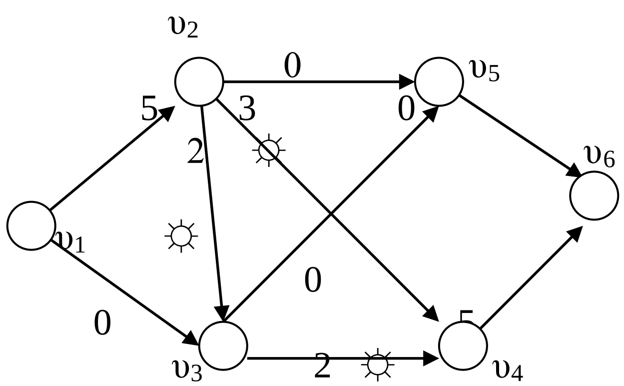
υ_1 υ_6

0 3

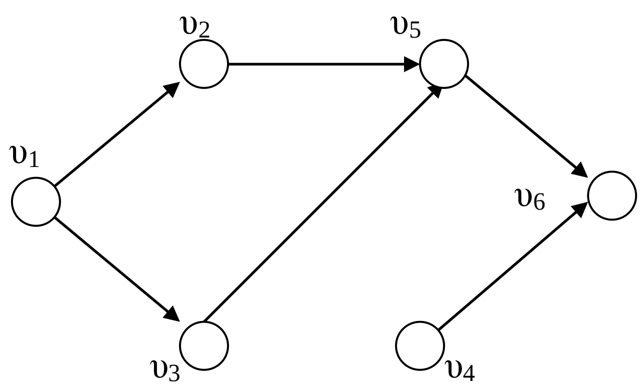
0

υ_3 υ_4 υ_3 υ_4

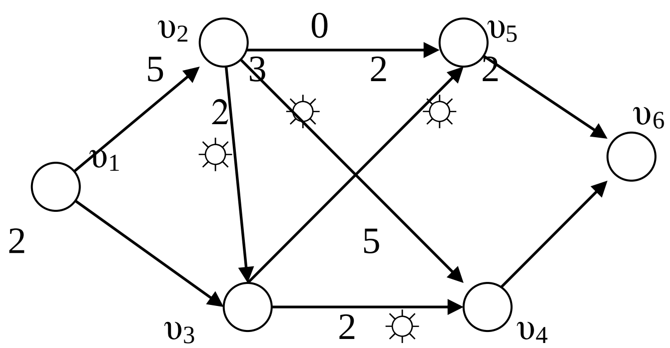
(в) (г)



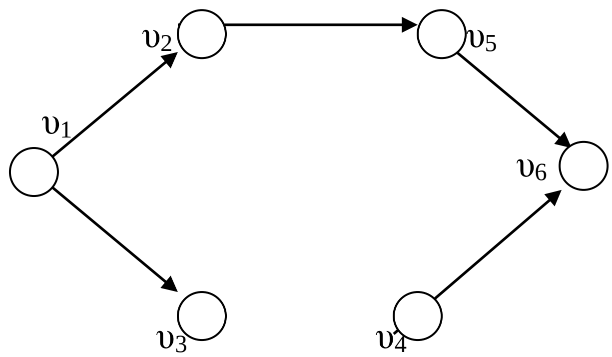
(д)



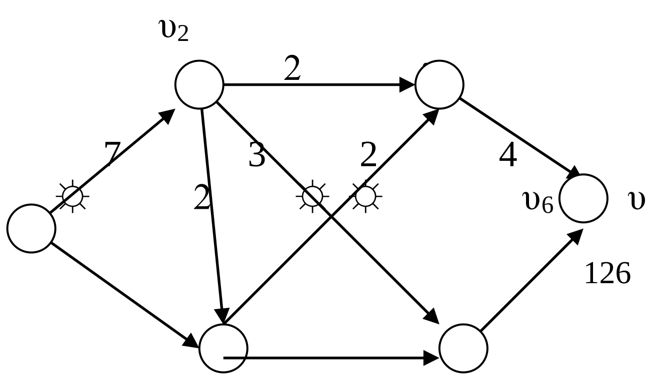
(е)

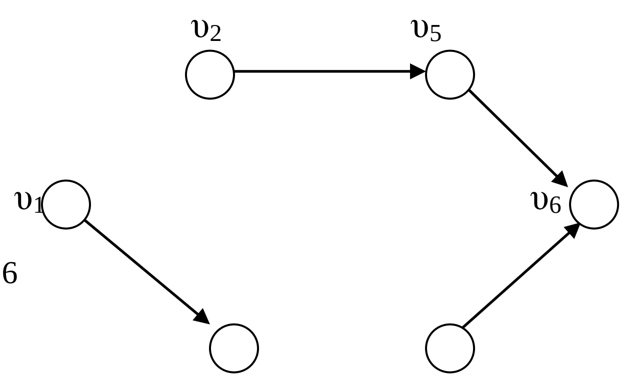


(ж)



(з)





υ_1 ☼
2 5

υ_3 2 ☼ υ_4 υ_3 υ_4
(и) (к)

47- сызба

Қалған бграф тағыда D^1 арқылы белгіленеді (47е -сызба). Тағыда $\zeta_3=\upsilon_1\upsilon_3\upsilon_5\upsilon_6$ жәй тізбеде (υ_3,υ_5) доғалар қанық болғанға дейін a=2 санға ағынды үлкейтеміз. Сонымен $\varphi=\varphi_3$ төрт қанық доғаға ие (47ж-сызба). Сол секілді $\zeta_4=\upsilon_1\upsilon_2\upsilon_5\upsilon_6$ жәй тізбеде (υ_1,υ_2) доғаны a=2 ге қанықтырып бес қанық доғаға ие болған $\varphi=\varphi_4$ ағын құраймыз (47и-сызба). D^1 графтан соңғы қанық доғаны жойып, қалған бграфты тағыда D^1 арқылы белгілейміз (47к-сызба). Соңғы алынған D^1 бграфта υ_1 төбеден υ_6 төбеге өтетін жол жоқ, яғни φ_4 ағыннан басқа қанық доғаларға ие болатын жол табылмайды, сондықтан φ_4 толық ағын есептеледі. Ал толық ағыннан алынған φ^*_4 шама 9 ға тең.

Өсімше бграф.

Берілген D транспорттық желі және оның φ мүмкіндік ағын үшін D желідегі барлық төбелерге ие болған $I(D,\varphi)$ өсімше бграф еңгіземіз. D транспорттық желідегі әр бір $x=(\upsilon,\omega)\in X$ доғасына $I(D,\varphi)$ өсімше бграфта екі доға сәйкес қойылады: x және $x^1=(\omega,\upsilon)$- x доғасының бағытына қарама-қарсы болған доға. $I(D,\varphi)$ өсімше бграфтың $x=(\upsilon,\omega)\in X$, $x^1=(\omega,\nu)$ доғаларына ℓ-ұзындық өлшемін енгіземіз:

$$\ell(x)=\begin{cases} 0, \text{ егер } \varphi(x)<c(x); \\ \infty, \text{ егер } \varphi(x)=c(x); \end{cases} \qquad (60)$$

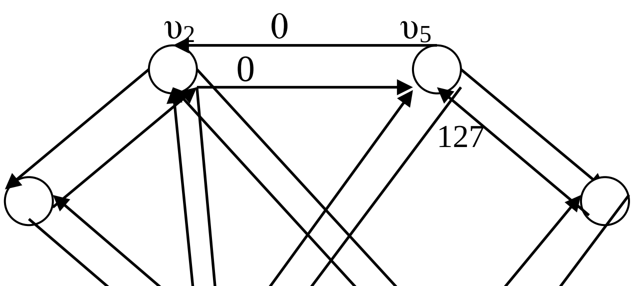
$$\ell(x^1)=\begin{cases} 0, \text{ егер } \varphi(x)>0; \\ \infty, \text{ если } \varphi(x)=0, \end{cases} \qquad (61)$$

яғни $I(D,\varphi)$ тиелген бграф болады. Сонымен $I(D,\varphi)$ бграфтағы кез келген (υ_1,υ_n)-жол ұзындығы 0, не ∞ ке тең екендігі айқын.

Айталық ζ-$I(D,\varphi)$ бграфтағы кез келген бір жай тізбе болсын. Егер не x, не x^1 доғалар ζ тізбеде бар болса, онда ζ тізбе $x=(\upsilon,\omega)\in X$ доға арқылы өтеді деп айтамыз.

Сонда, егер ζ тізбеде x қатысса, онда ζ және x бағыты дәл келеді, ал ζ тізбеде x^1 қатысса, ζ және x бағыты қарама-қарсы деп айтамыз.

Мысал-55. 48-сызбада 54-мысалда берілген D транспорттық желі және φ_4 ағын үшін $I(D,\varphi_4)$ өсімше бграф бейнеленген.



0 ∞ 0

υ_1 0 ∞ 0 0

υ_6

0 ∞ ∞

0 0 0 0

υ_3 0 υ_4

∞

48 - сызба

Транспорт желілерінде максимал ағындар құру алгоритмі.

Алгоритм №11.

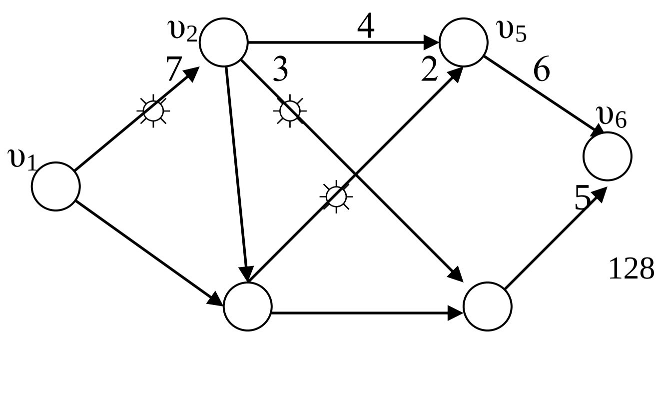
1. i=0 деп аламыз. Айталық φ_0-D транспорттық желідегі кез келген мүмкіндік ағын болсын (мысалы, толық немесе нөльдік $\varphi_0(x)=0,\ x\in X$ ағын);

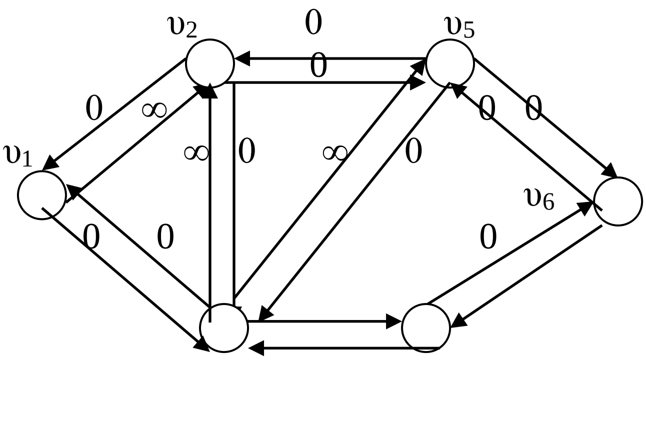
2. D желі және φ_i бойынша $I(D,\varphi_i)$ өсімше бграф құрамыз;

3. $I(D,\varphi_i)$ бграфта υ_1 төбеден υ_n ге өтетін минимал жол болған ζ_i жәй тізбе табамыз. Егер осы тізбенің ұзындығы ∞ ке тең болса, онда φ_i ағын максимал болады және алгоритм аяқталады. Кері жағдайда ζ_i тізбе бойлап $a_i>0$ максимал мүмкіндік шама үлкейтеміз. Бұл жерде, егер ζ_i тізбе бойынша өтетін х доға дәл келсе қосылады, ал қарама-қарсы болса алынады.

$\ell(\zeta_i)=0$ бойынша және (60),(61) теңдіктерден пайдаланып a_i шаманың бар екендігін табамыз. Нәтижеде D транспорттық желінің ағыны өзгереді, яғни φ_i ағыннан φ_{i+1} ағынға өтеміз және сонымен
$\varphi^*_{i+1}=\varphi^*_i + a_i$. i:=i+1 және 2- қадамға өтеміз.

Мысал-57. 54, 55-мысалдардың жалғасы ретінде D транспорттық желінің максимал ағынын құрастырамыз. Бұл жерде φ_4 толық ағыннан басталады. $I(D,\varphi_4)$ бграф бейнеленген 48-сызбадағы (55-мысал) өсімше бграфтан пайдаланамыз. $I(D,\varphi_4)$ тиелген бграфта ұзындығы 0 ге тең болған $\zeta_5=\upsilon_1\upsilon_3\upsilon_2\upsilon_5\upsilon_6$ жәй тізбе табылады. (бұл жерде ζ_5-$I(D,\varphi_4)$ дегі υ_1 ден υ_6 ға баратын минимал жол). ζ_5 тізбе бойынша ағынды максимал мүмкіндік шамаға (2 ге) үлкейтеміз ((υ_2,υ_3) доға қанық болғанша). Нәтижеде φ_5 ағын аламыз ($49_а$-сызба). $I(D,\varphi_5)$ өсімше бграф құрастырамыз ($49_б$-сызба). Бұл жерде $I(D,\varphi_5)$ тиелген бграфта кез келген υ_1 ден υ_6 ға баратын жол ұзындығы ∞ ке тең. Сондықтан φ_5 максимал ағын болады және $\varphi^*_5=11$.





4 0

υ_3 2 υ_4 υ_3 ∞ υ_4

☼ 0

(а) (б)

49 – сызба

15-лекция
Құпиялау теориясы

1. Кодталу теориясының негізгі ұғымдары және анықтамалары
2. Алфавиттік кодтталу.
3. Оптимал кодталу. Қателерді табу және өңдеу кодттары.
4. Декодталудың бірмәнділік критериі.

Құпиялау теориясының қарапайым формасы адам баласы жаратылып нәрселерге атама бере бастаған дәуірден басталған. Табиғаттағы барлық жанзатты немесе өсімдік әлемін әр бір ұлт өз диалекті арқылы атап-кодтап көрсеткен. Ал, өзіміздің нәресте жаңадан дүниеге келгенде ат қоюда осыған сәйкес, яғни барлығымыздыңда аталуымыз-кодымыз бар. Бірақта бұл атамалар құпия код емес, құпиялау-кодтау өмірдің кейбір бағыттарындағана қажет болады. Әлбетте кеңес кезіндегі жаратылған көптеген киноларда, әсіресе соғыс заманындағы «разветчик»тердің Морзе әліппесі арқылы түймені басып, олардың нешеуі қолға түсіп, оны қарсылас жақ дәл шешімін ашып-декодтап жатқан кезеңдерді көптеп көргенбіз. Бірақта, айтқандарымыз әншейін бір процес ретінде көрінгенімен қазіргі кезенде ол математиканың бір бөлігі ретінде дискреттік математиканың негізін құрайтын бір пән немесе бағыт болып ғылыми қоғамға кіріп келді.

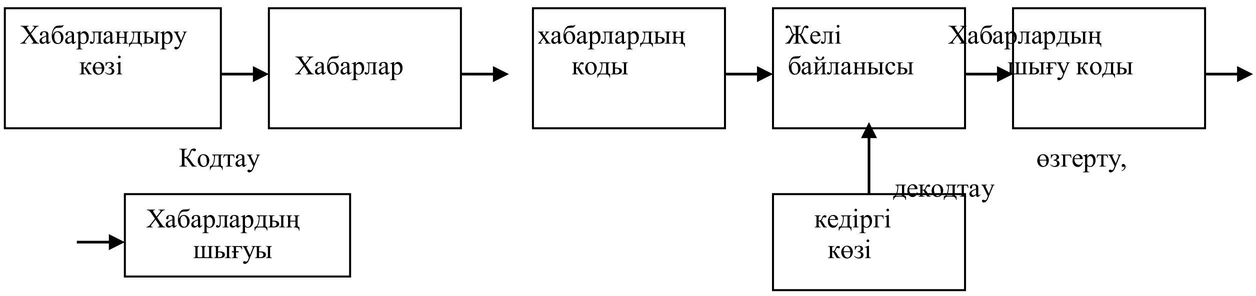
Ал, осы қолымыздағы жұмыс құпиялау немесе кодталу теориясы және оның қасиеттеріне арналған. Бөлім қарастырылып жатқан теорияның негізін құрайтын жаңа ұғымдар және анықтамаларға арналған, мұнда сонымен бірге кодталудың түрлері: алфавиттік және оптимал кодтаулар, осы кодталу кезінде болуы мүмкін болған қателіктер және оны өңдеу тәсілдері қарастырылған.

Екінші бөлім қарастырылып жатқан кодталу теориясына кері мәселе, яғни декодталу-құпияны ашу мәселесіне арналған. Мұнда, декодталудың бірмағыналық критерилері және оны іске асырудың тәсілдері және сонымен бірге Хемминг декодталу қасиеттері көрсетілген.

Негізгі бөлімде кодталу теориясына байланысты математикалық заңдылықтар және олар үстіндегі зерттеулер қарастырылған. Кодталу теориясына өте қажетті болған кодталудың кестелік сипаттары, кодталуды бағалайтын теңсіздіктер, кодталу бағалары, кодталудың қашықтықтары және т.б. ғылыми зерттеулер қарастырылған.

1. Кодталу теориясының негізгі ұғымдары және анықтамалары

Математикада құпиялау (кодталу) теориясы үлкен жұмыс атқарады. Құпиялау бір нысанды үйрену арқылы екінші нысанды үйретуге алып келеді. Сандарды ондық санау жүйесінде көрсету қандай маңызды болғандығы бізге белгілі. Математика пәні ары қарай өркендеуі, дамуы барысында координаталар әдісі үлкен маңызға ие болды, өйткені ол яғни координаталар жүйесінде геометриялық нысандарды аналитикалық көрініс арқылы кодтау мүмкіндігін берді.



Бастапқыда кодталу құралы көмекші құрылғы-аспап болып, ол зерттелетін - оқытылатын пән емес еді. Басқару жүйесін үйренуде кодтау сөзін мүлдем басқа мағынада қолданылған. Кодталу теориясында жүйелер облысы негізінде ізденістер, зерттеулер алып баруды қажет етеді. Осыған байланысты жоғарыдағы сызбада көрсетілген сұлба арқылы негізгі мәселелерді көруге болады.

Айталық белгілі бір әріптерден құралған $\Omega = \{a_1\ldots,a_r\}$ алфавит берілген болсын. Ω символдарынан құралатын

$$A = a_{i1}\, a_{i2} \ldots a_{in}$$

шекті тізбекті Ω алфавитіндегі «сөз» деп айтамыз, бұл жерде n – А сөзінің ұзындығы. А сөзінің ұзындығын $L(A)$ арқылы белгілеуге келісеміз.

Айталық, S_Ω алфавиттдегі кез келген әріптерден құралған барлық сөздер жиыны және S^1 – S көпмүшеліктен келіп шығатын ішкі сөз болсын.

S сөзі келіп шығатын нысан (обект) «хабарлар көзі» деп аталады. Ал, S-тен құралған сөздерді «хабар» деп атаймыз. Хабарлардың көзі болып автомат, табиғат, адам жәнеде басқалар болуы мүмкін. Әдетте кодталу теориясында есептерді көру кезінде «хабар көзі» тұралы қосымша ақпаратпен ауысады. Оларды қандай көріністерде сипаттау мүмкіндігін бір неше жолдар арқылы төмендегідей көру мүмкін :

а) **теоретикалық жиында сипаттау** қуаттылық характеристикаларын белгілеп бару жолымен орындалады, мысалы S' – берілген m ұзындықтағы барлық сөздер жиыны.

б) **статистикалық бейнелеу** - мұнда S' ықтималдық характеристикаларының берілу жолымен орындалады, мысалы, $S' = S$ және $a_1, a_2,..., a_r$ әріптерінің пайда болу ықтималдықтары $P_1,..., P_r$ берілген ($\sum p_i = 1$) .

в) **логикалық бейнелеу** – S' жиынының сипатталуын кейбір "Тілдер " ретінде береді. Ол S' жиынды құрастыру тәсілдерін көрсетеді, мысалы, S' кез – келген автомат арқылы түрленуі мүмкін.

Айталық, Ψ алфавиті берілген болсын, бұл жерде

$$\Psi = \{b_1,\ldots,b_q\} .$$

В арқылы Ψ алфавитіндегі сөздерді және S(Ψ) арқылы Ψ алфавитіндегі барлық сөздер жиынын белгілейміз.

Айталық әр бір A, $A \in S(\Psi)$ сөзге $B = F(A)$, $B \in S(\Psi)$ сөзді сәйкес қоятын F кескіндеу берілген болсын, В сөзін А – ның «хабарлар коды» деп, ал А сөзінен оның кодына өтуді кодталу деп айтамыз.

Кодталу теориясында F кескіндеу кейбір алгоритмдер түрінде беріледі.

а) **Алфавиттік** кодталу. Ω алфавитіндегі әріптер және Ψ алфавитіндегі кейбір сөздер арасындағы сәйкестікті қарастырамыз:

$$\begin{array}{l} a_1 - B_1, \\ a_2 - B_2, \quad (\sum) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = B_n \end{array}$$

Бұл қатынасты «сұлба» деп айтамыз және $\sum$ арқылы белгілейміз. Ол алфавиттік кодталуды кезектегідей анықтайды: $S^1(\Omega) = S(\Omega)$ жиынынан, алынған әрбір $A = a_{i1}\ldots a_{in}$ сөзге А сөздің коды деп аталатын $B=B_{i1}\ldots B_{in}$ сөз сәйкес қойылады, мұнда $B_{i1,}$ B_{in} қарапайым(элементар) кодтар деп айтылады.

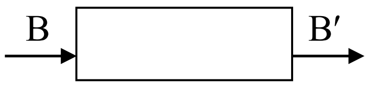
б) **теңбе – тең кодталу**. Айталық $\{A_{1,}\ldots,A_s\}$ Ω алфавитіндегі ұзындығы m ге тең болған жұбымен әртүрлі сөздердің жиыны болсын. Бұл жерде әрбір А сөз $A = A_{i1}\ldots A_{in}$ көрінісіндегі жіктеуге келетін жалғыз жіктелуге ие. Айталық $S'(\Omega)$ жоғарыда көрсетілген типтегі жіктелуге мүмкіндік беретін Ω алфавитіндегі сөздердің кейбір ішкі жиыны болсын. Кезектегі сұлбаны қарастырамыз.

$$A_1 - B_1,$$

……….
$A_s – B_s,$

бұл жерде A жиынының элементтері B жиынының элементтер кодына сәйкесінше ұзындақтары тең. ∑ сұлбасы теңбе-тең кодталуды кезектегідей анықтайды: $S'(\Omega)$ жиындағы әрбір $A = A_{i1}\ldots A_{in}$ сөзге A ның «кодтық сөзі» деп аталатын $B = B_{i1}\ldots B_{in}$ сөз сәйкес қойылады.
Кодты таңдау әр түрлі жағдайларға байланысты, атап айтқанда:
- кодты жіберу ыңғайлығымен (мәселен, техникада екіленген кодты қолдану өте оңай);
- қабылдаудың ыңғайлығын қамтамасыз етумен (мәселен, машиналық кодтар процессордың жұмыс істеуіне ыңғайлы);
- желінің максимал өткізу қабілетін қамтамасыз етумен;
- кедергілерге төзімділігін қамтамасыз етумен;
- кодталу алгоритімінің белгілі бір қасиеттеріне жетумен (мәселен, кодталудың қарапайымдылығы, бірмәнді кодталудың мүмкіндіктері) және т.б.

Байланыс желісін бір «кіріс» және бір «шығыс» нүктесі бар құрылғы ретінде қарастыруға болады (төмендегі сұлба).



Бұл құрылғының «кіріс» нүктесіне B кодтық ақпарат келіп түседі. Ал «шығыс» нүктесінен B' кодтық хабар алынады, бұл жерде B' – сөзі Ψ алфавитіндегі кез келген сөз, яғни

$$B' = f(B).$$

Қарапайым жағдайда (кедергісіз желіге теңдес), яғни байланыс желісі идеал болған жағдайда $B' \equiv B$ (немесе $f(B)=B$) болады, ал ол $\Psi' = \Psi$ екендігін білдіреді. Жалпы жағдайда $\Psi' \neq \Psi$ байланыс желісі кодтардың түрленулерін өз ішіне алуы , яғни болуыда мүмкін (мәселен, электрон есептеу машиналарында).

«Кедергі көзі» (центрі) «шығыста» кодтардың айнығанын ескере отырып байланыс желісіне қателіктер еңгізеді. «Кедергі көзін» сипаттау үшін екі тәсіл қолданылады:
1) логикалық – комбинаторикалық бейнелеу,
2) статистикалық бейнелеу.

Логикалық – комбинаторикалық бейнелеу – әдетте $\{0,1\}$ жиындағы қателіктердің санын шектеулермен көрсетуге байланысты.

Статистикалық бейнелеу – қайнар көздердің ықтималдық сипаттамаларының берілуімен орындалады.

«Шығыс» тағы ақпараттар коды желінің теңбе-тең жағдайында $\Psi' = \Psi$ алфавитінде өздігінен кейбір сөздер жиынын білдіреді. Бірақта кедергі көзі $B' \neq B$ болуына алып келуі мүмкін. ″Шығыс″тағы ақпараттар өздігінен кейбір G алфавитіндегі сөзді білдіреді. Желінің тепе-теңдік жағдайында, яғни ақпаратты жеткізу кезінде G = Ω болады. «Кірісте»гі ақпараттар кодынан «шығыстағы» ақпараттарға өту екі ауыстыру арқылы орындалады.

«Шығыс»тағы ақпараттар кодының коррекциясы. Бұл ауыстыру тек арнайы ақпарат кодтары үшін ғана мүмкін. Ал, егер біз ақпараттарды жеткізу жағдайындағы жұмысқағана ие болсақ, онда өту B′ тан B ға орындалады.

Декодталу. Ол коррекциядан кейінгі шығыстағы ақпараттар кодынан алынған кодтан «шығыс»тағы ақпараттарға өздігінен өтуді бейнелейді. Тағыда, декодталу барлық кодтарғада мүмкін бола бермейді, ал ол тек арнайы ақпараттар коды үшін орындалуы мүмкін.

2. Алфавиттік кодталу

Анықтама. Әр түрлі ақпараттарды жіберу, қайта істеу және сақтауға арналған шартты белгілер жүйесі құпия (код) деп айтылады.

Құпиялау теориясының зерттеуі болып 0,1,2,...,r – 1 (мұнда r кейбір бүтін оң сандар, дербес түрде r = 2) сандар тізбектеріндегі жиындардың шекті немесе ерікті нысандар жиынындағы санаулы кескіндеулер есептеледі. Осындай кескіндеулер құпияластыру (кодталу) деп айтылады.

Құпиялау теориясының көп мәселелері кезектегідей тұжырымдар арқылы сипатталады. Мұнда, берілген нысандар объектісі үшін белгілі бір қасиеттерге ие болған құпиялау класы қарастырылады. Қарастырылып жатқан кластан алдынала берілгендік мағынасында оптимал болған құпиялау жүйесін құру талап етіледі. Әдетте құпиялаудың оптималдық критерисі кодтардың ұзындығын минимизациялауға байланысты. Сонымен бірге талап етілетін құпиялаудың қасиеттері жеткілікті дәрежеде әр түрлі болуы мүмкін. Осындай қасиеттерге: бірмәнді кері кескіндеудің бар екендігі, құпияны ашу (декодталу) мүмкіндігі, декотдалу кезіндегі әр түрлі типтегі қателіктерді өңдеу мүмкіндіктері, қарапайым іске асыру (қарапайым алгоритм мүмкіндігі) және т.б. кіреді.

Айталық A – еркін алфавит берілген болсын. Алфавиттің элементтерін әріптер, ал осы әріптерден құралған шекті тізбекті A жиындағы «сөз» деп айтамыз. α сөздің ұзындығын (әріптер саны) $\varphi(\alpha)$ арқылы белгілейміз, ал 0 ұзындықтағы сөзді (бос сөз) λ ретінде белгілеуге келісеміз. α_1 және α_2 сөздердің бірлігін $\alpha_1\alpha_2$ арқылы және бір түрлі n әріптен біріккен α сөзді $\alpha^n(\alpha^0=\lambda)$ арқылы белгілейміз.

Айталық U A дағы кез келген сөздер жиыны болсын. U^n (n = 0,1,…,) арқылы A^n дегі U дан алынған n сөздің бірігуі ретінде сипатталатын барлық сөздер жиынын белгілейміз. Дербес ретінде A^n (n = 0,1,…) арқылы A алфавитіндегі барлық n ұзындықтағы сөздер жиынын белгілейміз. A* арқылы A дағы кез келген ұзындықтағы барлық сөздер жиынын түсінеміз.

Ал, $U^* = {}_{n=0}\mathbf{U}^{\infty}U^n$ – A алфавитіндегі мүмкін болған барлық сөздер жиыны. Мұнда ол U жиынның таңдауына өте байланысты болады. Егер U жиын 00 және 11 сөздерден құралған болса, онда оның кез келген бірігуі жұп ұзындыққа ие болады, екіншіден нөльдермен бірлер жұбымен жайғасады. Мысалы 0110 сөзі U^2 жиынға тиісті болмайды.

Егер $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ болатын сондай бір α_2 сөз бар болса, онда α_1 сөзді α сөздің басы деп атауға келісеміз, сонымен бірге, егер $\alpha_2 \neq \lambda$ болса, онда α_1 сөз α сөздің өзіндік бастамасы деп айтылады.

Егер $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ болатын α_1 сөз бар болса, онда α_2 сөзді α сөздің соңы деп айтамыз және сонымен бірге, егер $\alpha_1 \neq \lambda$ болса, онда α_2 сөзді α сөздің өзіндік соңы деп атауға келісеміз. Дербес ретінде, бос сөз кез келген $\alpha \neq \lambda$ сөздің өзіндік басы және өзіндік соңы бола алады. Тағыда U жиыннан алынған барлық сөздер басын $\rightarrow U$, ал сөздер соңының жиынын $U\leftarrow$ арқылы белгілейміз

Енді $B(r)=\{0,1,\ldots,r-1\}$ алфавиттік және еркін алынған G жиынды қарастырамыз, мұнда $r>2$. Дербес түрде G жиын шекті алфавит натурал сандар жиыны , белгілі типтегі сұлбалар немесе формулалар, белгілі бір алфавиттегі сөздер және т.б. лар болуы мүмкін. В алфавитіндегі G жиынның кез келген кескінделуі сөздер жиынында G жиынның r – дік кодталуы деп айтылады. Ал біз қолайлық үшін $r = 2$ болған жағдайды, яғни екілік кодталуды қарастырамыз. Сонымен байланысты logx өрнекті $\log_2 x$ ретінде түсінеміз.

Кодталуға мысалдар келтірейік.

1) Е кодталу арқылы натурал сандардың екілік жазылуын белгілейміз. Мұнда $n = 0$ санына $\ell(o) = 0$ сөзі, ал $n > 0$ санға

$$\sum_{j=1}^{\ell(n)} b_j^{(n)}\, 2^{\ell(n)-j} = n$$

шартты қанағатандыратын ең қысқа ұзындықтағы

$$e(n) = b_1^{(n)} b_2^{(n)} \ldots b_{\ell(n)}^{(n)}$$

екілік сөз сәйкес қойылады.

Мұнда n санның жазуы 1 цифрасымен жазылуы айқын, яғни $b_1^{(n)} = 1$, ал $\ell(n)$ – белгілер саны $2^{\ell(n)-1} \leq n < 2^{\ell(n)}$ теңсіздікті қанағаттандыруы қажет, сондықтан $\ell(n) = [\log n] + 1 =]\log(n+1)[$ болады, (мұнда $[x]$ – x санның бүтін бөлігін , ал $]x[$ - x тен кіші болмаған ең кіші бүтін санды білдіреді). Е кодталу $n_1 \neq n_2$ болғанда $e(n_1)$ және $e(n_2)$ әр түрлі сөздер өзара бір мәнділікті қалыптастырады.

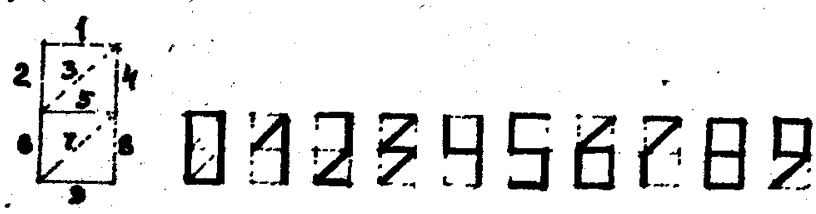
2) Бірінші $2^к$ натурал сандардың $E_к$ кодталуы. Мұнда әр бір n ($0 \leq n < 2^k$) санға $e_k(n) = 0^{k-\ell(n)} e(n)$ сөз сәйкес қойылады. $e_k(n)$ сөзі n санның к цифрлық екілік жазуы деп айтылады. E_k кодталу кезінде бірінші $2^к$ натурал сандар k ұзыныќтағы екілік сөздер жиынында кескінделеді. 1 кестеде Е және E_4 кодталу кезіндегі 0 ден 15 ке дейінгі сандарға сәйкес келетін сөздер келтірілген.

1-кесте

n	e(n)	$e_4(n)$	n	e(n)	$e_4(n)$	n	e(n)	$e_4(n)$
0	0	0000	6	110	0110	12	1100	1100
1	1	0001	7	111	0111	13	1101	1101
2	10	0010	8	1000	1000	14	1110	1110

3	11	0011	9	1001	1001	15	1111	1111
4	100	0100	10	1010	1010			
5	101	0101	11	1011	1011			

3) Почта индекісінің цифрасын жазу негізіндегі қолданылатын кескіндеу (1- сызба).



1-сызба

Хат жіберуші жағынан бір қалыптағы он бөліктен белгіленген әр бір ондық сан В алфавитіндегі 9 ұзындықтағы сөз ретінде автоматикалық танып-білу үшін кодталады. Мұнда, 1 белгісімен қолданылған сызықтар нөмірі белгіленеді.

Мысалы, 2 санына 100100101 сөзі, ал 5 санына 110010011 сөзі сәйкес келеді.

Кейде шекті жиынның кейбір екілік сөздердің ішкі жиынына кескінделуі осы жиын элементтерінің санын есептеу және бағалау үшін өте қолайлы қолданыс құралы болып есептеледі.

Мысал үшін n санын m бүтін оң қосындыларының реттелген жіктеулерінен тұратын $F_{n1,m}$ жиынды қарастырамыз. Мұндағы әр бір $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ жіктеуге сәйкес ретінде $0^{n1}10^{n2}1\ldots10^{nm}$ сөз қойылады. Ол n нөльдерден және (m-1) бірлерден құрылғандықтан (n+m-1) ұзындыққа ие.

Мысал үшін 11 санның 4 қосындыға, яғни 11 = 5+0+2+4 бөлінуі 00000110010000 сөз арқылы, ал 11 = 1+1+6+3 бөліну 01010000001000 сөзімен кодталады. Мұндай кодталу дәл (m-1) бірлерге ие болған, ұзындығы (n+m-1) ге тең екілік сандар жиынындағы $F_{n,m}$ жиынның өзара бір мәнді кескіні болады. Сондықтан $F_{n,m}$ жиын элементтерінің саны C^{m-1}_{n+m-1} ге тең.

Құпиялау теориясында белгілі бір А алфавиттегі барлық сөздерден (немесе дербес ретінде айырып алынған бір бөлігінен) тұратын G жиынды құпиялау жеке орын иелейді. Мұнда кодталатын жиын элементтерін ескере отырып, оларды хабарлар деп айтамыз. Жалпы жағдайда оған сәйкес екілік сөздерді хабарлау үшін есептеу процесінде (алгоритмнің өзі, оның тиімділігі) еш қандай шарт қойылмайды. Біракта көп мәселелер үшін сөздерді кодтаудың - әріп бойынша кодталуы деп аталатын айтарлықтай тар класстарды қарастыруымен шектелу жеткілікті.

Айталық, $A = \{a_j\}$ әріптері натурал сандармен нөмірленген шекті алфавит болсын. Бұл жағдайда А алфавит әріптерінің кодталуын $V = \{u_i\}$ екілік сөздермен беру мүмкін, мұнда u_i a_i әріптің басқаша сипаты. $V = \{u_i\}$ сөздерді А алфавиттен алынған кодтар деп айтамыз. Егер $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}$

сөздердің (ақпараттың) әр біріне $u_{i1},u_{i2},\dots,u_{ik}$ сөздер сәйкес қойылған болса, онда А алфавиттегі сөздердің кодталуын әріп бойынша кодталу деп атаймыз және K_{ui}^{ai} немесе K_u^A арқылы белгілейміз. Мысал үшін, A = {a,b,c,d} және оның әріптерінің екілік кодталуын a→01, b→100, c→101, d→0 ретінде алсақ,онда 0100 сөзді бір уақытта db немесе add ретінде декодтау мүмкін, ал сол секілді 0010100 сөзді ddcdd, daadd немесе dadb ретінде қарауға болады.

Осы жерде, барлығымызға жақсы таныс болған Морзе телеграфтар коды латын немесе орыс алфавитінің әріптерін кодтау болып есептелуін білеміз. Мұнда барлық цифрлар және белгілер сипаты екілік сан болмаған екі әріпті алфавит – "нүкте", "сызықша" арқылы жазылған сөздерден тұрады. Морзе кодтары қосымша белгі – бос орын(пробел) арқылы бөлінгендіктен байланыс жүйесі бойынша ақпаратты ұзату негізінде – уақыты өте аз мерзімде сақтау, ал жазбада бос орын қалдыруымен шектеледі. (3.4 және 3.5 кестелер)

Кейбір кездерде алфавит әріптерін өзара бірмәнді кодталудан әріптер бойынша сөздерді кодталуға өтүде өзара бірмәнділік қаситтері сақталмауы мүмкін. Мысалы, $K_e^n(n)$-натурал сандардың әріптер бойынша кодталуында (5,6,1) , (11,2,1) және (5,13) натурал сандар тізбегі бірдей 1011101 (101*110*1, 1011*10*1, 101*1101) сөздеріне сәйкес келеді. Сонымен, натурал сандардың көрсетілген әріптер бойынша кодталуы өзара бірмәнді болмайды.

Егер алфавиттің барлық әріптер коды бірдей ұзындыққа ие болса , онда бұл код тең өлшемді деп айтылады (мысал үшін E_n код Е кодтан айрықшалықта).

Бұдан былай V = $\{u_i\}$ кодта (сөздер жиынында) тек қана әр түрлі сөздер болады деп есептейміз.

Анықтама: V = $\{u_i\}$ код бөлінетін деп айтылады, егер B = {0,1} алфавитінде $u_{i1}u_{i2}\dots u_{ik} = u_{j1}u_{j2}\dots u_{j\ell}$ көрінісіндегі әр бір теңдіктен $k = \ell$ және $i_t = j_t, t = 1,2,\dots,k$ келіп шықса.

Анықтама. Әріп бойынша кодталу сонда тек сондағана өзара бірмәнді болады, қашан ол бөлінетін кодтар көмегімен берілетін болса.

Осы анықтамадан тағыда бөлінетін кодтардың барлық сөздері әр түрлі және бос болмастығы келіп шығады.

Анықтама. V = $\{u_i\}$ кодты префиксті деп айтамыз, егер еш қандай u_k сөз, басқа ешқандай $u_j(j \neq k)$ сөздің басы болмаса.

Бұл жерден префикс кодтың бөлінетін екендігі, яғни префикстілік бөлінетінділік үшін жеткілікті шарт екендігі келіп шығады. Егер префиксті кодтың әрбір сөзін басқа кодталған сөздердің басы болмаған ең кіші оның басталуымен ауыстырылса, онда алынған код тағыда префиксті болады. Мұндай амалдарды префикс кодтың кесімі деп айтамыз.

Префикс кодқа өте қарапайым мысал – тең өлшемді кодтар. Олардың әр бір жіберілетін сөз кодының анықталуы және әр бір басталатын кодтың саны кодталған символдардың белгіленген бір түрлі сандары арқылы жазылғандықтан бөлгіштер қажет болмайды.

Мысалы: қалалардағы 7 санды телефон нөмірлерінің префикстілігі (демек, бөлінетіндігі) тең өлшемділігімен қамтамасыз етіледі. Нөльден басталатын:

01,02,03 және т.с. нөмірлер үшін бөлінетінділік талаптары сондай басталуға ие болған басқа нөмірлерге мүмкіншілік бермейді.

Кодтардың префикстілігін және басқада әдістермен қолдау мүмкін. Алдын қарастырылған Морзе кодында кез келген код сөзінің соңы ретінде арнайы белгі – бөлгішті еңгізу мүмкін. Сол секілді, компьютерлерге файлдың аты, берілгендердің аты, көпмәнді сандар және т.с. ақпараттарды еңгізу бөлгіштермен аяқталуы қажет, дербес түрде <Enter> түймесін басумен аяқталады. Префикстілік кодтар бөлінудің қажеттілік шарты болып саналмайды. Мысалы, екі әріпті {a,b} алфавиттегі <a:0, b: 01> код префиксті емес, бірақта бөлінетін болып есептеледі.

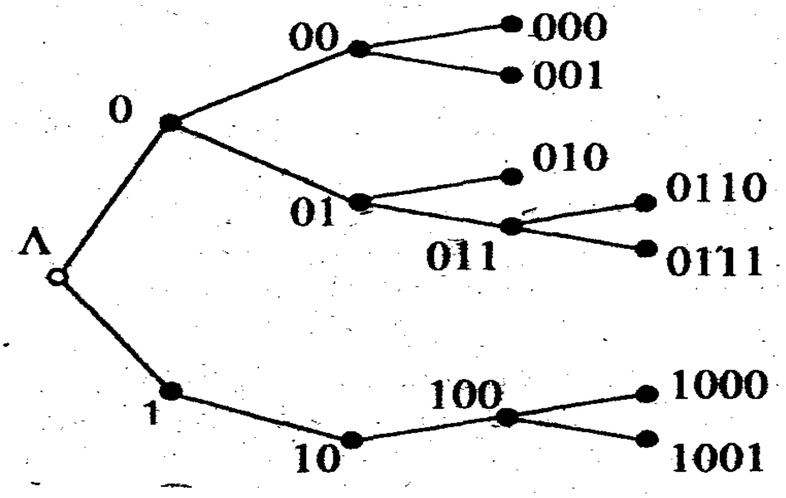
Шыныменақ, егер кейбір хабарларда 0 символынан кейін 0 келсе, онда бірінші 0 «а» әрпін кодтайды, себебі, 00 ешбір кодталу сөзінің басталуы емес, ал егер 0 ден кейін 1 келсе, онда 01 жұп символ «в» әріптің коды болады. Мұнда 0 «а» әріпті кодтай алмайды, себебі кезектегі 1 еш бір кодталу сөзінің басталуы бола алмайды.

Әр түрлі сөздерден құралған V еркін код үшін $V^{\rightarrow}$ төбелер жиынынан құралған бағытталған графты қарастырамыз, мұнда $\beta \in V^{\rightarrow}$ төбе $\beta' \in V^{\rightarrow}$ төбемен (β,β') доға арқылы қосылған болады сонда тек сондағана, қашан $\beta' = \beta 0$ немесе $\beta' = \beta 1$ болса. Бұл граф циклдарға ие емес және ол V кодтың кодталу ағашы деп айтылады. Префиксті кодтар үшін (теккана солар үшін) кодты сөздер жиыны кодталу ағашының соңғы төбелер жиынымен сәйкес келеді (яғни, қабырғалар шықпайтын төбелер).

2-сызбада $(\ell_i = \lambda(u_j))$ 2- кестеде келтірілген кодтың кодталу ағашы бейнеленген.

2- кесте

i	l_i	v_i
0	3	000
1	3	001
2	3	010
3	4	0110
4	4	0111
5	4	1000
6	4	1001



2-сызба

Бұдан былай шекті $V = \{u_0, u_1, \dots, u_{m-1}\}$ код үшін $m \geq 2$ деп есептейміз және

$$\lambda_{max} = \max \lambda(u_i),\ 0 < i < m - 1$$

белгілеуден пайдаланамыз.

1–теорема. Айталық $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{m-1}$ – кез келген натурал сандар ($m \geq 2$) жиналымы болсын.

$\lambda(u_i) = \ell_i$, $i = 0,1,\dots,m-1$ ұзындықтағы бөлінетін $V = \{u_0, u_1, \dots, u_{m-1}\}$ код бар болуы үшін «Бөлінетін кодтар үшін Крафт – Макмиллан теңсіздігі» орындалуы қажет және жеткілікті:

$$\sum_{i=0}^{m-1} (1/2^{\ell_i}) \leq 1.$$

3.2 кестедегі код үшін:

$$3(½)^3 + 4(½)^4 = 3/8 + 4/16 = 5/8 < 1.$$

Салдар. Кез келген бөлінетін $V = \{u_0, u_1, \dots, u_{m-1}\}$ код үшін V кодта болғандағыдай кодталу сөздерінің жиналымдар ұзындығында болған префикстік код бар болады.

3. Оптимал кодталу.

Енді біз кейбір қарапайым болжамдарға ақпараттар көзінің салыстырмалы статистикалық қасиеттерінде тиімді өзара бірмәнді кодталудың құрылуын қарастырамыз. Мұнда, кодталуды күштірек тиімді деп есептейміз, егер ақпараттың бір әрпіне орташа алғанда аз сандағы екілік цифрлар тұра келсе.

Кездейсоқ түрде (яғни, кездейсоқ ретте) $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{m-1}\}$ алфавиттің әріптерін біртіндеп келтіріп шығаратын ақпарат көзін қарастырамыз. Мұнда А алфавит әріптерінің біртіндеп пайда болуы статистикалық жағынан тәуелсіз және төмендегідей ықтималдықтар үлестіруіне бағынады деп есептейміз:

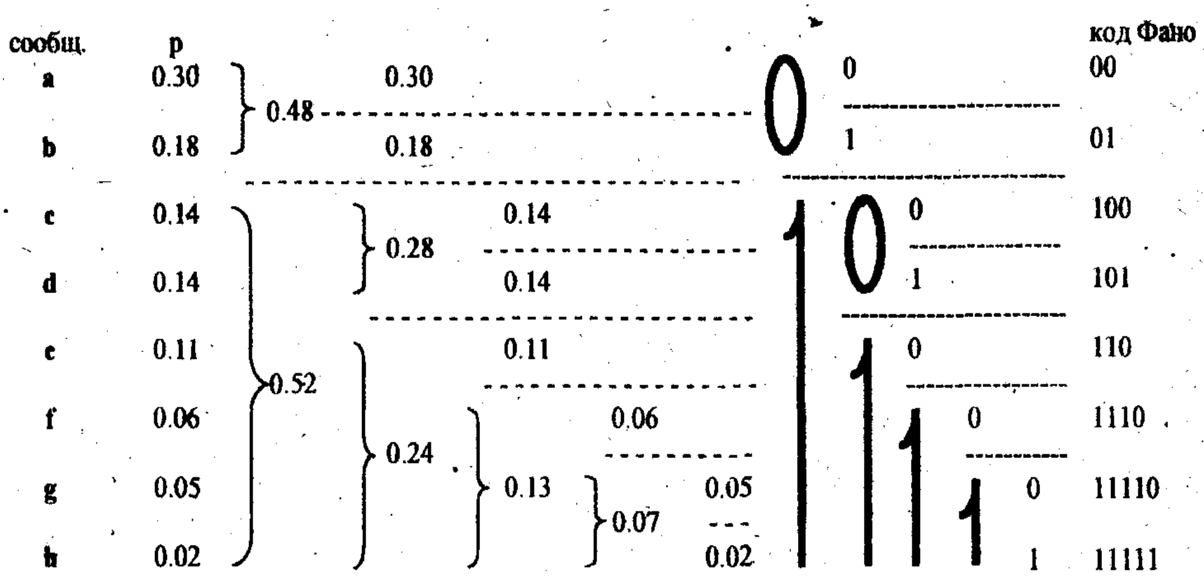
$$P = P\{p_0, p_1, \dots, p_{m-1}\},\quad (p_i \geq 0,\quad \sum_{i=0}^{m-1} p_i = 1).$$

$B = \{0,1\}$ алфавиттегі әр бір $V = \{u_0,u_1,\dots,u_{m-1}\}$ код $K_{u0}^{ao}, K_{ui}^{ai},\dots,K_{um-1}^{am-1}$ әріп бойынша кодталуда A алфавиттің бір әрпіне тұра келетін

$$L_V(p) = \sum_{i=0}^{m-1} p_i\lambda(u_i)$$

екілік цифрлардың орташа санымен сипатталады. $L_v(p)$ шама P үлестірімнің V кодтағы бағасы деп айтылады. Айталық $L(p) = \inf L_v(p)$ болсын, бұл жерде төменгі деңгей m сөзден құралған V префиксті кодтар жиыны бойынша алынады. $V = \{u_0,u_1,\dots,u_{m-1}\}$ префиксті кодты $P=\{P_0,P,..., P_{m-1}\}$ үлестірімде оптимал деп айтамыз, егер $L_v(P)=L(P)$ болса. Бұл жерде тұындайтын негізгі мәселе L(p) шаманың бағасын анықтауда өте тиімді әдістерді табу немесе кодталудың бағасы бойынша соған жақын болған тәсіл іздеу болып есептеледі. Осындай кодталулар құрудың оптимал әдістеріне жақын К. Шеннон және Р. Фаноларға тиісті екі әдіс бар.

Құрылымы бойынша өте қарапайым болған Фано әдісі кезектегідей сипатталады. Реттелген (ықтималдықтардың кему ретімен) әріптер тізімі оларға кіретін әріптер мүмкін болғанша бір-бірінен кем айырмашылықта болатындай етіп ықтималдықтар қосындысы екі бөлікке (тізбекті) бөлінеді. Бірінші бөліктің әріптеріне 0 символы, ал екінші бөлігіне 1 символы жазылады. Осыған жалғаса отырып, егер олар кемінде екі әріптен құралатын болса, онда әрбір алынған бөліктерменде дәл осындай жұмыс орындалады. Бұл процесс барлық тізім бір әріптен тұратын бөліктерге бөлінбейтіндей болғанша жалғаса береді. Әрбір әріпке осы процесс нәтижесінде жазылған символдар тізбегі сәйкес қойылады. Мұнда алынған код префиксті болатынын көру қиын емес. Фано әдісі бойынша құрылған кодқа мысал 3- кестеде келтірілген.



3- кесте

Мұнда кодталу бағасы:

$$2\cdot(0.30+0.18)+3\cdot(0.14+0.14+0.11)+4\cdot0.06+5\cdot(0.05+0.02) = 2.72$$

болады.

Бұл жерде мынаған мән берген жөн, яғни әріптер тізімін тең екіге бөлу белгілі бір қатынастарда бір мәнді орындалмауы мүмкін.

Алдынғы телеграфтарда танымал болған Морзе кодында әр бір әріпке немесе цифрға, сонымен бірге тыныс белгілері және басқада белгілерге қысқа уақыттағы үзілістермен бөлінген 3 мәрте ұзындау ток сигналынан (“сызықша” - аз аралықтағы қысқа сигналдар) тұратын тізбек сәйкестендіріледі. Әріптер арасындағы бос орын ұзындығы “сызықша”ның ұзындығына, ал бос орын сөздер арасындағы еселік үзіліске тең болған үзіліс бөлгіштерді (3 бірлік уақыттағы токтың қосылуы) сипаттайды. Морзе коды европа тілдеріндегі әр түрлі латын алфавитіндегі әріптердің жиілік қасиетін есепке алып қолданудан құралған. 4-кестеде латын әріптерінің коды және олардың ағылшын мәтіндеріндегі жиілігі келтірілген. Негізінен көптеу қолданылатын әріптер мүмкін болғанша қысқа сөздермен кодталады. Егер ағылшын мәтіндері көрсетілген жиіліктерді (бос орынның жиілігін де) есепке алмастан әріптер бойынша кодталса, онда бір әріпке орташа $\log_2 26 \approx 4.70$ екілік белгілер (немесе бос орынды есепке алғанда $4.75 \approx \log_2 27$) талап етіледі. Морзе кодын қолданғанда 4.14 белгі болып, шамамен 13% үнемделеді.

4-кесте

.	E	0.13105	- - .	D	0.03788	. - -	W	0.01539
-	T	0.10468	. - . .	L	0.03389	- . . .	B	0.01440
. -	A	0.08151	. . - .	F	0.02924	. . . -	V	0.00919
- - -	O	0.07995	- . - .	C	0.02758	- . -	K	0.00420
- .	N	0.07098	- -	M	0.02536	- . . -	X	0.00166
. - .	R	0.06882	. . -	U	0.02459	. - - -	J	0.00132
. .	I	0.06345	- - .	G	0.01994	- - . -	Q	0.00121
. . .	S	0.06101	- . - -	Y	0.01982	- - . .	Z	0.00077
. . . .	H	0.05259	. - - .	P	0.01982			

Орыс әріптері үшін Морзе коды бір түрлі дыбыстарды сипаттайтын (мысалы: Б және Н орыс әріптерін В және N латын әріптерімен) әріптер үшін латын әріптерінің сәйкестігін еске ала отырып құрастырылған. Сондықтан кодтар орыс тілді мәтінде әріптердің жиілікпен қатынасу сәйкестігі анағұрлым тұра келмейді. 5- кестеде орыс тілді әріптер үшін кодтар және оларға сәйкес жиілігі келтірілген (мұнда ь және ъ, сонымен тағыда Е және Ё бір түрлі кодталады).

5-кесте

- - -	О	0.110	- -	М	0.031	- - -	Ч	0.015
.	Е	0.087	-..	Д	0.030	.- - -	Й	0.012
. -	А	0.075	. - - .	П	0.028	. . . .	Х	0.011

. .	И	0.075	. . - -	У	0.025	. . . -	Ж	0.009
-	Т	0.065	.-.-	Я	0.022	. . –	Ю	0.007
- .	Н	0.065	-.--	Ы	0.019	- - - -	Ш	0.007
. . .	С	0.055	- - . .	З	0.018	- . - .	Ц	0.005
. - .	Р	0.048	- . . -	Ь	0.017	- - . -	Щ	0.004
. - -	В	0.046	- . . -	Ъ	0.017	. . - . .	Э	0.003
. - . .	Л	0.042	- . . .	Б	0.017	. . - .	Ф	0.002
- . -	К	0.034	- - .	Г	0.016			

Әр түрлі әріптердің жиілігін есепке алмағанда 32-әріптік алфавитте бір әріп үшін орташа $\log_2 32 = 5.00$ екілік белгілер талап етіледі (31 әріп үшін - $\log_2 31 \approx 4.95$). Шын мәндегі жиілікті есепке алғанда – 4.45 (тиімділік шамасы – 10%), ал Морзе кодын қолданғанда – біраз көптеу болады. Бір қызық жағдай, танымал жазушы Л. Толстойдың “Война и мир” романының мәтінінде, әріптер жиілігі үшін осы секілді есеп біразғана төмен мәнді береді: 4.35. Осы жерде мән берген жөн, яғни түрлі өлшемді Морзе коды бөлгіштермен бірге кейіндеу әріп басатын құрылғылардың кейде жарамсыз болып қалуынан телеграфтарға тең өлшемді бес разрядты Бодо екілік кодымен ауыстырылған (регистрлларды ауыстыру жолымен, мұнда, кейде бес разрядты сан екі немесе үш түрлі символдарды кодтаған). Бодо кодында бөлгіштер талап етілмейді, себебі қабылдау сандарының соңы белгілі, яғни әрбір 5 элементар сигналдан соң бір әріп бітеді және кейінгі әріп басталады.

Қателерді табу және өңдеу кодтары

$B = \{0,1\}$ алфавитінде n ұзындықтағы B^n сөздер жиынын қарастырамыз. Әр бір $x_1,x_2,\ldots,x_n$ сөзді B алфавитінде n - өлшемді $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ векторымен теңдестіреміз. B^n нен алынған $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ және $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ векторлардың қосындысы ретінде $(x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \ldots, x_n \oplus y_n)$ векторды айтамыз. Мұнда $\oplus$ белгі модуль 2 бойынша қосу амалы екендігін ескертіп өтеміз.

Егер кез келген $X = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ векторын $b \in B$ элементке көбейту амалын $bX = (bx_1,bx_2,\ldots,bx_n)$ тәрізді еңгізсек, онда B^n жиынды n-өлшемді векторлық кеңістік ретінде қарастыру мүмкін.

B^n векторлық кеңістікте X және У векторлардың сәйкес емес компоненталар саны ретінде X және У векторлар арасында $d(X,Y)$ – Хемминг қашықтығын және X вектордың X пен n-өлшемді нөльдік (0,0,...,0) вектор арасындағы қашықтық ретінде $\|X\|$ норманы анықтау мүмкін. Бұл жерде, B^n нен алынған кез келген $X = x_1x_2\ldots x_n$ сөз үшін

$$\|X\| = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

және B^n нен алынған кез келген X,У үшін

$$d(X,Y) = \|X \oplus Y\|$$

болатыны айқын.

B^n метрикалық кеңістікті өте қарапайым геометрикалық интерпретация ретінде қарастыруға болады: B^n кеңістікке n-өлшемді бірлік кубтың төбелер жиыны сәйкес келеді, ал B^n нен алынған екі элемент арасындағы қашықтық куб төбелерін сәйкес ретінде қосатын тізбектегі қабырғалардың минимал санына тең.

Еркін алынған $X = x_1x_2\ldots x_n \in B^n$ сөз үшін оның N(X) сандық мәнін анықтаймыз:

$$N(X) = {}_{j=1}\Sigma^n x_j 2^{n-j} .$$

Мысалы , x = 0110011 және У = 0001101 болса, онда $\|X\| = 4$, $\|Y\| = 3$, $X \oplus Y = 0111110$, $d(X,Y) = \|X\oplus Y\| = 5$, N(X) = 1+2+16+32=51, N(Y) = 1+4+8=13 болады. Мұнда, 19 сан үшін e(19) = 10011, $e_7(19)$ = 0010011 болуын ескеріп өткен жөн.

Бұдан былай бұл бөлімде теккана белгілі ұзындықтағы m >2 екілік сөздерден құралатын кодтарды қарастырамыз.

Айталық кез келген $V = (u_0,u_1,\ldots,u_{m-1}\} \in B^n$ код үшін

$$d(V) = \min d(u_i,u_j),\ i\neq i$$

шама берілген болсын. Осы шекті шама кодтық қашықтық деп айтылады. Мысалы, $V = \{a_1{:}0100, a_2{:}1101, a_3 1110, a_4{:}0010\}$ код үшін $d(a_i,a_j)$, I \ $i\neq j$ қашықтықтарды және d(V) кодтық қашықтықтарды табыңдар.

Енді «қателер» деп айтылатын екілік сөздерді ауыстырудың кейбір көріністерін қарастырамыз.

-X – сөзіндегі $0\rightarrow1(1\rightarrow0)$ көрінісіндегі жеке қате деп 0 белгісінен біреуін (сәйкес ретінде 1) 1 белгісімен (сәйкес ретінде 0) ауыстыру нәтижесін айтамыз. Осы көріністегі жеке қателерді тағыда «белгілерді ауыстыру» немесе «аддитив қателер» депте айтамыз.

- X сөзіндегі $0\rightarrow\lambda(1\rightarrow\lambda)$ көрінісіндегі жеке қате деп 0 сиволдардан (сәйкесінше 1) біреуін қашықтату нәтижесін айтамыз. Сонымен бірге бұл жерде сөз ұзындығы бір бірлікке азаяды. Бұл типтегі жеке қателер ″белгілердің түсіп қалуы″ деп айтылады.

- X сөзіндегі $\lambda\rightarrow 0$ $(\lambda\rightarrow1)$ көрінісіндегі жеке қате деп сөздің кейбір символдарының алдына немесе оның соңғы белгісінен соң белгілердің қойылу нәтижесі айтылады, мұнда сөз ұзындығы бір бірлікке көбейеді.

- $X \in B^n$ сөзіндегі $+2^i(-2^i)$, мұнда $0\leq i \leq n$, көрінісіндегі жеке қате деп X сөздің сандық мәнінен сандық мәні 2^i ге үлкен (сәйкес ретінде кіші) болған $Y\in B^n$ сөзіне ауыстыруды айтамыз. Мұндай жеке қателерді «арифметикалық қателер» деп айтамыз.

Көрнекілік үшін 6- кестеде қарастырылған типтегі қателер нәтижесі бойынша 0001101 (13 санның екілік жазуы) сөзден алынған қателер орны келтірілген.

6 кесте

Қате тізімі	Қате орны	Қателер нәтижесінде алынған сөздер	Ескерту

$0\to 1$	2 - белгі	0101101	
$1\to 0$	5- белгі	0001001	
$0\to\lambda$	2 – белгі	001101	
$1\to\lambda$	5- белгі	000101	
$\lambda\to 0$	2 және 3 белгілер арасында	00001101	
$\lambda\to 1$	2 және 3 белгілер арасында	00101101	
$+2^2$		0010001	13+4=17
-2^2		0001001	13-4=9

Қателіктердің типтері деп жеке қателер көрінісіндегі кейбір жиынды айтамыз. Мысалы, $\{0\to\lambda, 1\to\lambda, \lambda\to 0, \lambda\to 1\}$ типтегі қателер кез келген белгінің жойылуы немесе қойылуы болып есептеледі. Жеке қателердің қайталанып келу санын осы қатенің жиілігі деп айтамыз. Сонымен, 0001101 сөзі 3-реттік қате нәтижесінде (бірінші белгі алдына 1 қою, бесіншінің алдынан 0 ді түсіріп қалдыру және соңғы белгіні ауыстыру) 1001100 сөзіне өтеді.

Бұдан былай $\{(0\to 1),(1\to 0)\}$ типтегі қателерге, яғни белгілерді ауыстыруларға көптеу көңіл бөлеміз. Берілген типтегі әр түрлі қателерді табу және өңдеу мәселелерінің қойылуында қателердің пайда болуына жіберілген заңдылықтардың келіп шығуына мән береміз. Бұл заңдылықтар не ықтималдық, не комбинаторлық характерге ие болуы мүмкін. Ал заңдылықтар екілік сөздерді желі арқалы жеткізу немесе сақтау кезінде беріледі екен. Көбінесе кезектегі екі типтегі желілер қарастырылады:

а) кез келген белгіде $p(0<p<1/2)$ ықтималдықпен берілген типтегі қателер пайда болады, сонымен бірге әр түрлі белгілердегі қателер статистикалық жағынан тәуелсіз;

б) әр бір n ұзындықтағы сөзде берілген типтегі жиілігі s тен көп болмаған кез келген қате пайда болуы мүмкін.

Кедергіге төзімді кодталудың негізгі бағыты кезектегілерден тұрады. Байланыс желісі арқылы X,У,Ғ,... ақпараттардың орнына қателерді табуды қамтамасыз ететін немесе тура декодталуды жеткізетін белгілі бір жолмен X′,Y′,Ғ′,… кодталудың жаңа сипаты жіберіледі.

$V = \{u_0,u_1,\dots,u_{m-1}\} \subseteq B^n$ кодты қолдану кезіндегі қателерді өңдеу мүмкіншілігін кезектегідей тәрізде түсіндіру мүмкін. T(x) арқылы қарастырылып жатқан желіде мүмкіндік қателер нәтижесінде X сөзден алу мүмкін болған сөздер жиынын белгілейміз, дербес жағдайда $T(u_i)$ – u_i кодталған сөздің қате болу нәтижесінде алынуы мүмкін болған сөздер жиыны. ${}_{i=0}U^{m-1}T(u_i)$ жиынның V ға еркін бір мәнді D кескіні «декодталу» деп айтылады. D декодталу мәселесі ${}_{i=0}U^{m-1}T(u_i)$ жиынды қиылыспайтын $D^{-1}(u_i)$, i = 0,1,…, m-1 ішкі жиындарға (аймақтарға) бөлумен пара – пар, мұнда әр бір $D^{-1}(u_i)$ аймақ D кескіндеудегі u_i сөздердің кернусхасынан құралған. D декодталу кезінде кез келген $u_i \in V$ сөзде u_i сөзді $T(v_i)\cap D^{-1}(u_i)$ жиындағы қандайда бір сөзге ауыстырғанда тек қана сол қателіктерге ғана сүйеніп есептеуіміз табиғи. Дербес ретінде, барлық қателіктер өңделетін D декодталу бар болуы үшін $T(u_i)$, $i=0,1,\ldots,m-1$ жиындар жұбымен қиылыспайтын болуы қажет және жеткілікті. Онда, байланыс желісі бойынша әлдеқандай Y хабарды ала отырып, біз оның қандайда бір X кодталу сөзінің аймағына тиісті екендігін анықтаймыз және дәл осы X сөзі ретінде жеткізілетіндігіне қорытынды жасаймыз. Осындай қасиетті игерген код берілген типтегі қателерді өңдейтін код деп айтылады.

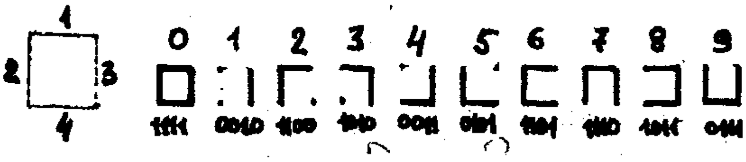
$V \subseteq B^n$ код үшін T(X) жиынның орнын басу типтегі s қателікті өңдеуі X- сөздің s радиусты метрикалық аймағымен, яғни X сөзден s тен көп болатын қашықтықта жатқан нүктелер жиынтығына сәйкес келеді. Сондықтан $T(u_i)$ жиынның қиылыспайтындылық шарты кодталу қашықтығының $d(V)>2s$ болуына пара-пар. Сонымен, V код s қателікті өңдеу коды болады екен, сонда тек сондағана, қашан $d(V)>2s+1$ болса, мұнда $d(V)$ – бүтін сан.

Осы қателерді өңдеу мәселелерімен қатар қателерді өңдеудің бұданда күшсіз мәселелерін құрастыру мүмкін. V кодты қолдану кезінде бір кодтық сөзді басқа кодталу сөзіне ауыстыру кезінде ғана қателіктерді таба алмай қалуымыз мүмкін. Осы жерден дербес ретінде кезектегі тұжырым келіп шығады, яғни d кодталу қашықтығына ие болған V код барлық уақыт (d-1) ге дейінгі орнын басу типтегі жеке қателерді табуға
мүмкіндік береді.

Жоғарыда айтылғандардан кезектегідей қорытынды жасауымыз мүмкін. Кодталудың кедергілерге тұрақтылығын қамтамасыз ету үшін сол хабар тұралы ақпараттардан басқа хабарларды жеткізу (немесе сақтау) процесінде қателердің пайда болу кезінде жіберілген хабарларды табу және тіктеуге мүмкіндік беретін қосымша ақпараттар болатын оданда ұзындау кодтарды қолдануға тұра келеді. Бұл деректі мынадай қалыптастыру мүмкін: сенімділік үшін кодталудың көпмүмкіншілігімен ғана мақсатқа жетсе болады.

Сонымен, 10 ға дейінгі араб сандарын кодтау үшін алдынғы параграфтағы мысалда сипатталғандай 9 екілік белгі қолдану емес, ал $4(2^4 = 16 > 10)$ және жазылу әдісіне сәйкес минимизациялау жеткілікті (3 – сызба). Біракта, кодталудың осындай әдісінде $C_{10}^2 = 45$ жұп кодталу арасында дәл бір разрядқа айырмашылығы бар немесе тіпті жеке орын басуда бір кодты басқа код ретінде қабылдау мүмкін болған 14 жұп кодтар болады. Шын қолданып жатқан ондық 9 белгілі екілік сандар мен кодталуда бір жұптықта (0 және 8 сандары) айырмашылық тек бір разрядта болады (шамасы кейбір кездерде түсініксіз толтырылғандықтан немесе оқығандағы үзілістерге байланысты қателіктерге алып келуі мүмкін), ал басқа жұптарда үш разрядтан кем болмайды.

Сонымен бірге қабылданған кодталу әдісі басқа себептермен қолайлылау. Оның қолайлылығы әдеттегі араб цифрларының жазылуына ұқсастығында.



3- сызба

Кодтардың кедергілерге тұрақтылығын құрудың қарапайым әдісі – қайталану. Сонымен, егер жіберілетін сөздің әр бір әрпін (s+1) рет қайталасақ, онда мұндай код орнын ауыстыру типтегі s қателікке дейін табуға қабилетті қателік болмаса хабарлар (s+1) бір түрлі белгілерден құралған біртекті серияларға бөлшектенеді, ал егер қате табылса және тіпті егер барлық s қателік бір серияның ішінде болса, біртектілік бұзылған қателермен жіберілген бір немесе бірнеше белгілерді табу мүмкін болады.

Бұдан былай біз тек қана орнын басу типіндегі жалғыз қателіктер болған жағдайды қарастырамыз. Жалғыз қателерді табу мүмкін болуы үшін алдын қарастырылған қарапайым тәсілдерді қолданғанда жіберілетін сөздер ұзындығы екі есеге, ал оны өңдеу үшін үш есеге көбейеді.

Бірақта бұданда көбірек үнемді кедергіге мекем кодталулар болуы мүмкін. Мұндай әдістер идеясы кезектегілерде тұжырымдалады. Екілік сөздер жиынында кез келген функция қарастырылады. Ізденілген код осы функция кез келген бір белгіленген мәнді қабылдайтын B^n нен алынған сөздер жиыны ретінде анықталады. Бұл функция кезектегідей таңдалады, яғни нәтижеде кез келген жеке қателерде осы өзгерістер бойынша функция мәні аусады және сол сөз қателерінің бірмәнді көрінісін және қате орнын анықтау мүмкін болады.

Осындай кодталу ретінде – Хемминг кодына бір мысал қарастырамыз. Мұнда, n санды белгілеп қоямыз және $2^{\ell-1} \leq n < 2^{\ell}$ шарт орындалатын сондай бір сан табамыз. Бұл жағдайда $\ell = [\log n]+1$ болады, Мысалы: $\ell(5) = \ell(7) = 3$, $\ell(8) = \ell(10) = \ell(13) = 4$.

Айталық, кез келген еркін $X = x_1x_2\ldots x_n \in B^n$ сөз үшін

$$H(x)=x_1e_l(1) \oplus x_2e_l(2) \oplus \ldots \oplus x_{n\ l}(n)$$

болсын. Бұл жерде H(X) X сөзінің екілік жазудағы (ℓ сан көмегімен) бірлік белгілер нөмірлері болған векторлардың қосындысы нәтижесінде алынған ℓ ұзындықтағы векторларды сипаттайды.

Мысал: Айталық $n = 6$, $x = 010101$ және $y = 110100$.

Онда $\ell = \ell(6) = 3$,

$H(x) = (0,1,0)+(1,0,0)+(1,1,0) = (0,0,0)$,

$H(y) = (0,0,1) + (0,1,0) + (1,0,0,) = (1,1,1)$

болады.

Теорема. $H(x) = (0,0,\ldots,0)$ (*)

болатын барлық $X = x_1x_2\ldots x_n \in B^n$ сөздерден құралған H_n – Хемминг коды бір орнын ауыстырып өңдеудің коды болады.

Жоғарыда қарастырылған мысалда $X \in H_6$, $Y \notin H_6$.

Мысал: Айталық , X = 010101 $\in H_6$ сөздің бесінші белгісінде орын ауысқан болсын, нәтижеде T = 010111 сөз алынады.

Себебі H(T) – (0,1,0)+(1,0,0)+(1,0,1)+(1,1,0) = (1,0,1) болғандықтан H(Y) сөздің сандық мәні 5 ке тең және ол орны ауысқан белгінің нөмірін анықтайды.

Бұл жерде $|H_n|$ - H_n кодтың элементтер саны 2^{n-1} ге тең екендігін көреміз. Бұл, нөмірлері $2^0,2^1,...,2^{\ell-1}$ сандардан (ақпараттық позициялар) айрықша болған (n-ℓ) компонентті мәндердің кез келген еркін берілуінен келіп шығады, ал $2^0,2^1,...,2^{\ell-1}$ нөмірлеріндегі компоненттер мәні (*) шарттан бірмәнді анықталады. $\ell = [\log n]+1 =]\log(n+1)[$ болғандықтан

$2^{n-1}/n \le |H| = 2^{n-]\log(n+1)[} \le 2^n/(n+1)$ болады.

Дербес ретінде $|H_6| = 2^{6-]\log 7[} = 2^{6-3} = 2^3 = 8$.

Осы H_6 код төменде келтірілген.

H_6

000000
111000
110011
001011
101101
010101
011110
100110

Мұндай кодталу жиынымен 3 ұзындықтағы барлық сөздерді кодтау мүмкін, ал олар 8.

Р. Хэмминг декодталудың өте қарапайым және қолай орындалатын кодталу әдісін ұсынған. Оның үшін m ұзындықтағы X кодталу сөзі кодталу кезінде білгілі бір тәсілмен санақталатын ℓ тексерілген разрядтарымен ($\ell =]\log(m+1)[$) қосымша толтырылады. Ал, алынған X хабарлар m ақпараттық және ℓ тексерілген позициялардан құралады. Тексерілген разрядтар үшін нөмірлері 2 санның бүтін дәрежелеріне келетін 1-ші, 2-ші, 4-ші, 8-ші және т.б. нөмірлер ажратылады. Олардың екілік сан құрамында дәл біреуғана ғана бір саны болады. Басқа орындарға (3,5,6,7,9,10,...) кодталатын X сөзінің белгілері жайғастырылады.

Енді, екі мысал арқылы Хемминг бойынша кодталудың қалай өткізілетіндігін көрсетеміз.

Айталық X = 1100 кодталу сөзі берілген болсын, мұнда m = 4, ℓ =]log 5[= 3. m + l = 7 ұзындықтағы құпияланған хабар P_1 $P_2$1 $P_4$100 көрінісінде болады. Тексерілетін P_1,P_2,P_4 белгілер кезектегідей есептелінеді. P ның мәні нөмірлері P_i дің нөмірлеріне сәйкес екілік бейнедегі бірлерден құралған сондай ақпараттық белгілердің модул 2 бойынша қосындыларына тең, яғни оң жақтан i-ші разрядта: P_1 – 1 – ші разрядта, P_2 – 2 – ші, P_4 – 3 – шіде (7-кесте).

$P_1 = P_3 \oplus P_5 = 0$; $P_2 = P_3 = 1$; $P_4 = P_5 = 1$. Нәтижеде $X' = 0111100$ ді аламыз

7-кесте

i	i дің екілік сипаты	Ақпараттық орындар	Тексерілген орындар	Тексерілген белгілер есебі	Кодталудан кейінгі ақпарат.
1	001		0	$p_3 \oplus p_5$	0
2	010		1	p_3	1
3	011	1			1
4	100		1	p_5	1
5	101	1			1
6	110	0			0
7	111	0			0

Мысал. Ұзындығы $m = 10$; 1001110110; $\ell = 4$ болған X кодталатын сөздің тексерілетін разрядтарының есептелінуі 8-кестеде келтірілген, X= 01110010110110.

8 – кесте

i	i-дің екілік сипаты	Ақпараттық орындар	Тексерілген орындар	Тексерілген белгілер есебі
1	0001		0	$p_3 \oplus p_7 \oplus p_9 \oplus p_{13}$
2	0010		1	$p_3 \oplus p_7 \oplus p_{10}$
3	0011	1		
4	0100		1	$p_7 \oplus p_{12} \oplus p_{13}$
5	0101	0		
6	0110	0		
7	0111	1		
8	1000		0	$p_9 \oplus p_{10} \oplus p_{12} \oplus p_{13}$
9	1001	1		
10	1010	1		
11	1011	0		
12	1100	1		
13	1101	1		
14	1110	0		

Енді кез келген әр түрлі X,У сөздер үшін олардың Хэмминг бойынша құпияланған X',Y' бейнелері кемінде үш разрядта айрықшылықта болатын және жеке қателерді өңдеуді қамтамасыз ететінін дәлелдейміз.

1) $\rho(X,Y)>3$, яғни X,Y үш немесе оданда көп разрядта айырмашылыққа ие болады: мұнда кодталу негізінде бұл айырықшалықтар сақталады; тексеретін разрядтарда айырмашылық қосылуы мүмкін, яғни $\rho(X',Y') \geq 3$.

2) $\rho(X,Y) = 2$, яғни X,Y екі разрядта айырықшалыққа ие болады. Айталық, құпияланған сөздерде бұл орындар $\alpha\neq\beta$ болған α, β сандардың екілік жазылуы еш болмағанда бір і-ші разрядта ($\alpha=0$, $\beta=1$ немесе $\alpha=1$, $\beta=0$) айырықшалықта болсын. і-ші разрядқа сәйкес келетін тексерілетін белгіні есептеуде, яғни 2^i орында тек X',Y' сөздердің біреуі үшін модуль 2 бойынша қосындыда бір қатысады, ал α, β дан басқа қалған орындарда X және Yсөздер сәйкес келеді. Демек, 2^i-ші тексерілетін орындарда X' және Y' сөздерде айрықшалыққа ие болады: нәтижеде

$$P(X',Y')\geq 3$$

екені айқын.

3) $\rho(X,Y) = 1$, яғни X,Y дәл бір разрядта айырықшалыққа ие. X және Y сөздеріндегі сол ақпараттық разряд нөмірі 2 санның бүтін дәрежесіне тең емес, яғни оның екілік жазылуы кемінде екі бірлерге ие болады. Онда сәйкес екі тексеретін разрядтарда X және Y сөздері әр түрлі болады, мұнда тағыда $\rho(X',Y')\geq 3$ болуын көреміз.

Егер X кодталу сөзін жеткізу кезінде бір қателік табылса, онда декодталу кезіндегі T сөзден алынған екілік жазу ретінде қолданған H(T) вектор бұзылған разрядтық нөмірді көрсетеді.

4. Декодталудың бірмәнділік критериі

Бұл жерде біз A және B алфавиттер үшін Σ сұлба арқылы берілген алфавиттік кодталуларды қарастырамыз:

$$\begin{array}{l} a_1 \text{———} b_1 \\ a_2 \text{———} b_2 \quad (\Sigma) \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_r \text{———} b_r \end{array}$$

және $S'(A)=S(A)$, яғни хабарландыру дерек көздері A алфавитіндегі барлық сөздер жиынын келтіріп шығарады деп есептейміз. Ал, алфавиттік кодталу S(B) жиынында S(A) жиын кескінін келтіріп шығаратындығы айқын. $S_\Sigma(B)$ арқылы S(A) кескіндеулер өзара бірмәнді болған жағдайда декодталу мүмкін, яғни B кодталу бойынша бастапқы A ақпаратты бірмәнді түрде тіктеу мүмкін болады. Оның бұл кездегі басты қызмет атқарушы коды B коды болып табылады. Мұндай жағдайларда былайша айтылады, яғни алфавиттік кодталу өзара бірмәнді болып табылады екен.

Мысал үшін $A=\{a_1, a_2\}$, $B=\{b_1, b_2\}$ алфавиттік кодталуды қарастырсақ, оларды схема түрінде былай жазу мүмкін:

$$\begin{array}{l} a_1 \text{———} b_1 \\ a_2 \text{———} b_1 b_2 . \end{array}$$

Айталық B' және B'', A' және A'' сөздердің сәйкес ретіндегі коды болсын. Егер $A' \neq A''$ болса, онда $B' \neq B''$ болары айқын.

Декодталу процесі төмендегідей амалға асырылады. B, $B\in S_\Sigma(B)$ сөздерді қарапайым кодтарға бөлеміз. Оның үшін мынадай болатындығын байқаймыз. B сөзге b_2 әріп әр бір енуден алдын міндетті түрде b_1 әріп тұрады. Бұл барлық

(b_1b_2) жұптықтарды айырып алуға мүмкіндік береді. B сөзінің қалған бөлігі b_1 әріптерінен құралады. Егер әрбір (b_1b_2) жұптықты a_2 мен, ал қалған әрбір b_1 әріпті a_1- ге ауыстырсақ B сөзге ұқсас A сөзді аламыз.
Айталық $B= b_1b_1b_2b_1b_2b_1b_1b_1b_2$ сөз берілген болсын, мұнда жұптықтар айырып алынғаннан соң олардың қарапайым кодтар бейнеленген түрін аламыз:

$$B= b_1(b_1b_2)\ (b_1b_2)\ b_1b_1\ (b_1b_2),$$

бұл жерде мына сөз алынады:

$$A=a_1a_2a_2a_1a_1a_2\ .$$

Сол секілді өзара бірмәнді қасиетке ие болмайтын алфавиттік кодталуларға көптеген мысалдар келтіру мүмкін.

Осыған байланысты сұрақ туындайды:
Осы алфавиттік кодталудың Σ сұлбасы бойынша алфавиттік кодталудың өзара бірмәнділік қасиетін білуге болама? Бұл мәселенің шешімін табу қиындығы мынада, яғни өзара бір мәнділікті тікелей тексеру үшін шексіз көп сөздер тізбегін міндетті түрде қарастыру қажет.

Алфавиттік кодталу бір мәнділігінің жалпы критериін келтіруден алдын өзара бірмәнділіктің өте қарапайым жеткіліктік белгісін қарастырайық.

Анықтама. Айталық B сөзі төмендегідей көрініске ие болсын:

$$B=B'B''\ .$$

Онда B' сөзі B сөзінің бастаушысы немесе сөздің префиксі, ал B''
B сөзінің соңы деп айтылады.

Анықтама. Егер кез-келген i және j ($1\leq i,\ j \leq r,\ i \neq j$) үшін B_i сөзі B_j сөзінің префиксі болмаса Σ сұлба префиксті қасиетке ие болады.

1-теорема. Егер Σ сұлба префикстік қасиетіне ие болса, онда алфавиттік кодталу өзара бір мәнді болады.

Дәлелдеу. Айталық $S_\Sigma(B)$ жиыннан алынған кез-келген B сөз екі ашиалауға (декодталуға) мүмкіндік берсін, ал ол екі қарапайым кодтарға бөлінеді деген сөз:

$$B=B_i \dots B_{is}$$

$$B=B_j \dots B_{jt}\ .$$

Айталық $B_{i1} =B_{j1},\dots,\ B_{in-1}=B_{jn-1},\ B_{in} \neq B_{jn}$ болсын. Мұндай жағдайда B_{in}, B_{jn} сөздерінің біреуі екіншісінің префиксі болып табылады.

Теорема дәлелденді.

Қарастырылған мысалдар көрсетіп отырғандай көп жағдайларда префикстік қажетті шарт болып табыла бермейді. Σ сұлба префикстік қасиетіне ие болмауы мүмкін, ал біpақта Σ-ны анықтайтын алфавиттік кодталу өзара бір мәнді болып табылады.
Айталық, $B=b_{i1} \dots b_{in}$, $S(B)$ жиыннан алынған сөз болсын. B^* арқылы B-дан кезектегідей ауыстыру жолымен алынған сөзді белгілейміз:

$$B^*=b_{in} \dots b_{i1}.$$

Ал, Σ арқылы

$$a_1 ——— B_1^*$$

....

a_r———B_r^*

типтегі сұлбаны белгілейміз.

Мысал. Σ ретінде жоғарыдағы мысалда көрсетілген сұлбаны алсақ, онда Σ^* мынадай көрініске ие болады:

a_1——b_1

a_2—b_1b_2 .

Мұнда, Σ префикстік қасиетіне ие болады, ал 1-теорема бойынша Σ^* - ретінде берілген алфавиттік кодталу өзара бір мәнді болады.

Ескерту: Σ сұлба арқылы анықталған алфавиттік кодталу және Σ^* схема арқылы анықталған алфавиттік кодталулар бір уақытта өзара бір мәнділікке ие болуыда, болмауыда мүмкін.

2-теорема: Егерки не Σ сұлба , не Σ^* сұлба префикстік қасиетке ие болса, онда Σ (Σ^*) ретінде берілген алфавттік кодталу өзара бірмәнді болады. Бұл жерде сұлбаны алфавиттік кодталуға Σ да, Σ^* да префикстік қасиетіне ие болмайтын, біракта алфавиттік кодталу бірмәнді болатын мысал келтіру мүмкін. Оның үшін жоғарыдағы мысал тура келмейді, бірақ ол мысалды кішкентай жетілдіреміз.

Мысал: Айталық А={a_1, a_2, a_3} және В={ b_1,b_2,b_3} берілген болсын.

Σ сұлбаны қарастырамыз:

a_1——b_1

a_2—b_1b_2 (Σ)

a_3—b_3b_1.

Σ және Σ^* сұлбалар префикстік қасиетке ие емес екендігі айқын, біракта сонымен бір уақытта алфавиттік кодталу өзара бірмәнді болады. Шындығында, егер $B \in S_\Sigma$ (B) болса, онда бұл сөз бірмәнді түрде қарапайым кодтарға бөлінеді:

– b_2 әріптің сол жағында міндетті түрде b_1 табылады, оны (b_1b_2) жұптық ретінде айырып қоямыз;

–b_3 әріпінің оң жағында міндетті түрде b_1 болады, оны (b_3b_1) жұптық ретінде айырып қоямыз;

–барлық (b_1b_2) және (b_3b_1) жұптарды айырып болғаннан соң сөзде тек b_1 символдар ғана қалады.

Алға қарай қарастырмас бұрын мынадай белгілулер енгіземіз:

$\ell(B)$ арқыла сөздегі әріптер санын білдіретін В сөзінің ұзындығын белгілейміз. Дербес ретінде B_i (i=1…r) қарапайым кодтар ұзындығы үшін $\ell(B_i)=\ell_i$ ретінде қабылдаймыз. L арқылы Σ сулба “ұзындығы” ретінде $\ell(B_1 \ldots B_r)$ шаманы белгілейміз.

Айталық

$$B_i = \beta' B_{i1} \ldots B_{ik} \beta'' \qquad (1)$$

қарапайым B_i кодтың нөлдік болмаған жіктеуі, яғни B_i =B_i ($\beta' = \beta'' = \lambda$) жіктеуден айрықша болған жіктеу болсын. Бұл жіктеуде төмендегілерді ескереміз:

а) β' қарапайым кодпен аяқталуы мүмкін емес;

б) β'' бастау ретінде (префикс ретінде) қарапайым кодтарға ие болмайды. (1) теңдікте k параметр нөльге тең немесе үлкен болған бүтін сан болуы мүмкін. Сонымен бірге (1) қатынас қарапайым B_i кодта β' басталуын және β'' соңын сондай тастап жіберу мүмкін, ал қалған бөлігі қарапайым кодтарға бөлінеді (төмендегі сызба):

$$\rightarrow B_i \leftarrow$$

$$|\!-\!-|\!-\!-|\!-\!-|\!-\!-|\!-\!-|\!-\!-|\!-\!-|$$

$$\beta' \quad \beta_{i1} \quad \beta_{i2} \ldots\ldots \beta_{ik} \; \beta''$$

Шыныменде, әр бір B_i үшін (1) типтегі жіктеулер шекті. W арқылы B_i-дің барлық жіктеулер бойынша және барлық i-лер бойынша алынған k санның максимумын белгілейміз, яғни

$$W=\max k.$$

Мысал: $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B=\{ b_1,b_2,b_3\}$ алфавиттік кодталу және

$$a_1 \text{———} b_1b_2$$
$$a_2 \text{———} b_1b_3b_2$$
$$a_3 \text{——————} b_2b_3$$
$$a_4 \text{—————} b_1b_2b_1b_3$$
$$a_5 \text{——————} b_2b_1b_2b_3$$

сұлбаны қарастырамыз.

Мұнда $6 > \ell_i \geq 2$ болғандықтан $W< 3$ болады. Басқа жағынан

$$B_5=b_2b_1b_2b_2b_3 = b_2B_1B_3,$$

сондықтан W=2.

Енді $S^N(A)$ арқылы А алфавитіндегі ұзындықтары N-нен аспайтын барлық сөздер жиынын белгілейміз. Бұл жерде $S^N(A)$ шекті жиын, ал оның қуаты $\sum_{i=1}^{N} r^i$ - ге тең екендігі түсінікті. Осы жерде алфавиттік кодталудың өзара бірмәнділік критерин қарастырамыз.

Теорема (Марков А.А.): Σ сұлбалы кез-келген алфавиттік кодталу үшін сондай бір N_0 табу мүмкін, ал бұл жерде алфавиттік кодталудың бірмәнділік мәселесі осыған іспеттес $S^{N0}(A)$ шекті жиынның кодталу мәселесіне алып келеді және ол

$$N_0 \leq [(W+1)(L-r+2)]2$$

болады.

Дәлелдеуі [4].

Декодталудың бір мәнділік критерин Σ сұлба бойынша қалыптастыруда алфавиттік кодталудың өзара бірмәнділік қасиеттерінің бар немесе жоқ қасиеттеріне ие болудың қарапайым алгоритімін береді. Оның үшін А алфавитінде ұзындығы N_0-ден аспайтын, яғни $S^{N0}(A)$ сөздер жиынын қарастыру және осы шекті жиындағы кодталудың өзара бірмәнді болатындығын анықтау жеткілікті. Бұл алгаритмнің қиындық көлемін r^{N0} ретінде тұрпайы бағалау мүмкін.

Мысал. Жоғарыда көрілген мысалдағы алфавиттік кодталуды қарастырамыз. Бұл жерде $r=5$, $W=2$, $L=16$. Теоремадағы теңдікті қолдансақ $N_0=[(W+1)(L-r+2)_2=[3\cdot13]2=19$, $r^{N0}=5^{19}$ болады. Ал, бұл біразғана үлкен сан.

Декодталудың бірмәнділігін танып-білу.

Декодталудың бірмәнділігін танып-білу үшін графтар теориясы көмегінен пайдалануды жөн көрдік.

Айталық алфавиттік кодталу Σ сұлбасы берілген болсын:

$$a_1 \text{———} B_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (\Sigma)$$
$$a_r \text{———} B_r .$$

Әр бір қарапайым B_i код үшін

$$B_i = \beta' B_{i1} \ldots B_{ik}\, \beta'' \quad (*)$$

көрінісіндегі барлық жағдайларды қарастырамыз.

B_0 арқылы λ "бос" сөзді және (*) көрінісіндегі жіктеулерде префикстер формуласында немесе соңында β сөздер қатысатындарды өз ішіне алатын жиынды белгілейміз. Бұдан бұлай B_0 –ден алынған әр бір сөзге жазықтықта нүктелер сәйкес қоямыз.

Айталық $\beta', \beta'' \in B_0$ болсын. Мұнда,

$$B_i = \beta' B_{i1} \ldots B_{ik}\, \beta''$$

көрінісіндегі барлық жіктеулерді қарастырамыз. Олардың әр біреуі үшін β' және β'' сөздерге сәйкес келетін $B_{i1} \ldots B_{ik}$ сөздер жазылған бағытталған кесінділерді төбелермен жалғастырамыз (β' тан β''ге қарата). Алынған графты Г (Σ) арқылы белгілейміз.

Теорема. Σ сұлбалы алфавиттік кодталу өзара бір мәнділік қасиетіне ие болмайды сонда, тек сондағана, қашан Г(Σ) граф λ төбе арқылы өтетін бағытталған циклға ие болса.

Дәлелдеуі [5]. Сонымен теорема негізінде осындай алгаритмнің бар болуы Г(Σ) графтың құрылуынан және λ арқылы өтетін бағытталған циклды анықтаудан тұрады екен.

Мысал: Төмендегідей сұлба бойынша алфавиттік кодталуды қарастырамыз:

$$a_1 \text{——} b_1b_2$$
$$a_2 \text{——} b_1b_3b_2$$
$$a_3 \text{———} b_2b_3 \qquad (\Sigma)$$
$$a_4 \text{————} b_1b_2b_1b_3$$
$$a_5 \text{—————} b_2b_1b_2b_2b_3.$$

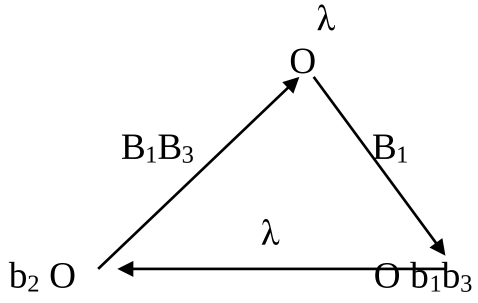
Кезектегідей жіктеулерге иеміз:

$$B_1 = (b_1)\,(b_2),$$
$$B_2 = (b_1)\,(b_3\, b_2) = (b_1\, b_3)\, b_2,$$
$$B_3 = (b_2)\,(b_3),$$
$$B_4 = (b_1)\,(b_2\, b_1\, b_3) = (b_1\, b_2)\,(b_1\, b_3) = (b_1\, b_2\, b_1)(b_3),$$
$$B_5 = (b_2)(b_1b_2b_2b_3)\,(b_2)(b_1b_2)\,(b_2b_3) = (b_2b_1)(b_2b_2b_3) = (b_2b_1b_2)(b_2b_3) =$$
$$= (b_2b_1\, b_2b_2)\,(b_3) .$$

Бұл жерде $B_0 = \{\lambda, b_2, b_1b_3\}$ және олармен

$B_2 = (b_1\ b_3)\ (b_2)$,
$B_4 = (b_1 b_2)\ (b_1\ b_3) = B_1\ (\ b_1 b_3)$, $B_5 = (b_2)(b_1\ b_2\ )(b_2\ b_3\ ) = (b_2)\ B_1\ B_3$
жіктеулер байланысты.

Ал, ол $\Gamma(\Sigma)$ графты құруға мүмкіндік береді (4- сызба)



4-сызба

$\Gamma(\Sigma)$ граф екі

$B = (B_1 b_1 b_3)\ (b_2 B_1 B_3)$, яғни $A' = a_4 a_5$,

$B = B_1(b_1 b_3 b_2)\ B_1 B_3$, яғни $A'' = a_1 a_2\ a_1 a_3$

ашиалауға ие болған

$B = B_1 b_1 b_3 b_2\ B_1 B_3$

сөзді келтіріп шығаратын бағытталған циклға ие.

Мысал. Кезектегідей сұлбаға ие болған алфавиттік кодталуларды қарастырамыз:

a_1———b_1,
a_2———$b_2 b_1$,
a_3———$b_1 b_2 b_2$,
a_4————$b_2 b_1 b_2 b_2$,
a_5—————$b_2 b_2 b_2 b_2$.

Олар үшін төмендегідей жіктеуге ие боламыз:

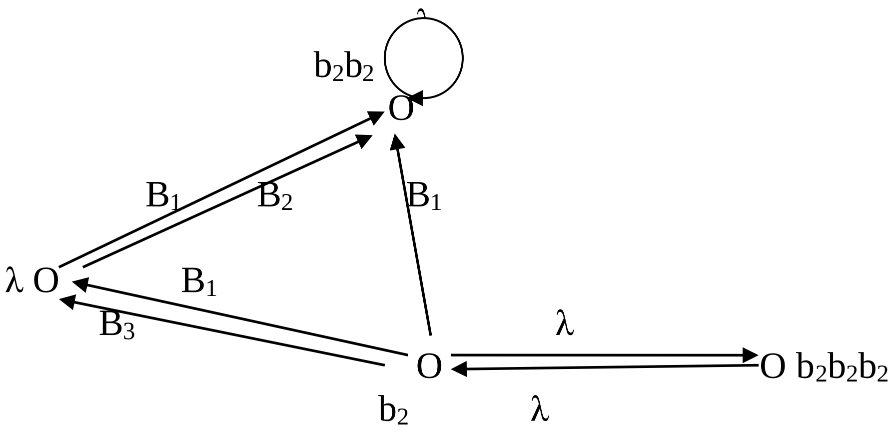
$B_2 = (b_2)\ b_1 = b_2\ B_1$;
$B_3 = (b_1)\ (b_2 b_2) = B_1(b_2 b_2)$; $B_3 = (b_1 b_2)(\ b_2)$;
$B_4 = (b_2)\ (b_1)\ (b_2 b_2) = (b_2)B_1(b_2 b_2)$; $B_4 = (b_2)(b_1 b_2 b_2) = b_2 b_3$;
$B_4 = (b_2\ b_1)\ (b_2\ b_2) = B_2(b_2\ b_2)$; $B_4 = (b_2\ b_1\ b_2)(b_2)$;
$B_5 = (b_2)\ (b_2\ b_2\ b_2\ ) = (\ b_2\ b_2)(\ b_2\ b_2) = (b_2\ b_2\ b_2\ )(b_2)$.

Мұнда $B_0 = \{\lambda,\ b_2,\ b_2\ b_2,\ b_2\ b_2\ b_2\}$ және олармен

$B_2 = b_2\ B_1$;
$B_3 = B_1(b_2 b_2)$;
$B_4 = (b_2)\ B_1(b_2 b_2)$; $B_4 = b_2\ B_3$; $B_4 = B_2(b_2 b_2)$;
$B_5 = (b_2)\ (b_2\ b_2\ b_2\ ) = (\ b_2\ b_2)(\ b_2\ b_2) = (b_2\ b_2\ b_2\ )(b_2)$.

жіктеулер байланысты.

Біз λ төбе арқылы өтетін бағытталған циклға ие болмаған $\Gamma(\Sigma)$ граф аламыз (5- сызба).



5-сызба

Демек Σ сұлбаның алфавиттік кодталуы өзара бірмәнділік қасиетіне ие екен.