Лекция 4

Закон сохранения механической энергии

1. Закон сохранения энергии.
2. Потенциальна энергия частицы в центральном поле.
3. Движение частицы в центральном поле.

1. **Закон сохранения механической энергии.**

Энергия – общая количественная мера различных форм движения и взаимодействия всех видов материи. С различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др.

Рассмотрим механическую энергию, а именно закон сохранения механической энергии. К механической энергии относятся кинетическая и потенциальная энергии.

Кинетическая энергия механической системы E_k – это энергия механического движения этой системы.

Сила $\vec{F}$, действуя на покоящееся тело массой m и вызывая его движение, совершает работу, при этом увеличивается скорость его движения от $\vec{\upsilon}_0$ до $\vec{\upsilon}$. Работа dA силы $\vec{F}$ на пути, который тело прошло за время возрастания скорости от $\vec{\upsilon}_0$ до $\vec{\upsilon}$, равна

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r} = md\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon} = m\upsilon d\upsilon$$

$$A = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} m\upsilon d\upsilon = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} \qquad (1)$$

Величина $\frac{m\upsilon^2}{2}$ называется кинетической энергией и обозначается E_k.

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2} \qquad (2)$$

Так как кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, она является функцией состояния, т.е. зависит от начального и конечного положения тела.

При выводе формулы (1) предполагалось, что движение рассматривается в инерциальной системе отсчета, так как иначе нельзя было бы использовать законы Ньютона. В разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, скорость тела, а следовательно, и его кинетическая энергия будут неодинаковы. Таким образом, кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета.

Из формулы (1) следует, что *работа силы равна изменению кинетической энергии тела*:

$$A = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k \qquad (3)$$

Потенциальная энергия E_p – механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Известно, что тела взаимодействуют не только при непосредственном контакте, но и находясь на расстоянии друг от друга. В этом случае говорят, что они взаимодействуют посредством силовых полей, существующих между ними. Если силовое поле представлено в виде *поля упругих сил, поля гравитационных сил*, то работа силы, при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений. Такие силовые поля называются *потенциальными*, а силы, действующие в них, - *консервативными*. Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется *диссипативной. Примером диссипативной силы является сила трения.*

Тело, находясь в потенциальном поле сил, обладает потенциальной энергией E_p. Работа консервативных сил при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком «-» (работа совершается за счет убыли потенциальной энергии):

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = -dE_p \tag{4}$$

Интегрируя уравнение (4) получим формулу для определения потенциальной энергии:

$$E_p = -\int \vec{F}d\vec{r} + C \tag{5}$$

где C – постоянная интегрирования, т. е. потенциальная энергия определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной. Постоянная C зависит от выбора начального значения потенциальной энергии. Поэтому потенциальную энергию тела в каком-то определенном положении считают равной нулю (выбирают нулевой уровень отсчета), а энергию тела в других положениях отсчитывают относительно нулевого уровня.

Из формулы (4) следует, что если известна потенциальная энергия E_p, то можно найти консервативную силу F по модулю и направлению:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z};$$

В векторном виде:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k} = -gradE_p = -\nabla E_p \tag{6}$$

Таким образом, консервативная сила равна «минус градиент потенциальной энергии», т.е

$$\vec{F} = -gradE_p = -\nabla E_p$$

Конкретный вид потенциальной энергии зависит от характера силового поля. Например, потенциальная энергия тела массой m, поднятого на высоту h над поверхностью Земли:

$$E_p = mgh \;\Rightarrow\; \left(E_p = -\int_h^0 \vec{F}d\vec{r} = mg\int_0^h dr = mgh \right) \tag{7}$$

где высота h отсчитывается от нулевого уровня, для которого $E_p = 0$. Выражение (7) вытекает непосредственно из того, что потенциальная энергия равна работе силы тяжести при падении тела с высоты h на поверхность Земли.

Так как начало отсчета выбирается произвольно, то потенциальная энергия может иметь отрицательное значение в отличие от кинетической энергии, которая всегда положительна. Если принять за нуль потенциальную энергию тела, лежащего на поверхности Земли, то потенциальная энергия тела, находящегося на дне шахты (глубина h'), $E_p = -mgh'$.

Найдем потенциальную энергию упруго-деформированного тела (пружины). Сила упругости пружины пропорциональна величине деформации (смещения):

$$F_{x\ упр} = -kx$$

где $F_{x\ упр}$ – проекция силы упругости на ось x; k – коэффициент упругости (для пружины – жесткость), а знак минус указывает, что $F_{x\ упр}$ направлена в сторону, противоположную деформации x.

По третьему закону Ньютона, деформирующая сила равна по модулю силе упругости и противоположна ей по направлению, т. е. $F_x = -F_{x\ упр} = kx$.

Элементарная работа dA, совершаемая силой F_X при бесконечно малой деформации dx, равна

$$dA = F_x dx = kxdx$$

а полная работа

$$A = \int_0^x kxdx = \frac{kx^2}{2}$$

идет на увеличение потенциальной энергии пружины. Таким образом, потенциальная энергия упругодеформированного тела $E_p = \frac{kx^2}{2}$.

Потенциальная энергия системы является функцией состояния системы. Она зависит только от конфигурации системы и ее положения по отношению к внешним телам.

Полная механическая энергия системы *E* это энергия механического движения и взаимодействия и равна сумме кинетической и потенциальной энергий: $E = E_k + E_p$.

При движении тела в поле консервативных сил из точки 1 в точку 2 над ней совершается работа, равная убыли потенциальной энергии, т.е. $A = E_{p1} - E_{p2}$, и в то же время эта работа равна приращению кинетической энергии, т.е. $A = E_{k2} - E_{k1}$. Приравняв эти выражения для работы, получим соотношение $E_{p1} - E_{p2} = E_{k2} - E_{k1}$, из которого следует

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} = E \qquad (8)$$

Из этого выражения следует, что *полная механическая энергия тела, движущегося в поле консервативных сил, остается постоянной. Это утверждение выражает закон сохранения механической энергии тела.*

Если имеется замкнутая система, состоящая из материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы, то ее полная механическая энергия остается постоянной.

Механические системы, на тела которых действуют только потенциальные силы (внутренние и внешние), называются консервативными системами. Закон сохранения механической энергии можно сформулировать так: в консервативных системах полная механическая энергия сохраняется.

В этих системах могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах так, что полная энергия остается неизменной. Закон сохранения и превращения энергии – фундаментальный закон природы, он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микротел.

В системе, в которой действуют также непотенциальные (диссипативные) силы, например силы трения, полная механическая энергия системы не сохраняется. Следовательно, в этих случаях закон сохранения механической энергии несправедлив. Однако при “исчезновении” механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Таким образом, энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой (закон сохранения энергии).

2. Потенциальна энергия частицы в центральном поле.

Рассмотрим потенциальную энергию частицы в одном из наиболее важных видов силового поля –*центральном силовом поле*.

Силовое поле называется центральным*, если на частицу, помещенную в это поле, действует сила, направленная вдоль луча, соединяющего частицу и центр силового поля, а величина силы зависит только от расстояния частицы до центра.*

Центр силового поля - это точка, где помещается частица, создающая поле. ***Центральное*** поле является ***сферически симметричным,*** т.е. все точки, лежащие на сфере некоторого радиуса с центром, совпадающим с центром поля, находятся в эквивалентном положении по отношению к полю. *Важность центрального поля состоит в том*, что оно часто встречается в физических задачах. Например, центральными являются силовые поля, создаваемые Солнцем в солнечной системе, ядром в атоме и т.п.

В качестве примера центрального поля рассмотрим гравитационное поле, создаваемое частицей массой *M*. Гравитационное поле, созданное однородным шаром массы *M,* вне шара эквивалентно гравитационному полю частицы той же массы, помещенной в центр шара (рис. 1).

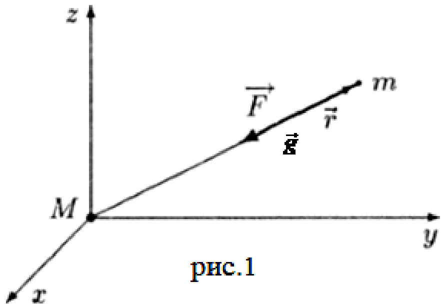

рис.1

Силовые консервативные поля характеризуются распределением в пространстве ***напряженности и потенциала***. Для того чтобы дать определения этих величин поместим пробную частицу массы m в центральное гравитационное поле. *Пробной называется частица,* достаточно слабо искажающая рассматриваемое поле. Из рисунка 1 следует, что на пробную частицу в гравитационном поле действует сила $\vec{F}$, направленная к центру. Эта сила называется силой тяжести. Эту силу можно определить, используя закон всемирного тяготения:

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}; \quad F = G\frac{mM}{r^2} \tag{9}$$

где G – коэффициент пропорциональности, называемый гравитационной постоянной ($G = 6.67 \cdot 10^{-11} Н \cdot м^2 \cdot кг^{-2}$).

Отношение силы, действующей со стороны поля на пробную частицу, к величине ее массы, называется ***напряженностью гравитационного поля***:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}; \quad g = G\frac{M}{r^2} \tag{10}$$

Из формулы (10) видно, что *напряженность гравитационного поля (силовая характеристика поля)* не зависит от массы пробной частицы, и определяется только массой частицы *M*, порождающей это поле, а также расстоянием от частицы *M* до точки, где определяется напряженность поля. Таким образом, напряженность характеризует свойства самого поля. Зная напряженность поля можно определить силу, действующую на любую другую частицу, помещенную в это поле:

$$\vec{F}' = m_1\vec{g} \tag{11}$$

где m_1 – масса частицы, помещенной в гравитационное поле. С точки зрения второго закона Ньютона, частица, помещенная в гравитационное поле, под действием силы тяжести будет двигаться с ускорением $\vec{g}$. Таким образом, напряженность гравитационного поля одновременно является и ускорением свободного падения. Вблизи поверхности Земли:

$$g = G\frac{M_з}{R_з^2} \approx 9.8 м / с^2 \tag{12}$$

Определим *энергетическую характеристику гравитационного поля – гравитационный потенциал* φ . ***Потенциальная энергия, приходящаяся на единицу массы частицы*** m_1 ***называется потенциалом гравитационного поля в точке, где находится частица*** m_1***:***

$$\varphi = \frac{E_p}{m_1} \tag{13}$$

Найдем потенциальную энергию частицы в гравитационном поле. Для этого рассмотрим перемещение частицы из точки 1 с радиус-вектором $\vec{r}_1$ в точку 2 с радиус-вектором $\vec{r}_2$ (рис.2). Если разбить траекторию движения между $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ на ломаные кривые с радиальными составляющими вдоль $\vec{r}$ и составляющими, перпендикулярными $\vec{r}$, то работа силы поля вдоль этих ломаных кривых:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} dA = -\int_{r_1}^{r_2} G\frac{mM}{r^2}dr = m\left(G\frac{M}{r_2} - G\frac{M}{r_1}\right) \tag{14}$$

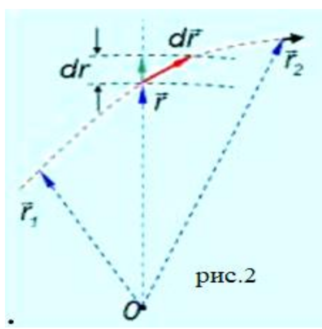

рис.2

Здесь работа поля равна работе силы на радиальных участках ломаных кривых, так как на участках, перпендикулярных радиус-вектору, работа силы равна нулю. Следовательно, работа поля при перемещении от точки 1 до точки 2, не зависит от траектории движения, а определяется начальным и конечным положениями $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Пользуясь соотношением (5) найдем потенциальную энергию частицы в гравитационном поле:

$$E_p = \int dA = -\int \vec{F} d\vec{r} = -G\frac{mM}{r} + C \tag{15}$$

здесь C – произвольная постоянная, означающая, что начало отсчета или нулевой уровень потенциальной энергии, можно выбрать произвольно. Тогда, согласно (13) потенциал равен:

$$\varphi = -G\frac{M}{r} + C' \tag{16}$$

Следовательно, потенциальная энергия частицы в консервативном гравитационном поле равна:

$$E_p = m\varphi \tag{17}$$

Как видно из формулы (13) потенциал гравитационного поля, так же как и его напряженность зависит только от массы частицы, являющейся источником поля, и расстояния от источника поля до рассматриваемой точки поля.

3. Движение частицы в центральном поле.

Центральная сила записывается в виде: $\vec{F} = F(r)\cdot\vec{e}_r = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$ (18)

При движении в центральном поле момент силы равен нулю, так как угол между векторами в векторном произведении равен нулю:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right] = F(r)\left[\vec{r}\,\frac{\vec{r}}{r}\right] = 0 \tag{19}$$

Тогда по закону сохранения момента импульса если момент действующей силы равен нулю, то момент импульса сохраняется. Таким образом, ***при движении частицы в центральном поле полный момент импульса сохраняется, несмотря на то, что система (одна частица во внешнем поле) не является замкнутой.***

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = m[\vec{r}\vec{\upsilon}] = const \tag{20}$$

Уравнение (20) означает, что сохраняются и величина, и направление момента импульса. Также из уравнения (20) следует, что вектор момента импульса $\vec{L}$ перпендикулярен к векторам $\vec{r}$ и $\vec{p}$. Значит, движение частицы происходит в плоскости, перпендикулярной к $\vec{L}$. Следовательно, ***частица в центральном поле движется вдоль плоской орбиты (траектории).***

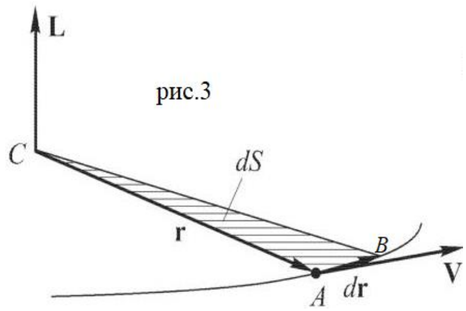

рис.3

Еще одним следствием закона сохранения момента импульса в центральном поле является постоянство секториальной скорости. ***Секториальной скоростью называется площадь, описываемая радиус-вектором в единицу времени.***

Из рис.(3) dS равно площади треугольника CAB:

$$dS = \frac{1}{2} r\cdot dr\cdot sin\alpha = \frac{1}{2}\left|[\vec{r}, d\vec{r}]\right| = \left|\left[\vec{r}, m\frac{d\vec{r}}{dt}\right]\right|\frac{dt}{2m} = \frac{L}{2m}dt$$

или

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = const \tag{21}$$

Выражение (21) отражает ***закон сохранения секториальной скорости***. Этот закон впервые экспериментально установлен Кеплером при изучении движения планет солнечной системы. Это так называемый ***второй закон Кеплера***.

Вопросы

1. Какова связь между кинетической энергией и работой?
2. Какова связь между потенциальной энергией и работой?
3. Какова связь между силой и потенциальной энергией?
4. В чем заключается закон сохранения механической энергии? Для каких систем он выполняется?
5. Какое поле называется центральным? Чему равны напряженность и потенциал центрального поля?
6. Как определяется потенциальная энергия частицы в центральном поле?
7. Какова особенность движения частицы в центральном силовом поле?