Лекция 3

Законы сохранения

1. Закон сохранения импульса.
2. Центр инерции.
3. Закон сохранения момента импульса.

1. Закон сохранения импульса.

Закон сохранения импульса это один из фундаментальных законов природы. Его фундаментальность заключается в его всеобщности, т.е. он применим во всех областях физики. Такая универсальность обусловлена фундаментальными свойствами пространства – однородностью пространства.

В классической механике закон сохранения импульса выводится на основе законов Ньютона. Для вывода закона сохранения импульса рассмотрим систему N материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_N$ положения которых задаются радиус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_N$, а их импульсы равны $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots \vec{p}_N$, соответственно (рис.1). Как видно из рисунка, на каждую материальную точку действуют внутренние силы, обусловленные взаимодействием с другими материальными точками, входящими в систему, и внешние силы, действующие на систему со стороны тел, в нее не включенных. Внутренние силы обозначены как $\vec{f}_{ij}$, где индексы показывают, что данная сила действует на тело с номером i со стороны тела с номером j. Внешняя сила, действующая на тело с номером i, обозначена как $\vec{F}_i$.

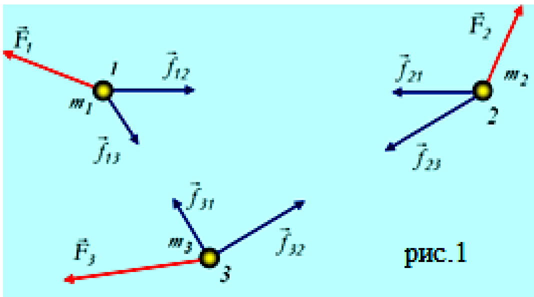


рис.1

Напишем уравнение второго закона Ньютона (скорость изменения импульса тела равна сумме всех действующих на тело сил) для всех N материальных точек системы:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots + \vec{f}_{1N} + \vec{F}_1 \\
&\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \ldots + \vec{f}_{2N} + \vec{F}_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{f}_{N1} + \vec{f}_{N2} + \ldots + \vec{f}_{NN-1} + \vec{F}_N
\end{aligned} \qquad (1)$$

Сложим вместе эти N уравнений. Сумма всех внутренних сил в правой части получится равной нулю. Действительно, она состоит из парных слагаемых типа

$$\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji}$$

По третьему закону Ньютона силы взаимодействия двух материальных точек i и j равны по величине и противоположно направлены (действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки):

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

Поэтому в правой части суммы уравнений (1) останется только сумма всех внешних сил:

$$\frac{d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N\right)}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N \qquad (2)$$

Сумма импульсов частиц, образующих механическую систему:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \qquad (3)$$

называется *импульсом системы.* Уравнение (2) с учетом (3) можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i \qquad (4)$$

Изменение импульса системы обусловлено действием суммарной внешней силы.

Система тел, взаимодействующих только между собой и не взаимодействующих с другими телами, называется **замкнутой**. На замкнутую систему не действуют внешние силы. При отсутствии внешних сил

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}=\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i=const \qquad (5)$$

Суммарный импульс замкнутой системы сохраняется, то есть постоянен во времени. Это утверждение составляет содержание ***закона сохранения импульса.***
http://online.mephi.ru/external/physics/mechanics/video/vid_3-4-9.mp4 -эксперимент.

Возможны ситуации, когда внешние силы не равны нулю, но равна нулю проекция их равнодействующей на некоторое направление $\vec{n}$. Тогда, как следует из (4), переписанного в виде проекции на направление $\vec{n}$:

$$\frac{dp_n}{dt}=\sum_{i=1}^{N}F_{in}=0 \qquad (6)$$

будет сохраняться проекция импульса системы p_n на это же направление. Примером может служить движение тела, брошенного под углом к горизонту. На тело действует сила тяжести, направленная вертикально вниз. Ее проекция на горизонтальную ось равна нулю, и потому горизонтальная проекция импульса сохраняется, соответственно, постоянна горизонтальная проекция скорости.

Уравнение (4) можно записать в виде:

$$d\vec{p}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i dt \qquad (7)$$

Произведение $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i dt$ называется импульсом силы. Из уравнения (7) следует, что изменение импульса незамкнутой системы тем больше, чем больше внешняя сила и чем дольше она действует на систему.

Закон сохранения импульса в силу своей фундаментальности выполняется для любых систем, начиная от космических тел и заканчивая элементарными частицами.

В качестве примера использования закона сохранения импульса рассмотрим *реактивное движение*. **Реактивное движение** это движение тела, возникающее при отделении некоторой его части с определенной скоростью относительно тела. При этом возникает **реактивная сила** $\vec{F}_p$, сообщающая телу ускорение. Главная особенность реактивной силы состоит в том, что *она возникает без какого-либо взаимодействия с внешними телами. Взаимодействие происходит лишь между ракетой и вытекающей из нее струей вещества.*

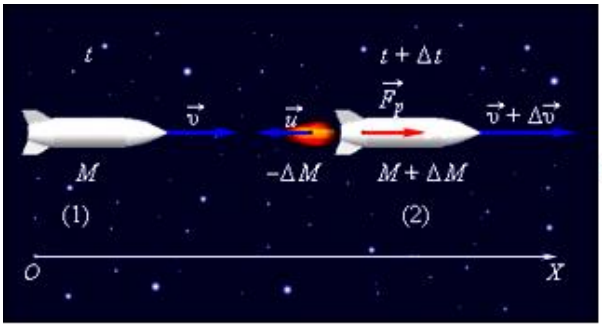


рис.2

Реактивное движение описывается уравнением Мещерского:

$$M\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}=-\mu\vec{u} \qquad (7)$$

где M - масса ракеты, $\vec{u}$ - скорость вытекающих газов относительно ракеты, $\Delta\vec{\upsilon}$ - изменение скорости ракеты за время Δt , μ - расход топлива, т.е. масса сгоревшего топлива за единицу времени. Выражение в правой части уравнения (7) и есть реактивная сила $\vec{F}_p = -\mu\vec{u}$. Если на ракету действуют внешние силы, то ее движение определяется реактивной силой $\vec{F}_p$ и суммой внешних сил $\vec{F}$:

$$M\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \vec{F}_p + \vec{F} \qquad (8)$$

Принцип реактивного движения основан на том, что истекающие из реактивного двигателя газы за счет давления в камере сгорания получают импульс. Поэтому в соответствии с законом сохранения импульса такой же по модулю, но противоположный по направлению, импульс приобретает ракета.

2. Центр инерции.

По определению импульс частицы, у которой масса постоянна, можно записать в виде:

$$\vec{p}_i = m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\left(m_i\vec{r}_i\right)}{dt}$$

здесь $\vec{r}_i$ - радиус-вектор частицы. Учитывая это выражение, уравнение (4) для системы частиц можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N\right)}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i \qquad (9)$$

Введем суммарную массу $m = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$ и радиус-вектор $\vec{r}_c$, определяемый по формуле:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{m} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \qquad (10)$$

Тогда, уравнение (9) запишется в виде:

$$m\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i \qquad (11)$$

Радиус-вектор $\vec{r}_c(t)$ определяет положение точки, называемой *центром инерции (центр масс) системы* (рис.3). Движение центра инерции определяется уравнением движения в дифференциальном виде (11). Можно сказать, что ***центр инерции системы движется так, как двигалась бы частица с массой, равной суммарной массе системы, под действием силы, равной суммарной внешней силе.***

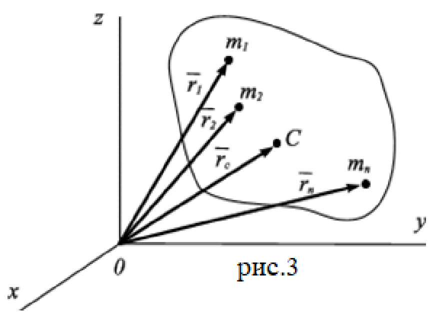


рис.3

Продифференцировав (10) по времени, найдем скорость центра инерции $\vec{\upsilon}_c$:

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\vec{p}}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = m\vec{\upsilon}_c \qquad (12)$$

Из этого выражения следует, что *скорость центра инерции определяется полным импульсом системы* $\vec{p}$. Движение центра инерции определяет поступательное движение системы как целого.

Если система замкнута, то выполняется закон сохранения импульса и тогда из соотношения (12) вытекает *закон сохранения скорости центра инерции*: ***центр инерции***

замкнутой системы тел движется равномерно и прямолинейно или находится в состоянии покоя.

http://online.mephi.ru/external/physics/mechanics/video/vid_3-5-11.mp4 движен центра масс

3. Закон сохранения момента импульса.

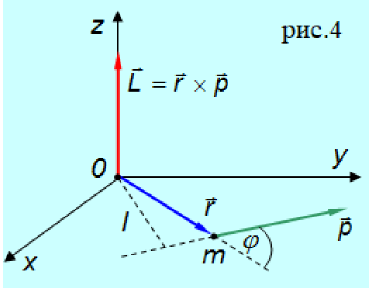
Момент импульса $\vec{L}$ отдельной частицы равен векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$ частицы на ее импульс $\vec{p}$:

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = [\vec{r}m\vec{\upsilon}] \tag{13}$$

Направление вектора $\vec{L}$ определяется по правилу правого винта (штопора), а его величина равна

$$L = rp\sin\varphi \tag{14}$$

где φ - угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$. Величина $l = r\sin\varphi$ равна расстоянию от начала координат *0* до прямой, вдоль которой направлен импульс частицы. Эта величина называется **плечом импульса** (рис.4). Вектор $\vec{L}$ зависит от выбора начала координат, поэтому говоря о нем, обычно указывают: «момент импульса относительно точки *0*».



Рассмотрим производную по времени от момента импульса:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}\vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{p}\right] + \left[\vec{r}\frac{d\vec{p}}{dt}\right] \tag{15}$$

Первое слагаемое равно нулю, так как $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{p}\right] = [\vec{\upsilon}m\vec{\upsilon}] \equiv 0$ (16)

Во втором слагаемом, согласно второму закону Ньютона, производную импульса можно заменить на силу, действующую на частицу:

$$\left[\vec{r}\frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{r}\vec{F}] = \vec{M} \tag{17}$$

По определению векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$ называется **моментом силы** $\vec{M}$ относительно точки *0*. Направление момента силы определяется тем же правилом правого винта. Его величина:

$$M = rF\sin\alpha$$

где α - угол между радиус-вектором и силой. Аналогично тому, как это было сделано выше, определяется и **плечо силы** $l = r\sin\alpha$ - расстояние от точки *0* до линии действия силы. В итоге уравнение (15) запишется в виде

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \tag{18}$$

Это соотношение (18) называется **уравнением движения для момента импульса частицы**.

По форме уравнение аналогично второму закону Ньютона: вместо импульса частицы стоит момент импульса, а вместо силы - момент силы.

Если момент силы равен нулю $\vec{M} = 0$***, то момент импульса частицы будет постоянным*** $\vec{L} = const$ (*закон сохранения момента импульса частицы*).

Обобщим уравнение движения для момента импульса частицы для системы из двух взаимодействующих частиц (рис.5). Для этого вначале запишем уравнения движения этих частиц:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{F}_1; \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{F}_2; \tag{19}$$

где $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ – внешние силы, а $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ – внутренние силы взаимодействия между частицами, направленные вдоль соединяющей их линии. Умножим первое уравнение в (19) векторно слева на радиус-вектор первой частицы $\vec{r}_1$, а второе уравнение умножим векторно слева на радиус-вектор второй частицы $\vec{r}_2$:

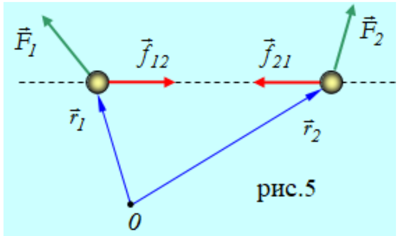


рис.5

$$\left[\vec{r}_1 \frac{d\vec{p}_1}{dt}\right] = \left[\vec{r}_1 \vec{f}_{12}\right] + \left[\vec{r}_1 \vec{F}_1\right]$$
$$\left[\vec{r}_2 \frac{d\vec{p}_2}{dt}\right] = \left[\vec{r}_2 \vec{f}_{21}\right] + \left[\vec{r}_2 \vec{F}_2\right] \qquad (20)$$

Учитывая соотношения (16) и (17), получаем

$$\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{p}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}\vec{p}\right] - \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\,\vec{p}\right] = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}\vec{p}\right] \qquad (21)$$

Используя третий закон Ньютона $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ и соотношение (21) преобразуем систему уравнений (20):

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1 \vec{p}_1\right] = \left[\vec{r}_1 \vec{f}_{12}\right] + \left[\vec{r}_1 \vec{F}_1\right]$$
$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_2 \vec{p}_2\right] = -\left[\vec{r}_2 \vec{f}_{12}\right] + \left[\vec{r}_2 \vec{F}_2\right] \qquad (22)$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\left[\vec{r}_1 \vec{p}_1\right] + \left[\vec{r}_2 \vec{p}_2\right]\right) = \left[\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \vec{f}_{12}\right] + \left[\vec{r}_1 \vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_2 \vec{F}_2\right] \qquad (23)$$

Поскольку радиус-вектор $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ параллелен вектору силы взаимодействия $\vec{f}_{12}$ (они расположены вдоль одной прямой), то их векторное произведение равно нулю. Поэтому уравнение (23) запишется в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\left[\vec{r}_1 \vec{p}_1\right] + \left[\vec{r}_2 \vec{p}_2\right]\right) = \left[\vec{r}_1 \vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_2 \vec{F}_2\right] \qquad (24)$$

В левой части равенства стоит производная от *суммы моментов импульса частиц* (ее называют ***полным моментом импульса*** $\vec{L}$ системы), а в правой - *сумма моментов внешних сил* - ***полный момент*** $\vec{M}$ ***внешних сил***, действующих на тела системы.

Обобщим уравнение (24) на случай системы из многих частиц (или твердого тела). Тогда момент импульса системы *N* частиц равен:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i \vec{p}_i\right] = \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i m\vec{\upsilon}_i\right] \qquad (25)$$

Полный момент внешних сил равен:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i \vec{F}_i\right] \qquad (26)$$

Уравнение движения для момента импульса системы частиц примет вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (27)$$

Если система замкнута или суммарный момент внешних сил, действующих на нее, равен нулю $\vec{M} = 0$***, то суммарный момент импульса системы сохраняется*** $\vec{L} = const$ (*закон сохранения момента импульса системы частиц*).
http://online.mephi.ru/external/physics/mechanics/video/vid_4_8_4_12.mp4

Если частица движется в поле *центральных сил, то момент импульса частицы сохраняется. Центральной* называется сила, линия действия которой во всех положениях проходит через некоторую определенную точку, называемую центром силы. Величина силы *F(r),* действующей на один и тот же материальный объект (материальную точку, тело, электрический заряд и др.) в разных точках такого поля, зависит только от расстояния *r* до центра сил, т.е.

$$\vec{F} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

и момент силы относительно силового центра равен нулю:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right] = \left[\vec{r}F(r)\frac{\vec{r}}{r}\right] = \frac{F(r)}{r}\left[\vec{r}\vec{r}\right] \equiv 0$$

Таким образом, для центральных сил

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

т.е. $\vec{L} = const$ - ***при движении в поле центральных сил момент импульса частицы сохраняется.***

Вопросы для самоконтроля и обсуждения

1. В чем заключается закон сохранения импульса?
2. В каких системах выполняется закон сохранения импульса? Приведите примеры.
3. Что называется центром масс системы материальных точек?
4. Как движется центр масс замкнутой системы?
5. Что такое момент импульса материальной точки? твердого тела? Как определяется его направление?
6. В чем заключается физическая сущность закона сохранения момента импульса? В каких системах он выполняется? Приведите примеры.