Лекция 13 Механика жидкости и газа.

1. Уравнение непрерывности
2. Уравнение Бернулли
3. Применения уравнения Бернулли. Формула Торичелли.

1. Уравнение непрерывности

В данной лекции мы рассмотрим элементы механики жидкости и газа. Известны четыре агрегатных состояния вещества- твердое, жидкое, газообразное и плазменное. Состояние вещества определяется соотношением между потенциальной энергией взаимодействия составляющих его молекул и их средней кинетической энергией. Если потенциальная энергия взаимодействия молекул больше их средней кинетической энергии, то вещество будет в твердом состоянии, если они сравнимы, то в жидком, в противном случае – в газообразном состоянии. Общим свойством жидкостей и газов является их **текучесть**. Свойство текучести объясняется относительной свободой передвижения молекул в объеме жидкого или газообразного вещества.

Рассмотрим очень важное уравнение в механике жидкостей и газов, называемое **уравнением непрерывности.** Этому уравнению подчиняется любая жидкость, которую можно рассматривать как **сплошную среду**. **Сплошной средой называют модель вещества, в которой учитывают размеры, форму и деформацию вещества, но пренебрегают его атомно-молекулярным строением**.

Выберем в жидкости объем V, ограниченный замкнутой поверхностью S. Поток массы жидкости через замкнутую поверхность S по определению равен:

$$\Phi_m = \oint_S \rho \upsilon_n dS \qquad (1)$$

где ρ - плотность жидкости, υ_n – проекция вектора скорости движения жидкости на направление нормали n_0 к поверхности dS . По физическому смыслу интеграл (1) определяет массу жидкости, вытекающей из объема V в единицу времени. Масса жидкости, заключенной внутри поверхности S, равна:

$$m = \int_V \rho dV \qquad (2)$$

В отсутствие источников или стоков жидкости внутри объема V масса жидкости, которая вытекает из него, ***согласно закону сохранения массы***, должна быть равна изменению массы жидкости в объеме V в единицу времени, т. е. $-\partial m/\partial t$. Данная идея лежит в основе непрерывности течения жидкости. Используя формулы (1) и (2) получаем искомое **уравнение непрерывности** в интегральной форме**:**

$$\oint_S \rho \upsilon_n dS = -\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV \qquad (3)$$

Если течение жидкости стационарно, то соотношение (3) упрощается:

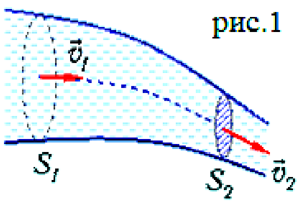
$$\oint_S \rho \upsilon_n dS = 0 \qquad (4)$$

Течение называется стационарным если величины, характеризующие течение жидкости, не зависят явно от времени. Таким образом, *стационарное течение* - *это течение, при котором скорость жидкости в каждой данной точке остается постоянной как по величине, так и по направлению. Тогда* выражение (4) означает следующее: *при стационарном течении сколько жидкости входит в данный объем в единицу времени, столько жидкости выходит из него*. **Если жидкость несжимаема, т.е. *ρ=const*,** то из (4) следует:

$$\oint_S \upsilon_n dS = 0 \qquad (5)$$

Уравнение (5) для течения жидкости внутри трубки, достаточно узкой, чтобы считать скорость жидкости одинаковой во всех точках сечения, для двух сечений S_1 и S_2 запишется в следующем виде (рис.1):

$$S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2 \qquad (6)$$



Следовательно, при стационарном течении несжимаемой жидкости величина $S\upsilon$ в любом сечении одной и той же трубки одинакова, другими словами, эта величина постоянна вдоль трубки тока:

$$S\upsilon = const \qquad (7)$$

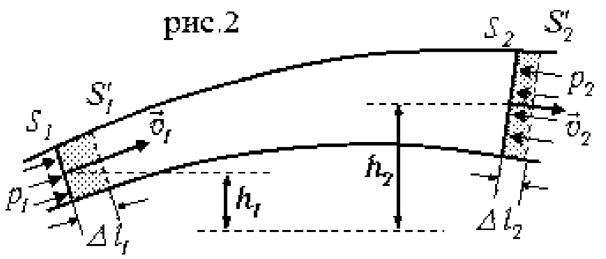
Соотношения (5), (7) это разные формы уравнения непрерывности. Уравнение непрерывности применимо к реальным жидкостям, а также к газам, в том случае, если сжимаемостью их можно пренебречь. Примером справедливости уравнения непрерывности является течение жидкости в трубе разного сечения: в месте сужения трубы скорость потока возрастает, в увеличенном сечении скорость течения уменьшается.

2. Уравнение Бернулли.

При течении жидкости ее отдельные слои в общем случае текут с разными скоростями, скользят друг относительно друга, вследствие чего между ними возникают силы трения. Эти силы называют *силами внутреннего трения*. Они возникают не только в жидкостях, но и в газах.

Жидкость, внутренним трением (вязкостью) которой можно пренебречь, называется ***идеальной.***

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2, по которой слева направо течет жидкость (рис.2). Пусть в месте сечения S_1 заданы: скорость течения υ_1, давление p_1 и высота h_1, на которой расположено это сечение. Аналогично, в месте сечения S_2 заданы скорость течения υ_2, давление p_2 и высота h_2.



За время Δt объём жидкости переместится вдоль трубки тока, причем сечение S_1 переместится в положение S_1', пройдя путь Δl_1, сечение S_2 переместится в положение S_2', пройдя путь Δl_2. В силу уравнения непрерывности (7) заштрихованные объёмы будут иметь одинаковую величину: $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$.

Энергия каждой частицы жидкости слагается из её кинетической энергии и потенциальной энергии в поле силы тяжести. Полная энергия потока, протекающего за время Δt через сечение S_1, равна

$$E_1 = \left(\frac{\rho\Delta V_1\upsilon_1^2}{2} + \rho\Delta V_1 gh_1\right) = \Delta V\left(\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho gh_1\right) \qquad (8)$$

Аналогичное выражение для энергии потока имеем для сечения S_2:

$$E_1 = \left(\frac{\rho\Delta V_2\upsilon_2^2}{2} + \rho\Delta V_2 gh_2\right) = \Delta V\left(\frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho gh_2\right) \qquad (9)$$

При стационарном течении между сечениями S_1 и S_2 энергия не накапливается. В идеальной жидкости силы трения отсутствуют, так что механическая энергия никуда не исчезает. Следовательно, изменение полной энергии жидкости равно работе, совершенной внешними силами:

$$\Delta E = E_2 - E_1 \tag{10}$$

Силы давления на боковую поверхность трубки тока перпендикулярны в каждой точке к направлению перемещения частиц, вследствие чего работы не совершают. Отлична от нуля лишь работа сил давления, приложенных к сечениям S_1 и S_2. Эта работа равна

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = \left(p_1 - p_2 \right) \Delta V \tag{11}$$

Подставив выражения (9) и (11) в (10) получаем:

$$\Delta V \left(\frac{\rho \upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2 \right) - \Delta V \left(\frac{\rho \upsilon_1^2}{2} + \rho g h_1 \right) = \left(p_1 - p_2 \right) \Delta V \tag{12}$$

Сократив на ΔV и перенеся члены с одинаковыми индексами в одну часть равенства, находим:

$$\frac{\rho \upsilon_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho \upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 \tag{13}$$

Сечения S_1 и S_2 были взяты совершенно произвольно. Поэтому можно утверждать, что при стационарном течении идеальной несжимаемой жидкости в любом сечении трубки тока выражение (13) постоянно:

$$\frac{\rho \upsilon^2}{2} + \rho g z + p = const \tag{14}$$

Полученное соотношение (14) называется **уравнением Бернулли**. Это *уравнение выражает собой закон сохранения механической энергии при стационарном течении несжимаемой идеальной жидкости.* В частном **случае горизонтального течения** жидкости $h = const$ уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{\rho \upsilon^2}{2} + p = const \tag{15}$$

Из уравнения непрерывности и уравнения Бернулли следует, что в месте сужения потока его скорость возрастает, а давление в этом месте падает. Например, когда идущие параллельными курсами корабли находятся слишком близко друг к другу, давление между ними падает, и давление внешнего потока их сближает, и может привести к столкновению судов.

Все слагаемые в уравнении Бернулли имеют размерность давления. Кроме статического давления в него входят гидростатическое - $\rho g z$ и динамическое - $\rho v^2/2$ давления. **Физическое содержание уравнения Бернулли формулируется следующим образом: при стационарном течении идеальной жидкости полное давление, равное сумме динамического, гидростатического и статического давлений, одинаково для всех поперечных сечений трубки тока.**

3. Применения уравнения Бернулли. Формула Торричелли.

Рассмотрим одно из применений уравнения Бернулли подробнее. Рассмотрим истечение жидкости из большого резервуара через малое отверстие (рис. 3). На этом рисунке p_0 - давление у свободной поверхности жидкости, h - высота этой поверхности над отверстием. Необходимо найти скорость вытекающей струи. Для решения этой задачи применим уравнение Бернулли. В качестве сечения S_1 возьмем поверхность жидкости, а за сечение S_2 примем проделанное отверстие. Давления в обоих сечениях можно считать

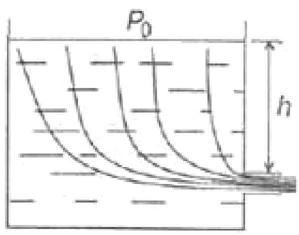


рис.3

постоянными (и равными атмосферному). Будем считать, что резервуар достаточно большой, так что понижением уровня жидкости в резервуаре при истечении жидкости можно пренебречь ($h = const$), так же, как и скоростью движения жидкости у свободной поверхности ($\upsilon_{св.п.} = 0$). Отверстие будем считать почти точечным, пренебрегая изменением скорости течения вдоль сечения струи ($\upsilon_{отв} = \upsilon$). С учетом этих предложений из уравнения Бернулли следует

$$p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{\rho \upsilon^2}{2} \qquad (16)$$

где справа также стоит давление p_0, передающееся жидкостью в окрестность открытого отверстия, согласно закону Паскаля. Из (16) получим для скорости истечения:

$$\rho g h = \frac{\rho \upsilon^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{2gh} \qquad (17)$$

Выражение (17) называется **формулой Торричелли.** Формула Торричелли показывает, что скорость истечения струи равна скорости свободного падения тела с той же высоты. Это не удивительно, так как в основе обоих результатов лежит закон сохранения энергии при движении в однородном поле сил тяжести. Это означает, что вода на выходе получает свою кинетическую энергию из запаса потенциальной энергии воды, находящейся наверху резервуара.

Вопросы для самостоятельной подготовки

1. Что характерно для стационарного течения жидкости?
2. Каков физический смысл уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости и как его вывести?
3. Что выражает уравнение Бернулли?
4. Приведите примеры применения уравнения Бернулли.
5. Как получают формулу Торричелли и что она определяет?