Лекция 12

Стоячие волны. Эффект Доплера

1. Стоячие волны.
2. Бегущая волна. Волновое уравнение.
3. Эффект Доплера.

1. Стоячие волны.

Если в среде распространяется несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. ***Волны накладываются*** *друг на друга, не возмущая* (*не искажая друг друга*). *Это и есть* ***принцип суперпозиции волн.***

Если две волны имеют одинаковые частоты и постоянную разность фаз, то такие волны называются ***когерентными.*** *При сложении когерентных волн возникает* ***явление интерференции.***

Частный случай интерференции наблюдается при наложении двух встречных бегущих плоских волн, обладающих *одинаковой амплитудой и частотой*, а в случае поперечных волн еще и *одинаковой поляризацией*. Возникающий в результате колебательный процесс называется ***стоячей волной.*** Практически стоячие волны возникают при отражении от преград.

Для вывода уравнения стоячей волны предположим, что две плоские волны распространяются навстречу друг другу вдоль оси x в среде без затухания, причем обе волны характеризуются одинаковыми амплитудами и частотами. Кроме того, начало координат выберем в точке, в которой обе волны имеют одинаковую начальную фазу, а отсчет времени начнем с момента, когда начальные фазы обеих волн равны нулю. Тогда соответственно уравнения волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x, и волны, распространяющейся ей навстречу, будут иметь вид:

$$\begin{cases} \xi_1 = A\cos(\omega t - kx) \\ \xi_2 = A\cos(\omega t + kx) \end{cases} \tag{1}$$

Сложив эти уравнения и учитывая, что $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, преобразуем по формуле суммы косинусов. В результате получим *уравнение стоячей волны*:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2}\right) \\ \xi &= \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos kx \cos\omega t = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t \end{aligned} \tag{2}$$

При выводе (2) учитывалось, что $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

В выражении для фазы не входит координата, поэтому уравнение (2) стоячей волны можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \xi &= 2A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos\omega t = A^*\cos\omega t \\ A^* &= 2A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь A^* - где суммарная амплитуда называется амплитудой стоячей волны, и она зависит от координаты x рассматриваемой точки.

В точках среды, где $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi \quad (m = 0,1,2,3...)$, $\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 1$, суммарная амплитуда равна максимальному значению: $A^* = 2A$. Эти точки называются ***пучностями*** стоячей волны. ***Координаты пучностей***:

$$x = \pm\frac{m\lambda}{2} \quad (m = 0,1,2,3...) \tag{4}$$

В точках среды, где $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (m = 0,1,2,3...)$, $\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0$, суммарная амплитуда равна нулю: $A^* = 0$. Эти точки называются ***узлами*** стоячей волны. ***Координаты узлов:***

$$x = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0,1,2,3...) \tag{5}$$

Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают.

Из формул (4) и (5) следует, что расстояния между двумя соседними пучностями и двумя соседними узлами одинаковы и равны $\frac{\lambda}{2}$. Расстояние между соседними пучностью и узлом стоячей волны равно $\frac{\lambda}{4}$.

В бегущей волне, все точки среды совершают колебания с одинаковой амплитудой, но с запаздыванием по фазе (в уравнении бегущей волны фаза колебаний зависит от координаты x рассматриваемой точки). В стоячей волне все точки среды между двумя узлами колеблются с разными амплитудами, но с одинаковыми фазами (в уравнении стоячей волны аргумент косинуса не зависит от x). При переходе через узел множитель $2A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ меняет свой знак, поэтому фаза колебаний по разные стороны от узла отличается на π , т. е. точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе.

Образование стоячих волн наблюдают при интерференции бегущей и отраженной волн. Если конец веревки закрепить неподвижно (например, к стене), то отраженная в месте закрепления веревки волна будет интерферировать с бегущей волной, образуя стоячую волну. На границе, где происходит отражение волны, в данном случае возникает узел (рис.1, *б*).

Будет ли на границе отражения узел или пучность, зависит от соотношения плотностей сред. Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то в месте отражения возникает пучность (рис.1, *а*), если более плотная, то образуется узел (рис.1, *б*).

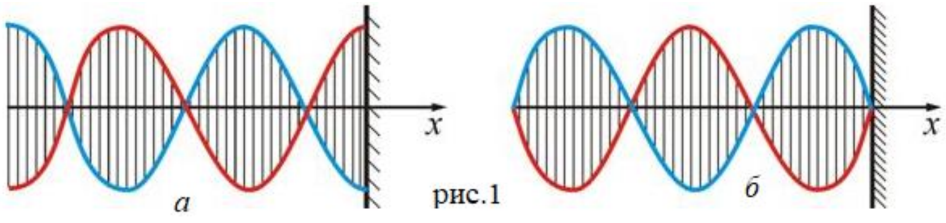

рис.1

Образование узла связано с тем, что волна, отражаясь от более плотной среды, меняет фазу на π, и у границы происходит сложение колебаний с противоположными фазами, в результате чего получается узел. Если же волна отражается от менее плотной среды, то изменения фазы не происходит, и у границы колебания складываются с одинаковыми фазами, поэтому образуется пучность.

Если рассматривать бегущую волну, то в *направлении ее распространения переносится энергия колебательного движения.* В случае *же стоячей волны переноса энергии нет*, так как падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях. Поэтому полная энергия результирующей стоячей волны в пределах между узловыми точками остается постоянной. Лишь в пределах расстояний, равных половине длины волны, происходят взаимные превращения кинетической энергии в потенциальную энергию и обратно.

2. Бегущая волна. Волновое уравнение.

Уравнение любой волны есть решение некоторого дифференциального уравнения, называемого ***волновым***. Найдем общий вид волнового уравнения. Для этого продифференцируем дважды уравнение плоской волны по времени *t*:

$$\xi = A\cos\left(\omega t - kr\right)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos\left(\omega t - kr\right) = -\omega^2 \xi$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi \quad \Rightarrow \quad \xi = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{6}$$

Далее продифференцируем дважды уравнение плоской волны по всем координатам:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 A\cos\left(\omega t - kr\right) = -k_x^2 \xi \\ \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 A\cos\left(\omega t - kr\right) = -k_y^2 \xi \\ \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 A\cos\left(\omega t - kr\right) = -k_z^2 \xi \end{cases} \tag{7}$$

Сложим уравнения (7):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_x^2 \xi - k_y^2 \xi - k_z^2 \xi = -k^2 \xi \tag{8}$$

Подставив (6) в (8), получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{9}$$

Учитывая, что $k = \dfrac{\omega}{\upsilon}$, получаем ***волновое*** **уравнение** – дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{10}$$

Всякая функция, удовлетворяющая уравнению (10), описывает некоторую волну. В этом уравнении υ представляет *фазовую скорость* волны.

Используя оператор Лапласа $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$,

волновое уравнение можно записать в виде

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{11}$$

3. Эффект Доплера

Эффектом Доплера *называется изменение частоты колебаний, воспринимаемой приемником, при движении источника этих колебаний и приемника относительно друг друга.* Например, из опыта известно, что тон гудка поезда повышается по мере его приближения к платформе и понижается при удалении, т. е. движение источника колебаний (гудка) относительно приемника (уха) изменяет частоту принимаемых колебаний.

Для рассмотрения эффекта Доплера предположим, что источник и приемник звука движутся вдоль соединяющей их прямой; $\upsilon_{ист}$ и $\upsilon_{пр}$ - соответственно скорости движения источника и приемника. Эти скорости положительны, если источник (приемник) приближается к приемнику (источнику), и отрицательны, если удаляются. Частота колебаний источника равна ν_0.

a) Источник и приемник покоятся относительно среды, т. е. $\upsilon_{ист} = \upsilon_{пр} = 0$. Если υ - скорость распространения звуковой волны в рассматриваемой среде, то длина волны

$$\lambda = \upsilon T_0$$

Распространяясь в среде, волна достигнет приемника и вызовет колебания его звукочувствительного элемента с частотой

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{\upsilon}{\upsilon T_0} = \nu_0 \qquad (12)$$

Следовательно, частота ν звука, которую зарегистрирует приемник, равна частоте ν_0, с которой звуковая волна излучается источником.

b) Приемник приближается к источнику, а источник покоится, т.е. $\upsilon_{пр} > 0$, $\upsilon_{ист} = 0$. В данном случае скорость распространения волны относительно приемника станет равной $\upsilon + \upsilon_{пр}$. Так как длина волны при этом не меняется, то

$$\nu = \frac{\upsilon + \upsilon_{пр}}{\lambda} = \frac{\upsilon + \upsilon_{пр}}{\upsilon T_0} = \frac{\upsilon + \upsilon_{пр}}{\upsilon}\nu_0 \qquad (13)$$

т.е. частота колебаний, воспринимаемых приемником, в $\dfrac{\upsilon + \upsilon_{пр}}{\upsilon}$ раз больше частоты колебаний источника.

c) Источник приближается к приемнику, а приемник покоится, т. е. $\upsilon_{ист} > 0$, $\upsilon_{пр} = 0$. Скорость распространения колебаний зависит лишь от свойств среды, поэтому за время, равное периоду колебаний источника, излученная им волна пройдет в направлении к приемнику расстояние υT_0 (равное длине волны λ_0) независимо от того, движется ли источник или покоится.

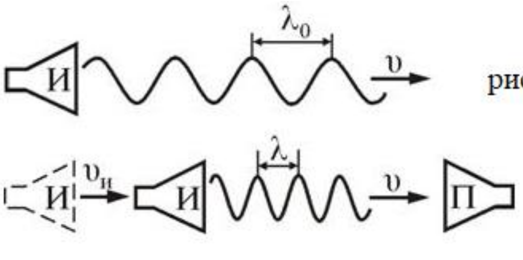

рис.2

За это же время источник пройдет в направлении волны расстояние $\upsilon_{ист}T_0$ (рис. 2), т.е. длина волны в направлении движения сократится и станет равной

$$\lambda = \lambda_0 - \upsilon_{ист}T_0 = \left(\upsilon - \upsilon_{ист}\right)T_0$$

Тогда

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{\upsilon}{\left(\upsilon - \upsilon_{ист}\right)T_0} = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_{ист}}\nu_0 \qquad (14)$$

т. е. частота ν колебаний, воспринимаемых приемником, увеличится в $\dfrac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_{ист}}$ раз. В случаях *b)* и *c)*, если $\upsilon_{пр} < 0$, $\upsilon_{ист} < 0$, знак будет обратным.

d) Пусть приемник звуковых волн в газообразной (или жидкой) среде неподвижен относительно нее, а источник удаляется от приемника со скоростью вдоль соединяющей их прямой $\upsilon_{пр} = 0$, $\upsilon_{ист} < 0$ (рис. 3).

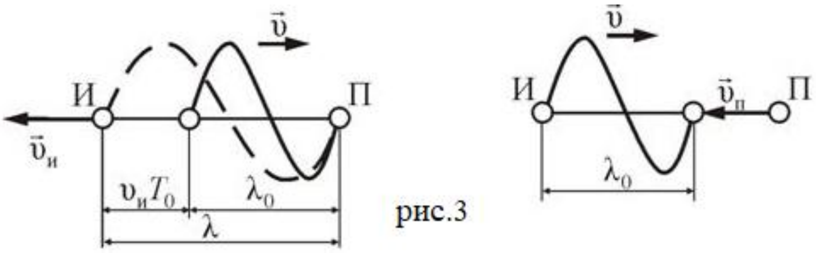

рис.3

Источник смещается в среде за время, равное периоду T_0 его колебаний, на расстояние

$$\upsilon_{ист} T_0 = \frac{\upsilon_{ист}}{\nu_0}$$

где ν_0 - частота колебаний источника. Поэтому при движении источника длина волны λ в среде отлична от ее значения λ_0 при неподвижном источнике:

$$\lambda = \lambda_0 + \upsilon_{ист} T_0 = \left(\upsilon + \upsilon_{ист}\right) T_0 = \frac{\upsilon + \upsilon_{ист}}{\nu_0}$$

где υ - фазовая скорость волны в среде. Таким образом, частота волны, регистрируемая приемником,

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_{ист}} \nu_0 \qquad (15)$$

e) В случае, когда приемник удаляется, а источник неподвижен:

$$\nu = \frac{\upsilon - \upsilon_{пр}}{\lambda} = \frac{\upsilon - \upsilon_{пр}}{\upsilon T_0} = \frac{\upsilon - \upsilon_{пр}}{\upsilon} \nu_0 \qquad (16)$$

f) Источник и приемник движутся относительно друг друга. Используя результаты, полученные для случаев *b) - e)*, можно записать выражение для частоты колебаний, регистрируемых приемником:

$$\nu = \frac{\left(\upsilon \pm \upsilon_{пр}\right)\nu_0}{\upsilon \mp \upsilon_{ист}} \qquad (17)$$

причем верхний знак берется, если при взаимном сближении источника и приемника, нижний знак - в случае их взаимного удаления.

Из приведенных формул следует, что эффект Доплера различен в зависимости от того, движется ли источник или приемник. Если направления скоростей $\upsilon_{ист}$ и $\upsilon_{пр}$ не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, то вместо этих скоростей в формуле (17) надо брать их проекции на направление этой прямой.

Вопросы

1. Когда на струне образуется стоячая волна, колебания падающей и отраженной волн в узлах взаимно гасятся. Означает ли это, что исчезает энергия?
2. Чем стоячая волна отличается от бегущей волны?
3. Чему равно расстояние между двумя соседними узлами стоячей волны? двумя соседними пучностями? соседними пучностью и узлом?
4. Звуковые волны в воздухе продольные или поперечные? Почему?

5. Что такое эффект Доплера?
6. Как определить частоту звука, воспринимаемую приемником, если источник звука и приемник движутся?