анықтауға болады. Бұл тұжырым классикалық механикадағы **себептілік принципі** деп аталады немесе **Лапластың детерминизм принципі** деп аталады

Лекция №4. Аналитикалық механика негіздері

4.1. Жалпылама координаталар мен жалпылама жылдамдықтар.

4.2. Ең аз әсер принципімен Лагранж теңдеуін қорыту.

4.3. Еркін материалдық нүктенің Лагранж функциясы.

4.4. Материалдық нүктелер жүйесі үшін Лагранж функциясы.

4.1. Механиканың негізгі ұғымдарының бірі - материалдық нүкте. Материалдық нүктенің қозғалсын сипаттау кезінде оның өлшемі ескерілмейді.

Материалдық нүктенің кеңістіктегі орнын анықтайтын радиус векторы

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (1)$$

яғни 3 координатаның көмегімен анықталады.

Егер механикалық жүйе N материалдық нүктеден тұратын болса, онда жүйенің орнын анықтау үшін N радиус векторын жазуымыз керек.Ол сәйкесінше 3N шаманы анықтауға мәжбүр етеді. Бұл 3N шамалар міндетті түрде декаарттық координаталарда жазылуы шарт емес. (сфералық, цилиндірлік)

Барлық координаталарда ортақ бола алатын және жүйенің күйін сипаттай алатын шамалар енгізу қажеттілігі туды, ондай шамаларды жалпылама шамалар деп аталады.

Жалпылама жылдамдықтар деп-жалпылама координаталардан уақыт бойынша алынған бірінші реттік туындыны айтады.

$$\dot{q}_{1,}\dot{q}_{2;\ldots\ldots}\dot{q}_s$$

Жалпылама координаталар деп-еркіндік дәрежесі S болатын жүйенің орнын толық сипаттауға мүмкіндік беретін орнын $q_{1,}q_{2,\ldots\ldots}q_s$ шамаларды айтады.Жалпылама координаталар мен жалпылама жылдамдықтар белгілі болатын болса,жүйенің толық күйін сипаттауға болады және алдағы кез келген уақыт мезетіндегі жүйенің күйінде анықтауға болады.

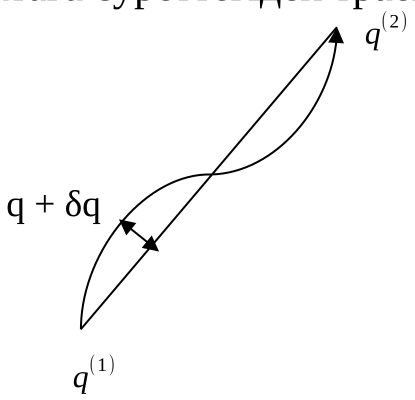
Жалпылама координаталар мен жалпылама жылдамдықтарды үдеумен байланыстыратын қатынас қозғалыс теңдеуі деп аталады.

4.2.Материалдық нүктенің қозғалыс теңдеуін Гамильтонның ең аз әсер принципі деп аталатын ереженің көмегімен тағайындайды. Бұл ереже былайша айтылады: механикалық жүйе бір күйден екінші бір күйге өткен кезде әсер мейлінше минимал болатын траекторияны таңдайды. Осы принцип негізінде механикалық жүйе мына функциямен сипатталады.

$$L(q_i, \dot{q}_{i,} t)$$

Бұл функция Лагранж функциясы деп аталады және ол жалпылама координаталардың, жалпылама жылдамдықтардың және уакыттың функциясы болып табылады. Осы функция механикалық жүйенің күйін толық сипаттай алады.

Механикалық жүйе t_1 *және* t_2 уақыт аралығында q^1 *нүктеден*(кординатадан)q^2 координатаға суреттегідей траекториямен орын ауыстырсын.



Бұл жағдайда әсер келесі интегралмен анықталады.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_{i,} t)\, dt \qquad (1)$$

Мұндағы $q + \delta q$- механикалық жүйенің түзуден ауытқу шамасы болсын немесе оны Вариация функциясы деп аталады.

Бастапқы және соңғы нүктелерде

$$\delta q_1 = \delta q_2 = 0$$

Ең аз әсер принципі бойынша әсердің өзгерісі

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(q_1 + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_{i,} t\right) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i \dot{q}_i t)\, dt$$

Сонда

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt = 0 \qquad (2)$$

(2) өрнекті былай жазуға болады

$$\delta S = ¿ \int_{t_1}^{t_2} L\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)dt = 0 \qquad (3)$$

Мұндағы $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}\delta q_i$ деп жазатын болсақ.

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\partial q_i\right) dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\, dt = \boldsymbol{0} \qquad (4)$$

(4)интеграл 0-ге тең болу үшін

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad (5)$$

(5)өрнек **Лагранж теңдеуі** деп аталады. Бұл теңдеу әдетте былайша жазылады:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (5¿)$$

Бұл теңдеу екінші реттік дифференциялдық теңдеу және классикалық механикада механикалық жүйенің күйін сипаттайтын негізгі теңдеуі болып табылады

Лагранж теңдеуі ($5¿$)механикалық жүйенің үдеуін,координаталарын және жылдамдықтарын байланыстыратын теңдеу болып табылады.

Механикалық жүйенің күйін сипаттайтын Лагранж функциясының қасиеттерін қарастырайық.

1.Механикалық жүйе екі бөліктен (А және В)тұрсын және олардың әрқайсысы тұйықталған болсын және $L_A\, \text{және}\, L_B$ *функциямен сипатталган болсын*. Онда жүйенің жалпы Лагранж функциясы келесі шекпен анықталады.

$$\lim L = L_A + L_B \qquad (6)$$

Бұл Лагранж функциясының қасиеті, оның аддитивтілік қасиеті деп аталады.

2. Механикалық жүйенің күйін сипаттайтын Лагранж функциясының кез келген тұрақтыға көбейткеннен Лагранж функциясының мәні өзгермейді.

3. Лагранж функциясына уақыт бойынша толық туынды болатын функцияны қосып жазғаннан немесе тастап кетіп жазғаннан оның мәні өзгермейді.

4.3.Еркін қозғалысты жалғыз бөлшектің күйін сипаттайтын Лагранж функциясын қарастырайық:

Кеңістіктің және уақыттың біртектілік қасиетіне байланысты мұндай еркін бөлшектің Лагранж функциясы координатаға және уақытқа ашық түрде тәуелді бола алмайды. Сонымен қатар кеңістіктің изотроптылығына байланысты еркін бөлшектің Лагранж функциясы бағытқа да тәуелді болмайды. Сондықтан еркін бөлшектің Лагранж функциясы тек жылдамдықтың квадратына ғана тәуелді болады деген тұжырым жасаймыз.

$$L(\vartheta^2) \qquad (7)$$

Сонда $L=L(\vartheta^2)$ (7¿)

Осы функцияның түрін анықтайық:

Галилейдің салыстырмалық принципіне сәйкес барлық инерциялды санақ жүйесінде механикалық жүйенің Лагранж функциясы өзгермеуі тиіс.

Сонымен қатар жылдамдықтарды қосу заңына сәйкес бір инерциалды санақ жүйесінен екінші инерциалды санақ жүйесіне көшкенде

$$\vec{\vartheta}=\vec{\vartheta}'+\vec{\vartheta}_0$$

Сонда

$$L=L\left(\vartheta^2\right)=L\left(\left(\vartheta'+\vartheta_0\right)^2\right)=L\left((\vartheta')^2+2\vec{\vartheta}'\vec{\vartheta}_0+\left(\vartheta_0\right)^2\right)=L\left(\vartheta'\right)^2+L\left(2\vec{\vartheta}'\vec{\vartheta}_0\right)+L\left(\vartheta_0\right)^2$$

(8)

(8) өрнектің оң жағына Лагранж функциясының 2-і қасиетіне сәйкес

$$L\left(\vartheta^2\right)=aL\left((\vartheta')^2+\frac{d}{dt}\left(2a\vec{\vartheta}_0\vec{r}'+a{\vartheta_0}^2t\right)\right. \qquad (9)$$

(9)өрнектен Лагранж функциясының 3 қасиетіне сәйкес оң жақтағы 2-і құраушыны тастап жазуға болады.

$$L\left(\vartheta^2\right)=L\left(a(\vartheta')^2\right)$$

Сонда еркін бөлшектің Лагранж функциясы

$$L = a\vartheta^2 \qquad (10)$$

(10)-өрнектегі a-деген тұрақтыны $a = \frac{m}{2}$ деп белгілейік.
Сонда

$$L = \frac{m\vartheta^2}{2} \qquad (11)$$

Сонымен еркін бөлшектің Лагранж функциясы оның кинетикалық энергиясы болып табылады.

4.4. n бөлшектен тұратын механикалық жүйенің күйін сипаттайтын Лагранж функциясының күйін анықтайық.

2 жағдай болуы мүмкін:
1.Бұл бөлшектердің бір-бірімен әсерлесуі ескерілмейтін жағдай (идеал газ). Мұндай жүйені бір-бірімен әсерлеспейтін бөлшектерден тұратын механикалық жүйе деп аталады.
2.Бұл бөлшектер бір-бірімен әсерлеседі. Мұндай жүйені өзара әсерлесетін n бөлшектен тұратын механикалық жүйе деп аталады.
Өзара әсерлеспейтін бөлшектен тұратын механикалық жүйенің Лагранж функциясы былайша жазылады.

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{i\vartheta_i}{}^2}{2} \qquad (12)$$

Яғни мұндай жүйенің Лагранж функциясы жүйені құрайтын бөлшектің кинетикалық энергиясының қосындысына тең болады.
Өзара әсерлесетін n бөлшектен тұратын механикалық жүйенің Лагранж функциясының түрін анықтайық. Бұл жүйеге сырттан басқа денелер тарапынан ешқандай күш әсер етпесін. Қоршаған денелер тарапынан ешқандай әсер болмайтын жүйе тұйықталған жүйе деп аталады.Осындай жүйені қарастырайық.
Бөлшектің өзара әсерін сипаттайтын функция U әрпімен белгіленеді және ол әр бөлшектің кеңістіктегі орналасуына ғана тәуелді болатын функция болып табылады.

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots . \vec{r}_n)$$

Бұл функция потенциалдық энергия деп аталады. Сонымен өзара әсерін n бөлшектен тұратын тұйықталған механикалық жүйе үшін Лагранж функциясы мына түрде жазылады.

$$L=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\vartheta_i^2}{2}-U\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots,\vec{r}_n\right) \qquad (13)$$

Яғни өзара әсерін n бөлшектен тұратын тұйықталған механикалық жүйенің Лагранж функциясы оның кинетикалық және потенциалдық энергияның айырмасына тең болады.

Мұндағы $T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\vartheta_i^2}{2}$ - жүйенің толық кинетикалық энергиясы.

Лекция №5. Сақталу заңдары

5.1. Механикалық энергияның сақталу заңы

5.2. Импульстің сақталу заңы

5.3. Масса центрі және оның қозғалыс теңдеуі

5.4. Импульс моменті және импульс моментінің сақталу заңы

Сақталу заңдарын қарастырмастан бұрын Лагранж теңдеуін пайдалана отырып Лагранж функциясын талдайық. Есепті жеңілдету мақсатында Лагранж теңдеуін декаарттық координатада жазайық.