Лекция № 2. Қатты дененің айналмалы қозғалысының кинематикасы

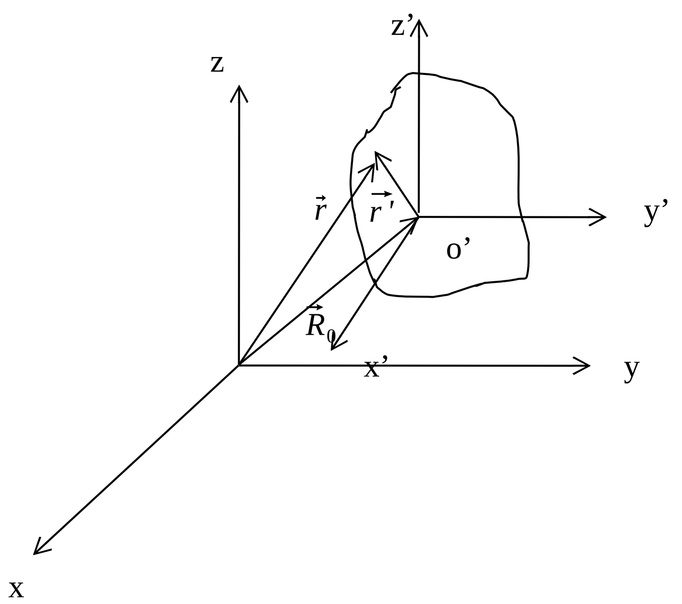
2.1. Қатты дененің ілгерілемелі және айналмалы қозғалысының кинематикасы.
2.2. Материалдық нүктенің әртүрлі санақ жүйесіндегі жылдамдығы мен үдеуі

Бүкіл қозғалысы барысында денені құрайтын бөлшектердің ара қашықтықтары өзгермей тұрақты болып қалатын, яғни сырттан күш әсер етсе де деформацияға ұшырамайтын қатты дене **абсолют қатты дене** деп аталады. Абсолют қатты дененің қозғалысы екіге бөлінеді: **1. Ілгерілемелі, 2. Айналмалы.**

Абсолют қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы деп дененің бойынан алынған кез келген екі нүктені қосатын түзу бүкіл қозғалысы барысында өзіне өзі параллель түзу сызатын қозғалыс.

Абсолют қатты дененің ілгерілемелі қозғалысының заңдылығын тағайындайық.

Ол үшін



$\vec{r}$- k санақ жүйесіне қатысты М нүктенің орнын анықтайтын радиус вектор.

$\vec{r}'$- k'санақ жүйесіне қатысты М нүктенің орнын анықтайтын радиус вектор.

Абсолют қатты денеk'-қа мықтап бекітілген болсын

$$\vec{r}=\overrightarrow{R_0}+\vec{r}' \qquad (1)$$

k' k мен салыстырғанда $\vec{\vartheta}_0$ жылдамдықпен ілгерілемелі қозғалсын, сонда k санақ жүйесіне қатысты М нүктенің жылдамдығын анықтау үшін:

$$\vec{\vartheta}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{R_0}}{dr}=0+\frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (2)$$

Абсолют қатты дененің анықтамасына сәйкес $\vec{r}\,'=const$, ал тұрақты шаманың туындысы 0-ге тең, сонда $\vec{\vartheta}=\vec{\vartheta}_0$

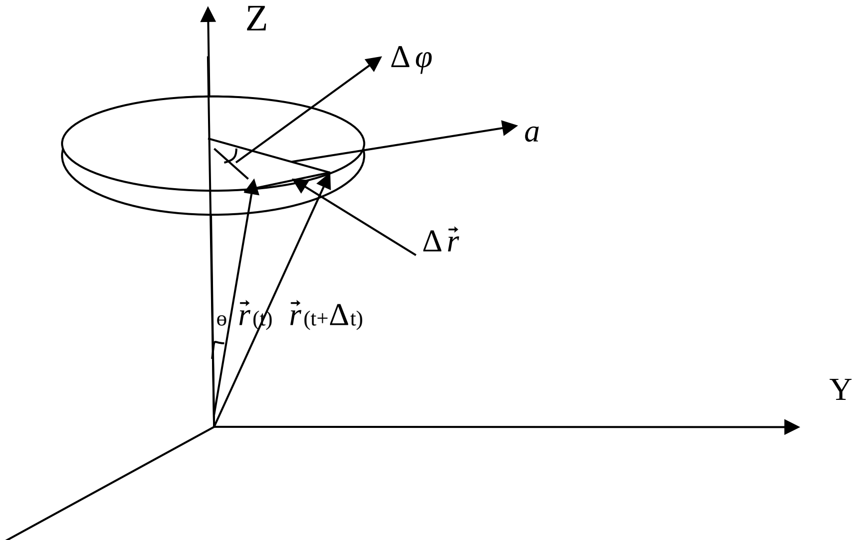
$$a=\frac{d\vec{\vartheta}}{dt}$$

$$\vec{a}_0=\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} \qquad \vec{a}=\vec{a}_0 \qquad (3)$$

Сонымен абсолют қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы кезінде масса центрі қалай қозғалса (жылдамдығы және үдеуі бойынша қандай болса) абсолют қатты дененің жалпы жылдамдығы мен үдеуі сондай болады. Бұл **Кенинг теоремасы** деп аталады.

2.2 Абсолют қатты дененің айналмалы қозғалысы деп айналу осі деп аталатын түзуге қатысты қатты денінің бойында жатқан барлық нүктелер қозғалыс барысында шеңберлер сызатын қозғалысты айтады. Егер ось бекітілген болса онда абсолют қатты дене қозғалмайтын оське қатысты айналып жатыр деп қарастырылады.

Айналмалы қозғалыс кинематикасын қарастырайық:



X

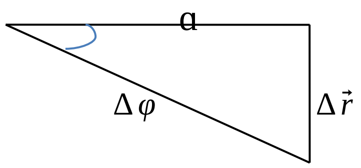
Абсолют қатты дененің қозғалмайтын оське қатысты қозғалыс заңы мына түрде жазылады $\varphi=\varphi(t)$.

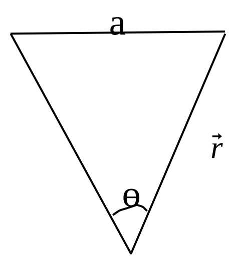
$$|\Delta \vec{r}|=\alpha \sin \Delta\vec{\varphi}$$

$\Delta\vec{\varphi}$- өте аз бұрыш , онда $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$

Сонда $|\Delta \vec{r}| = \alpha\Delta\vec{\varphi}$ (4)

α $=\vec{r}\sin\theta$ (5)





(4)¿>¿(5)

$|\Delta\vec{r}|=\vec{r}\sin\theta\Delta\vec{\varphi}$ (5¿)

(5*)өрнекті вектордың векторлық көбейтіндісін ескерсек

$|\Delta\vec{r}|$**=[**$\Delta\vec{\varphi}\,\vec{r}$**]** (6)

$\Delta\vec{\varphi}$**=d**$\vec{\varphi}=\dot{\vec{\varphi}}=\vec{\omega}$ (¿)

(*) өрнекті ескерсек: $|\Delta\vec{r}|$**=[**$\vec{\omega}\,\vec{r}$**]**

$|$**d**$\vec{r}|$**=[**$\vec{\omega}\,\vec{r}$**]**

[$\vec{\vartheta}$**]=[**$\frac{d\vec{r}}{dt}$**] = [**$\vec{\omega}\,\vec{r}$**]** (6*)

(6*) өрнек сызықтық жылдамдықпен бұрыштық жылдамдықтың арасындағы байланысты береді. Осы өрнекке қарап, модулі тұрақты кез келген вектор үшін :

$|\frac{d\vec{A}}{dt}|$**=[**$\vec{\omega}\,\vec{A}$**]** (7) $\vec{A}$=const жазуға болады.

(7) өрнек **Пуассон өрнегі** деп аталады.

Мысалы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$тұрақты векторлар, олай болса

[$\frac{d\vec{i}}{dt}$**]=[**$\vec{\omega}\,\vec{i}$**]**

$$\left[\frac{d\vec{j}}{dt}\right]=[\vec{\omega}\,\vec{j}] \qquad \textbf{(8)}$$
$$\left[\frac{d\vec{k}}{dt}\right]=[\vec{\omega}\,\vec{k}]$$

(8) өрнек классикалық механикада **Пуассон өрнектері**.

(6*) өрнек абсолют қатты дененің айналмалы қозғалысы кезіндегі оның кез келген нүктесіндегі жылдамдығының өрнегі болып табылады.

Абсолют қатты дененің айналмалы қозғалысы кезіндегі кез келген нүктесінің үдеуін анықтайық.

$\vec{a}=\dot{\vec{\vartheta}}=([\vec{\omega}\,\vec{r}])'=[\dot{\vec{\omega}}\,\vec{r}]+[\vec{\omega}\,\dot{\vec{r}}]=$ $\dot{\vec{\omega}}=$Ɛ бұрыштық үдеу, $\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}=[\vec{\omega}\,\vec{r}]$ $=[\vec{\varepsilon}\,\vec{r}]+[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}]]$

$$\vec{a}=[\vec{\varepsilon}\,\vec{r}]+[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}]] \quad (9)$$

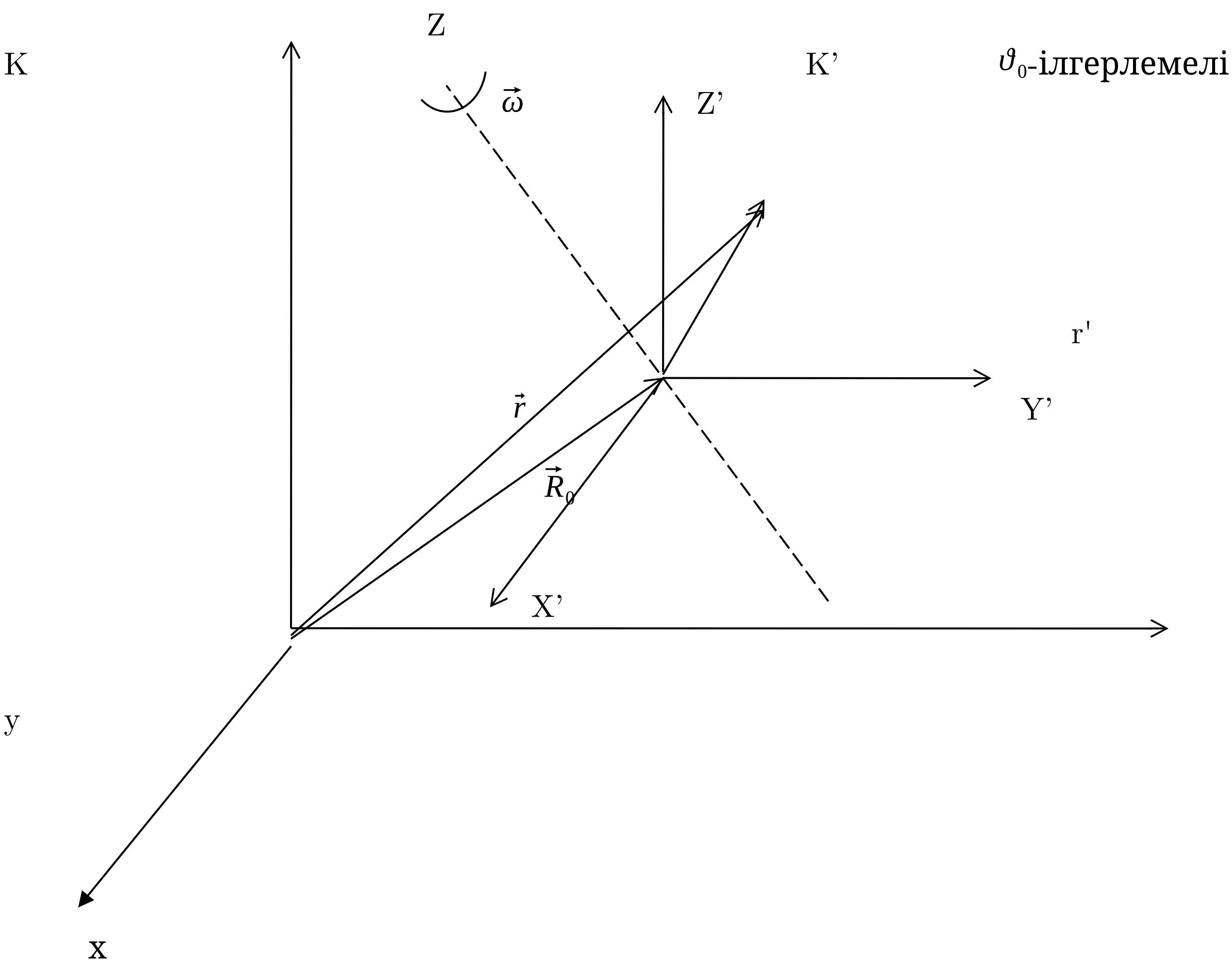
(9) өрнектен: айналмалы қозғалыс кезінде абсолют қатты дененің үдеуі 2 құраушадан тұрады.

1) $\vec{a}_{\tau}=[\vec{\varepsilon}\,\vec{r}]$-тангенциал үдеу

2) $\vec{a}_{n}=[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}]]$- нормаль үдеу

2.2 Әр түрлі санақ жүйелерінде М нүктенің қозғалыс заңдарын тағайындайық, яғни бір санақ жүйесінен екінші санақ жүйесіне көшкенде жылдамдық және үдеу векторының өзгеріс заңдарын қарастырайық.

М нүктенің К және К' санақ жүйесіндегі қозғалысын қарастырайық. К-қозғалмайтын, яғни тыныштықтағы санақ жүйесі болсын. К'-әрі ілгерілемелі , әрі айналмалы қозғалыс жасайтын санақ жүйесі болсын



$$\vec{r}=\vec{r}\,'+\vec{R}_0 \quad (1)$$

Мұндағы:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{r}=\mathbf{x}\vec{i}+\mathbf{y}\vec{j}+\mathbf{z}\vec{k} \\ &\vec{r}\,'=\mathbf{x}'\vec{i}\,'+\mathbf{y}'\vec{j}\,'+\mathbf{z}'\vec{k}\,' \\ &\vec{R}_0=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Мұндағы: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$- тұрақты орттар

$\vec{i}\,'$, $\vec{j}\,'$, $\vec{k}\,'$-айнымалы орттар

Материалдық нүктенің жылдамдығын анықтайық.

$\vec{\vartheta} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{R}}_0 = \dot{x}'\vec{i} + x'\dot{\vec{i}}' + \dot{y}'\vec{j}' + \vec{y}'\dot{\vec{j}}' + \dot{z}'\vec{k}' + z'\dot{\vec{k}}' + \dot{x}_0\vec{i} + \dot{y}_0\vec{j} + \dot{z}_0\vec{k} = (\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}') + \left(x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) + (\dot{x}_0\vec{i} + \dot{y}_0\vec{j} + \dot{z}_0\vec{k}) = \vec{\vartheta}' + [\vec{\omega}\vec{r}'] + \vec{\vartheta}_0$ (3) жылдамдықтарды қосу заңы, яғни бір санақ жүйесінен екінші санақ жүйесіне көшкенде жылдамдықтардың өзгеру заңы.

Бір санақ жүйесінен екінші санақ жүйесіне көшкендегі үдеулерді қосу заңын қарастырайық. Ол үшін (3) теңдеуден туынды алайық.

$\vec{a} = \dot{\vec{\vartheta}} = (\vec{\vartheta}' + [\vec{\omega}\vec{r}'] + \vec{\vartheta}_0)' = (\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}\vec{k}')' + [\vec{\omega}(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')]' + (\dot{x}_0\vec{i} + \dot{y}_0\vec{j} + \dot{z}_0\vec{k}')' = \ddot{x}'\vec{i} + \dot{x}'\dot{\vec{i}}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \dot{y}'\dot{\vec{j}}' + \ddot{z}'\vec{k}' + \dot{z}'\dot{\vec{k}}' + [\dot{\vec{\omega}}(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')] + [\vec{\omega}(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')'] + (\ddot{x}_0\vec{i} + \ddot{y}_0\vec{j} + \ddot{z}_0\vec{k}) = \vec{a}' + [\vec{\omega}(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}\vec{k}')] + [\vec{\varepsilon}\vec{r}'] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']] + [\vec{\omega}\vec{\vartheta}'] + \vec{a}_0$

Сонда: $\vec{a} = \vec{a}' + [\vec{\varepsilon}\vec{r}'] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']] + 2[\vec{\omega}\vec{\vartheta}'] + \vec{a}_0$ (4)

(4) теңдеу **үдеулерді қосу заңы** деп аталады.

Мұндағы: $\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}\vec{r}']$-тангенциал үдеуі

$\vec{a}_n = \vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']$-нормаль үдеуі

$\vec{a}_k = 2[\vec{\omega}\vec{\vartheta}']$-Королюс күшінің үдеуі

Лекция №3. Динамика

3.1. Масса туралы түсінік. Күш.