Лекция 11

Механические волны и их свойства

1. Механические волны и их распространение в упругой среде.
2. Уравнение плоской и сферической волн. Фазовая скорость.
3. Суперпозиция волн. Групповая скорость.

1. Механические волны и их распространение в упругой среде.

Колебания, возбужденные в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной), распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаваясь от одной точки среды к другой. Чем дальше расположена частица среды от источника колебаний, тем позднее она начнет колебаться. Иначе говоря, увлекаемые частицы будут отставать по фазе от тех частиц, которые их увлекают.

При изучении распространения колебаний не учитывается дискретное (молекулярное) строение среды. Среда рассматривается как сплошная, т.е. непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

Итак, *колеблющееся тело, помещенное в упругую среду, является источником колебаний, распространяющихся от него во все стороны. Процесс распространения колебаний в среде называется волной.*

При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице передается лишь состояние колебательного движения и энергия. Поэтому *основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества.*

Существующие в природе волны делят на следующие типы: *волны на поверхности жидкости, упругие и электромагнитные волны. Упругими (или механическими) волнами* называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде.

Упругие волны бывают *продольные и поперечные*. В продольных волнах частицы среды колеблются в направлении распространения волны, в поперечных волнах - в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

Продольные волны могут возбуждаться в средах, в которых возникают упругие силы при деформации сжатия и растяжения, т. е. в твердых, жидких и газообразных телах. Поперечные волны могут возбуждаться в среде, в которой возникают упругие силы при деформации сдвига, т.е. в твердых телах; *в жидкостях и газах возникают только продольные волны, а в твердых телах — как продольные, так и поперечные.*

Упругая волна называется гармонической, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими. На рис.1 представлена гармоническая поперечная волна, распространяющаяся со скоростью υ вдоль оси x, т. е. приведена зависимость между смещением ξ частиц среды, участвующих в волновом процессе, и расстоянием x этих частиц (например, частицы В) от источника колебаний O для какого-то фиксированного момента времени t .

рис.1

рис.2

Приведенный график функции $\xi(x,t)$ напоминает график гармонического колебания (рис.2), однако они различны по существу. График волны дает зависимость смещения всех частиц среды от расстояния до источника колебаний в данный момент времени, а график колебаний - зависимость смещения данной частицы от времени.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t называется *фронтом волны*. В однородной среде направление распространения волны перпендикулярно фронту волны (рис.3).

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется длиной волны λ (рис.3). Длина волны равна расстоянию, на которое распространяется определенная фаза колебания за период T, т.е.

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \lambda \nu$$

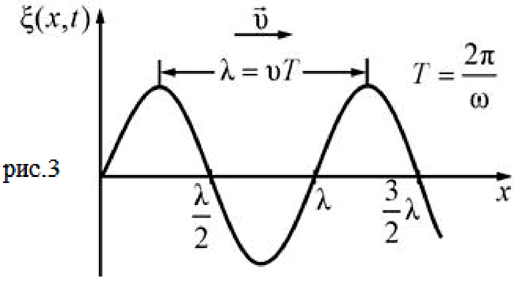


рис.3

где υ - скорость распространения волны.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Волновых поверхностей можно провести бесчисленное множество, а волновой фронт в каждый момент времени один. Волновой фронт также является волновой поверхностью.

Волновые поверхности могут быть любой формы, а в простейшем случае они представляют собой совокупность плоскостей, параллельных друг другу, или совокупность концентрических сфер. Соответственно *в первом случае волна называется плоской, во втором случае - сферической.*

2. Уравнение плоской и сферической волн. Фазовая скорость.

Уравнением волны называется выражение, которое дает ***смещение*** ξ *колеблющейся точки* как функцию ее координат (x, y, z) и времени t.

$$\xi = f\left(x,y,z,t\right) = \xi\left(x,y,z,t\right) \tag{1}$$

Эта функция должна быть периодической как относительно времени, так и координат (поскольку волна - это распространяющееся колебание, следовательно, это периодически повторяющееся движение). Кроме того, точки, отстоящие друг от друга на расстоянии λ, колеблются одинаковым образом.

Найдем вид функции ξ в случае плоской волны, предполагая, что колебания носят гармонический характер. Направим оси координат так, чтобы ось x совпадала с направлением распространения волны. Тогда волновая поверхность будет перпендикулярна оси x. Так как все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение ξ будет зависеть только от x и t: $\xi = \xi\left(x,t\right)$.

Пусть колебание точек, лежащих в плоскости $x = 0$, имеет вид (при начальной фазе $\varphi_0 = 0$):

$$\xi = \xi\left(0,t\right) = A\cos\omega t \tag{2}$$

Найдем вид колебания частиц в плоскости, соответствующей произвольному значению x. Чтобы пройти путь x, необходимо время $\tau = \dfrac{x}{\upsilon}$. Следовательно, *колебания частиц в плоскости x будут отставать по времени на τ от колебаний частиц в плоскости $x = 0$*, т.е.

$$\xi\left(x,t\right) = A\cos\omega\left(t-\tau\right) = A\cos\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right) \tag{3}$$

Уравнение (3) называется *уравнением плоской волны*.

Таким образом, ξ *есть* ***смещение*** *любой из точек с координатой x в момент времени t*. При выводе уравнения (3) предполагалось, что амплитуда колебания $A = const$. Это условие выполняется, если энергия волны не поглощается средой.

Волна, распространяющаяся в противоположном направлении, имеет вид:

$$\xi(x,t) = A\cos\omega\left(t+\frac{x}{\upsilon}\right) \tag{4}$$

Такой же вид уравнения (3) и (4) будут иметь, если колебания распространяются вдоль оси *y* или *z*.

В общем виде *уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x* записывается так:

$$\xi(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)+\varphi_0\right] \tag{5}$$

Выражения (3), (4), (5) называются ***уравнениями бегущей волны. Бегущими волнами называются волны, которые переносят в пространстве энергию.***

Для характеристики волн используется волновое число:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{\omega}{\upsilon} \tag{6}$$

Волновое число k – это модуль волнового вектора $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$, где $\vec{n}$ - нормаль к волновой поверхности. Вводя волновое число, можно ***уравнение плоской волны*** (5) представить в следующем виде:

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) \tag{7}$$

В физике часто вместо метода вращающегося вектора амплитуды используют другой метод, в котором колеблющуюся величину представляют комплексным числом. При это используется формула Эйлера для комплексных чисел:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \tag{8}$$

где $i = \sqrt{-1}$ мнимая единица. Тогда уравнение гармонического колебания ($x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$) можно записать в комплексной форме:

$$\tilde{x} = Ae^{i(\omega t+\varphi_0)} \tag{9}$$

Вещественная часть выражения (9) равна $\mathrm{Re}(\tilde{x}) = A\cos(\omega t + \varphi_0) = x$. Часто обозначение **Re** вещественной части комплексного выражения опускается и пишут:

$$x = Ae^{i(\omega t+\varphi_0)} \tag{10}$$

Таким образом, *в теории колебаний колеблющаяся величина равна вещественной части комплексного выражения*.

Основываясь на формуле Эйлера (8), уравнение плоской волны (7) можно записать в виде

$$\xi(x,t) = Ae^{i(\omega t-kx+\varphi_0)} \tag{11}$$

где физический смысл имеет лишь действительная часть.

В случае, *когда скорость волны υ во всех направлениях постоянна, а источник точечный, волна будет* ***сферической***.

Предположим, что *фаза* колебаний источника равна ωt (т.е. $\varphi_0 = 0$). Тогда точки, лежащие на *волновой поверхности* радиуса r, будут иметь фазу $\omega\left(t-\frac{r}{\upsilon}\right)$. Амплитуда колебаний здесь, даже если волна не поглощается средой, не будет постоянной, она убывает по закону $\frac{1}{r}$. Следовательно, ***уравнение сферической волны***:

$$\xi = \frac{A}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right) \Rightarrow \xi = \frac{A}{r}\cos\left(\omega t - kr\right) \quad (12)$$

где A равна амплитуде на расстоянии r от источника равном единице.

Уравнение (12) неприменимо для малых r, т.к. при $r \to 0$, амплитуда стремится к бесконечности. То, что амплитуда колебаний $A \sim \frac{1}{r}$, следует из рассмотрения энергии, переносимой волной.

А теперь предположим, что при волновом процессе фаза постоянна, т. е.

$$\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \varphi_0 = const \quad (13)$$

Продифференцировав выражение (13) по t и x, и сократив на ω, получим:

$$\omega dt - \frac{\omega}{\upsilon}dx = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \upsilon \quad (14)$$

Следовательно, скорость υ распространения волны в уравнении (14) есть не что иное, как скорость перемещения фазы волны, и ее называют ***фазовой скоростью.*** С другой стороны, из уравнении (6) следует, что фазовая скорость равна

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} \quad (15)$$

Распространение волн в однородной изотропной среде в общем случае описывается ***волновым уравнением*** - дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta\xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (16)$$

В этом уравнении υ - фазовая скорость, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Решением уравнения (16) является уравнение любой волны. Соответствующей подстановкой можно убедиться, что уравнению (16) удовлетворяют, в частности, плоская волна (7) и сферическая волна (12).

3. Суперпозиция волн. Групповая скорость.

Если среда, в которой распространяется одновременно несколько волн, линейна, т. е. ее свойства не изменяются под действием возмущений, создаваемых волной, то к ним применим принцип суперпозиции {наложения) волн.

Принцип суперпозиции {наложения) волн: при распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвуя в каждом из слагающих волновых процессов.

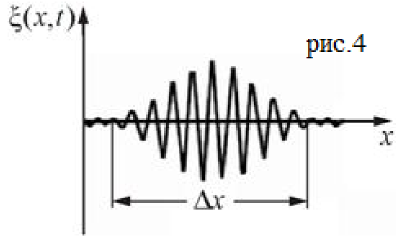
Строго *монохроматическая* волна представляет собой бесконечную во времени и пространстве последовательность «горбов» и «впадин»:

$$\xi\left(x,t\right) = A\cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right)$$

Ее фазовая скорость: $\upsilon = \omega / k$ *или* $\upsilon = \lambda\nu$. С помощью такой волны нельзя передавать сигнал, так как в любой точке волны все «горбы» одинаковы.

Сигнал (импульс) можно представить (согласно теореме Фурье) в виде суперпозиции гармонических волн с частотами, заключенными в некотором интервале $\Delta\omega$. *Суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, и* занимающих в каждый момент времени ограниченную область пространства, *называется* ***волновым пакетом или группой волн*** (рис. 4).

Рассмотрим простейшую группу волн, получающуюся в результате наложения двух распространяющихся вдоль положительного направления оси x гармонических волн с одинаковыми амплитудами, близкими частотами и волновыми числами, причем $d\omega \ll \omega,\ \ dk \ll k$.



$$\xi = A_0 \cos\left(\omega t - kx\right) + A_0 \cos\left(\left(\omega + d\omega\right)t - \left(k + dk\right)x\right) =$$

$$= 2A_0 \cos\frac{t\cdot d\omega - x\cdot dk}{2}\cos\left(\omega t - kx\right)$$

Эта волна отличается от гармонической тем, что ее амплитуда

$$A = \left|2A_0 \cos\frac{t\cdot d\omega - x\cdot dk}{2}\right| \tag{17}$$

есть медленно изменяющаяся функция координаты x и времени t. Максимум амплитуды будет определяться условием:

$$\frac{t\cdot d\omega - x_{\max}\cdot dk}{2} = \pm m\pi \tag{18}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$; $x_{\max}$ - координата максимума амплитуды.

Каждый из этих максимумов можно рассматривать как центр соответствующей группы волн. Решив уравнение (18) относительно $x_{\max}$, получим:

$$x_{\max} = \frac{d\omega}{dk}t + const, \qquad \left(\pm 2m\pi = const\right)$$

Взяв производную $x_{\max}$ по времени получим: $\dfrac{dx_{\max}}{dt} = \dfrac{d\omega}{dk} = u$ (19)

Скорость ***u*** есть ***групповая скорость***. Ее можно определить как скорость движения группы волн, образующих в каждый момент времени локализованный в пространстве волновой пакет. Таким образом, за скорость распространения негармонической волны (волнового пакета) принимают *скорость перемещения максимума амплитуды волны*, рассматривая тем самым максимум в качестве центра волнового пакета.

Скорость, с которой перемещается центр волнового пакета (*точка с максимальным значением A*), *называется* ***групповой скоростью u.***

Выражение (19) получено для простейшей группы волн из двух составляющих, однако оно справедливо и для суперпозиции многих волн.

Рассмотрим связь между групповой $u = \dfrac{d\omega}{dk}$ и фазовой $\upsilon = \dfrac{\omega}{k}$ скоростями. Учитывая, что $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, получим:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\left(\upsilon k\right)}{dk} = \upsilon + k\frac{d\upsilon}{dk} = \upsilon + k\left(\frac{d\upsilon}{d\lambda} : \frac{dk}{d\lambda}\right) =$$

$$= \upsilon + k\left(\frac{d\upsilon}{d\lambda} : \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\right) = \upsilon + k\left(-\frac{\lambda^2}{2\pi}\right)\frac{d\upsilon}{d\lambda} = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}$$

$$u = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda} \tag{20}$$

Из формулы (20) вытекает, что в диспергирующей среде ***u*** может быть как меньше, так и больше υ в зависимости от знака $\dfrac{d\upsilon}{d\lambda}$. В недиспергирующей среде $\dfrac{d\upsilon}{d\lambda} = 0$ и групповая скорость совпадает с фазовой скоростью. В *недиспергирующей среде* все плоские волны, образующие пакет, распространяются с одинаковой фазовой скоростью υ и в этом случае скорость перемещения пакета совпадает со скоростью υ.

Понятие групповой скорости очень важно, так как именно она является скоростью переноса энергии, фигурирует при измерении дальности в радиолокации, в системах управления космическими объектами и т.д. В теории относительности доказывается, что групповая скорость $u < c$, в то время как для фазовой скорости ограничений не существует.

Понятие групповой скорости применимо только при условии, что *поглощение энергии волны* в среде *невелико*. При значительном затухании волн понятие групповой скорости утрачивает смысл.

Вопросы

1. Как объяснить распространение колебаний в упругой среде? Что такое волна?
2. Что называется поперечной волной? продольной? Когда они возникают?
3. Что такое волновой фронт? волновая поверхность?
4. Что называется длиной волны? Какова связь между длиной волны, скоростью и периодом?
5. Что такое волновое число? фазовая и групповая скорости?
6. Какая волна является бегущей, гармонической, плоской, сферической? Каковы уравнения этих волн?