Лекция 10

Сложение гармонических колебаний

1. Сложение гармонических колебаний одного направления и одной частоты.
2. Биения.
3. Сложение взаимно-перпендикулярных гармонических колебаний. Фигуры Лиссажу.

1. Сложение гармонических колебаний одного направления и одной частоты.

Гармонические колебания можно представить несколькими способами: аналитическим, графическим и геометрическим (или методом диаграмм).

Аналитический способ – это описание с помощью формул, графический способ – это описание с помощью графиков, геометрический способ – это описание с помощью векторных диаграмм. Рассмотрим подробнее последний геометрический способ.

Пусть гармоническое колебание описывается уравнением $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Проведем прямую Ox (опорную) и построим вектор $\vec{A}$, направленный из точки O под углом φ_0 к опорной линии (рис.1).

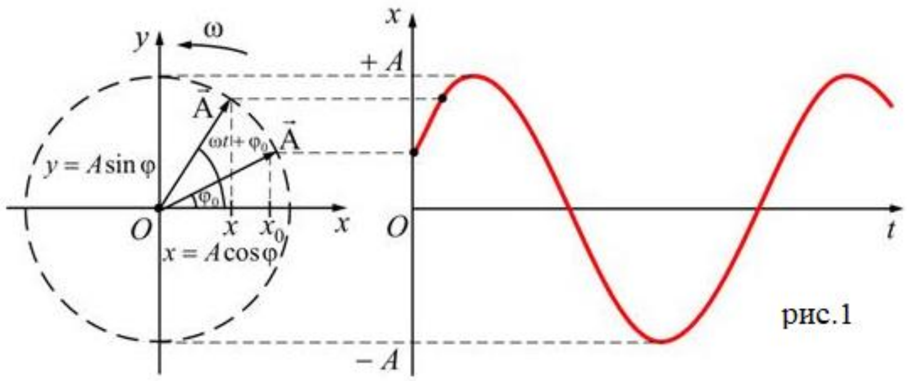


рис.1

Обозначим через x_0 проекцию вектора $\vec{A}$ на опорную линию в момент времени $t = 0$:

$$x_0 = A\cos(\varphi_0)$$

Вращение происходит против часовой стрелки, т.е. $\omega > 0$. За промежуток времени t вектор амплитуды повернется на угол ωt и займет новое положение. Его проекция на опорную линию равна

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0).$$

За время, равное периоду колебаний T, вектор амплитуды повернется на угол 2π, и проекция вектора совершит полное колебание около положения равновесия (точка O). Следовательно, вращающийся вектор амплитуды полностью характеризует гармоническое колебание. Иначе говоря, ***гармоническое колебание может быть задано с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью x угол, равный начальной фазе колебаний.***

Проекция кругового движения на ось y также совершает гармоническое колебание:

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Таким образом, равномерное движение по окружности можно рассматривать как два колебательных гармонических движения, совершаемых одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Этим представлением широко пользуются при сложении колебаний.

А теперь рассмотрим случай, когда колеблющееся тело участвует в нескольких колебательных процессах. В этом случае результирующее колебание определяется сложением колебаний. Допустим, что гармонические колебания происходят в одном направлении и имеют одинаковую частоту:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \tag{1}$$

Сложение колебаний будем проводить методом векторных диаграмм (рис.2). Отложим из точки O вектор $\vec{A}_1$ под углом φ_1 к опорной линии и вектор $\vec{A}_2$ под углом φ_2. Здесь φ_1 и φ_2 - *начальные фазы колебаний* векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$. Оба вектора вращаются против часовой стрелки с одинаковой угловой скоростью ω, поэтому их разность фаз не зависит от времени ($\varphi_2 - \varphi_1 =$ const). Такие колебания называют когерентными. Проекции векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ равны соответственно x_1 и x_2, определяемые уравнением (1). Сумма векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ равна вектору $\vec{A}$, проекция которого на ось x, как видно из рис.2, равна сумме проекций слагаемых векторов:

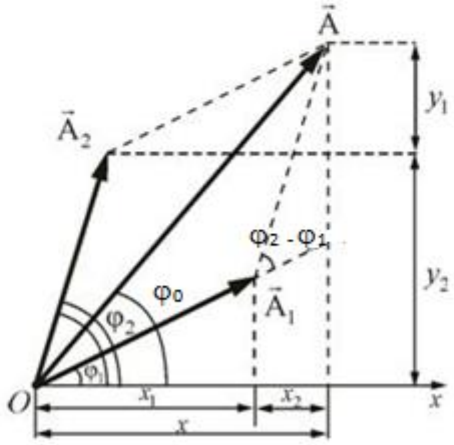


рис.2

$$x = x_1 + x_2 \tag{2}$$

Вектор $\vec{A}$ как результирующее колебание тоже, как и векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$, вращается с той же угловой скоростью ω. Поэтому результирующее колебание будет гармоническим с частотой ω, амплитудой A и начальной фазой φ_0:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{3}$$

Необходимо найти A и φ_0.

Суммарную амплитуду A найдем по закону косинусов (рис.2):

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos\left[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)\right] = \\ = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{4}$$

Начальную фазу φ_0 найдем из геометрии рисунка:

$$tg\varphi_0 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \tag{5}$$

Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания. Из вышеизложенного следует, что ***метод векторной диаграммы позволяет свести сложение нескольких гармонических колебаний одной частоты к операции сложения векторов.***

Из (4) следует, что амплитуда A результирующего колебания зависит от разности начальных фаз $\varphi_2 - \varphi_1$.

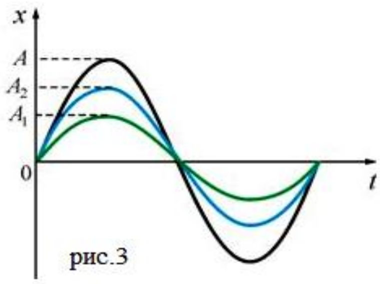
1) если $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$ (m = 0, 1, 2, ...), тогда $cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$, и $A = A_1 + A_2$, т.е. амплитуда результирующего колебания A в уравнении (3) равна сумме амплитуд складываемых колебаний (колебания синфазны, рис.3); ***колебания взаимно усиливают друг друга.***

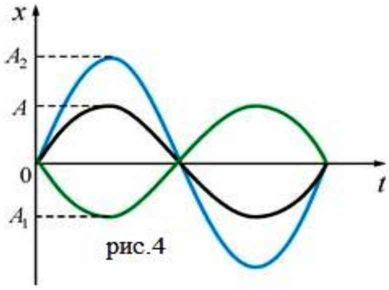
2) если $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$ (m = 0, 1, 2,...), тогда $cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$, и $A = |A_1 - A_2|$, т.е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний (колебания в противофазе, рис.4); ***колебания взаимно ослабляют друг друга.***

Следовательно, возможные значения A лежат в диапазоне

$$|A_2 - A_1| \le A \le A_2 + A_1$$

(амплитуда не может быть отрицательной).





Если частоты колебаний ω_1 и ω_2 различны, то векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ будут вращаться с разными угловыми скоростями на векторной диаграмме. Тогда результирующий вектор $\vec{A}$ не будет определять гармоническое колебание, поскольку и его величина, и его скорость вращения будут меняться со временем.

2. Биения.

Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. В результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой. ***Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются биениями,*** т.е. биения это гармонические колебания с пульсирующей амплитудой.

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны A, а частоты равны ω и $\omega+\Delta\omega$, причем $\Delta\omega << \omega$. Начало отсчета выбираем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю:

$$\begin{aligned} x_1 &= A\cos\omega t \\ x_2 &= A\cos(\omega+\Delta\omega)t \end{aligned} \tag{6}$$

Складываем эти два выражения, учитывая, что $\dfrac{\Delta\omega}{2} << \omega$:

$$x = A\left[\cos\omega t + \cos(\omega+\Delta\omega)t\right] = 2A\cos\frac{\Delta\omega\cdot t}{2}\cos\omega t \tag{7}$$

Результирующее колебание (7) можно рассматривать как гармоническое с частотой ω и амплитудой $A_б$, которая изменяется по следующему периодическому закону:

$$A_б = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega\cdot t}{2}\right| \tag{8}$$

и тогда
$$x = A_б\cos\omega t \tag{9}$$

Как видно из (6) частота биений равна разности частот складываемых колебаний:

$$\omega_б = \Delta\omega$$

Тогда период биений $T = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$.

Характер зависимости (7) показан на рис. 5, где сплошные линии дают график результирующего колебания (7), а огибающие их штриховые линии дают график медленно меняющейся по уравнению (8) амплитуды биений.

Множитель, стоящий перед $cos\,\omega t$ в выражении (7), изменяется со временем значительно медленнее, чем второй множитель $cos\,\omega t$, поскольку $\dfrac{\Delta\omega}{2} << \omega$. Поэтому период изменений амплитуды биений больше периода результирующего колебания.

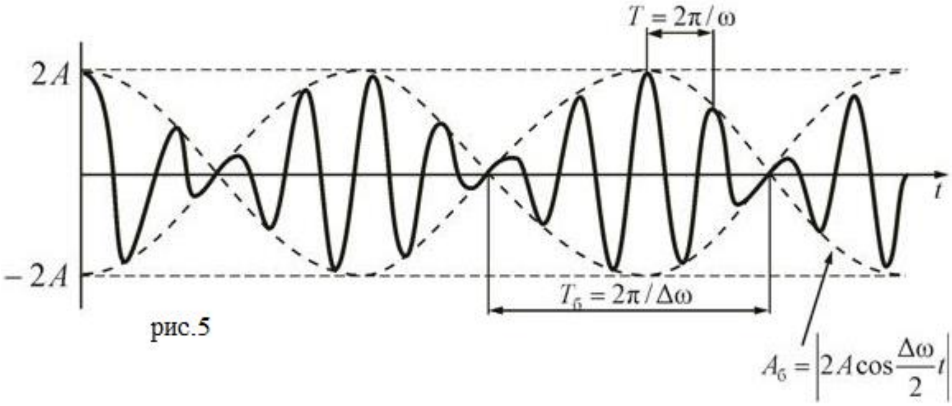


рис.5

Таким образом, биение можно рассматривать как гармоническое колебание с круговой частотой ω, амплитуда которого меняется по некоторому периодическому закону с частотой $\Delta\omega$. Частота пульсаций $\Delta\omega$ амплитуды, называемая частотой биений, равна разности частот складываемых колебаний.

Определение частоты тона (звука определенной высоты) биений между эталонным и измеряемым колебаниями – наиболее широко применяемый на практике метод сравнения измеряемой величины с эталонной. Метод биений используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т.д.

3. Сложение взаимно-перпендикулярных гармонических колебаний. Фигуры Лиссажу.

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей *x* и *y*:

$$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1), \qquad y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \tag{10}$$

Найдем уравнение результирующего колебания. Разность фаз между обоими колебаниями равна: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Чтобы получить уравнение траектории, надо исключить из этих уравнений время *t*. Для этого упростим выражения, выбрав начало отсчета так, чтобы $\varphi_1 = 0$, а $\varphi_2 = \varphi_0$, и $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_0$, т.е.

$$x = A_1\cos(\omega t), \qquad y = A_2\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{11}$$

Из первого уравнения (11): $\dfrac{x}{A_1} = \cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \sin\omega t = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{A_1^2}}$

Из второго уравнения (11):

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\omega t + \varphi_0) = \cos\omega t\cos\varphi_0 - \sin\omega t\sin\varphi_0 = \frac{x}{A_1}\cos\varphi_0 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}\sin\varphi_0$$

Отсюда

$$\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\cos\varphi_0 = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}\sin\varphi_0 \tag{12}$$

Возведем обе части уравнения (12) в квадрат:

$$\left(\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\cos\varphi_0\right)^2 = \left(-\sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}\sin\varphi_0\right)^2$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2}\cos^2\varphi_0 - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos\varphi_0 = \sin^2\varphi_0 - \frac{x^2}{A_1^2}\sin^2\varphi_0$$

$$\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{x^2}{A_1^2}\left(\cos^2\varphi_0+\sin^2\varphi_0\right)-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\varphi_0=\sin^2\varphi_0$$

Окончательное уравнение:

$$\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{x^2}{A_1^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\varphi_0=\sin^2\varphi_0 \qquad (13)$$

В результате мы получили *уравнение эллипса*, оси которого ориентированы относительно *x* и *y* произвольно (рис. 6).

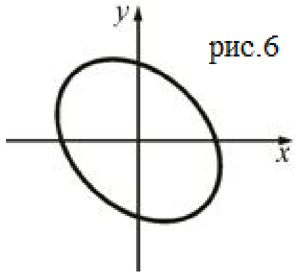


рис.6

Так как траектория результирующего колебания имеет форму эллипса, то такие колебания называются *эллиптически поляризованными*.

Ориентация эллипса и размеры его осей зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$. Рассмотрим некоторые частные случаи решений уравнения (13), представляющие физический интерес.

1. *Начальные фазы колебаний одинаковы*: $\varphi_1=\varphi_2, \quad \Rightarrow \quad \varphi_2-\varphi_1=\varphi_0=0$. Тогда уравнение (13) примет вид:

$$\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{x^2}{A_1^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}=0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

отсюда получим уравнение результирующего колебания:

$$y=\frac{A_2}{A_1}x \qquad (14)$$

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат (рис.7, *а*). Следовательно, в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми начальными фазами будут происходить колебания вдоль прямой, проходящей через начало координат (*линейно поляризованные колебания*).

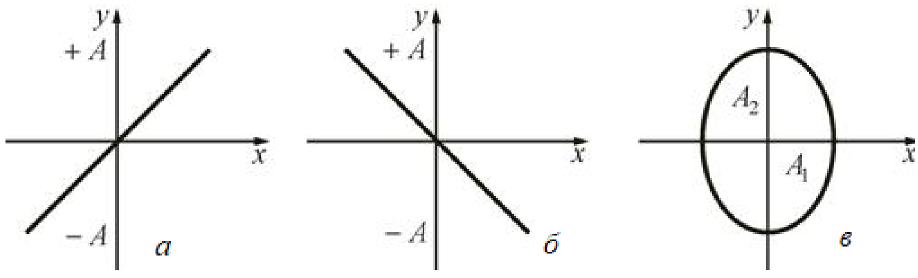


рис.7

2. *Начальная разность фаз равна* π*:* $\varphi_2-\varphi_1=\varphi_0=\pi$. Тогда $\cos\pi=-1$, следовательно

$$\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{2xy}{A_1A_2}=0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{A_1}+\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

Уравнение результирующего колебания в этом случае:

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x \qquad (15)$$

В данном случае результирующее колебание происходит вдоль прямой, проходящей через начало координат, но прямая лежит в других четвертях по сравнению с первым случаем (рис.7, *б*).

Амплитуда результирующего колебания в обоих случаях равна (рис.7, *а, б*):

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad (16)$$

3. *Начальная разность фаз равна* π/2: $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_0 = \pi/2$. Тогда $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$. Следовательно, уравнение (13) примет вид:

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} = 1 \qquad (17)$$

Это уравнение эллипса с полуосями A_1 и A_2 (рис.7, *в*). Результирующее колебание представляет собой ***эллиптически поляризованное колебание.***

При $A_1 = A_2$ получим уравнение окружности (*циркулярно поляризованные* колебания)

$$x^2 + y^2 = A^2 \qquad (18)$$

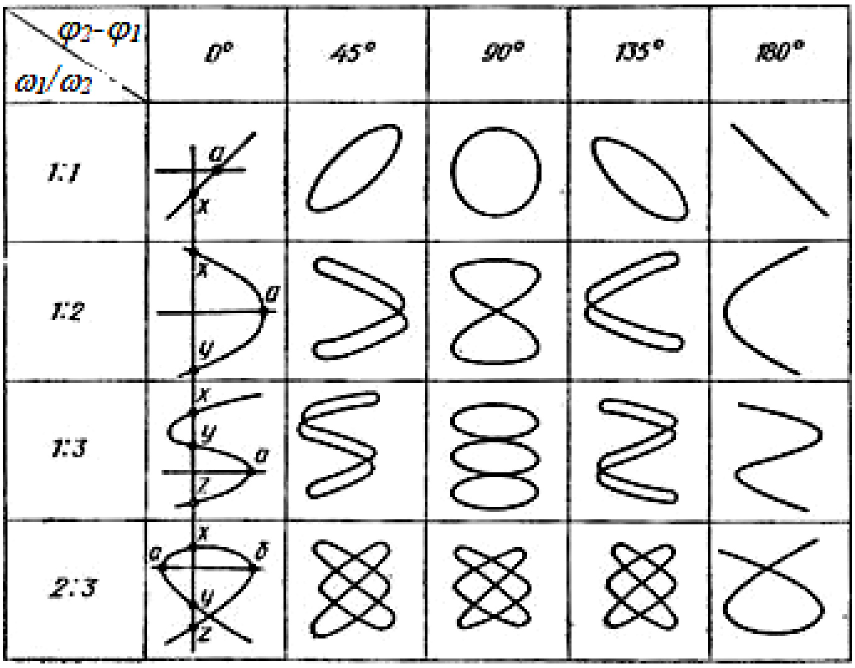
4. *Все остальные разности фаз дают эллипсы с различным углом наклона относительно осей координат*.

Необходимо отметить, что все рассматриваемые случаи, все кривые - это эллипсы (даже прямая - частный случай эллипса).

Фигуры, получаемые при сложении взаимно перпендикулярных колебаний разных частот, называются ***фигурами Лиссажу*** (Ж. Лиссажу (1822–1880) - французский физик). В простейших случаях можно сравнить частоты по виду фигур.

В приведенных выше примерах рассматривались простейшие случаи, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Если $\omega_1 \neq \omega_2$, то в результате будут получаться уже не эллипсы, а более сложные фигуры Лиссажу. В табл. 1 приведены несколько фигур Лиссажу для разных соотношений частот колебаний и заданной разности фаз.

Таблица 1



Отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигур Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат. По виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной или определить отношение частот складываемых колебаний. Поэтому анализ фигур Лиссажу широко используется для исследования соотношений частот и разности фаз складываемых колебаний, а также формы колебаний.

Вопросы

1. В чем заключается идея метода вращающегося вектора амплитуды?
2. Каково результирующее колебание, полученное в результате сложения двух колебаний, происходящих в одном направлении и имеющих одинаковую частоту?
3. Что такое биения?
4. Чему равна частота биений? Чему равен период биений?
5. Какова траектория точки, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковыми периодами?
6. Как получают колебание, происходящее вдоль окружности? вдоль прямой?
7. Как по виду фигур Лиссажу можно определить отношение частот складываемых колебаний?