Лекция 5

Симметрия пространства и времени

1. Законы сохранения и свойства симметрии пространства и времени.
2. Функция Гамильтона.

1. Законы сохранения и свойства симметрии пространства и времени.

Основными законами сохранения, рассматриваемыми в физике, являются: законы сохранения энергии, импульса, момента импульса. В механике эти законы могут быть получены из законов Ньютона. Что и было сделано в предыдущих лекциях. Однако перечисленные законы сохранения применимы и в других разделах физики, т.е. за пределами механики. Это означает, что в основе законов сохранения лежат более общие свойства природы, чем те, которые изучаются в механике.

Согласно современным представлениям, законы сохранения связаны со свойствами симметрии физических систем. Понятие симметрии применимо к любому объекту, в том числе и к физическому закону. Вспомним, что согласно принципу относительности Эйнштейна, все физические законы имеют одинаковый вид в любых инерциальных системах отсчета. Это означает, что они симметричны (инвариантны) относительно перехода от одной инерциальной системы к другой.

Таким образом, ***симметрия здесь понимается как инвариантность физических законов, описывающих данную систему, относительно некоторых преобразований, входящих в эти законы величин***.

Наиболее общий подход к взаимосвязи симметрий и законов сохранения содержится в знаменитой теореме немецкого математика Э. Нетер. В 1918 г. она, работая в составе группы по проблемам теории относительности, доказала теорему, упрощенная формулировка которой гласит: ***если свойства системы не меняются относительно какого-либо преобразования переменных, то этому соответствует некоторый закон сохранения.*** Иными словами, ***наличие в системе симметрии приводит к тому, что для этой системы существует сохраняющаяся величина.***

И наоборот, если установлен, например, экспериментально какой-либо закон сохранения, то это позволяет сделать определенное заключение о фундаментальных свойствах симметрии рассматриваемой системы. Симметрия и законы сохранения не следствие одного другого, а равноправные проявления общих фундаментальных свойств материи.

Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса связаны со свойствами симметрии пространства - времени. Свойства симметрии, не связанные с пространством и временем, позволяют получить законы сохранения для других величин, например, электрического заряда.

Наиболее важными преобразованиями симметрии пространства и времени являются:

1) преобразование переноса, которое сводится к переносу замкнутой системы в пространстве;
2) преобразование поворота замкнутой системы в пространстве;
3) преобразование сдвига шкалы времени, означающее, что определенный процесс (движение) в одной и той же системе начинается в различные моменты времени.

Если замкнутую систему перенести из одного места пространства в другое, приведя все тела системы в новом положении в те же условия, в каких они находились в прежнем положении, то обнаруживается, что такой перенос не отражается на физических явлениях в системе. Это свойство пространства называется ***однородностью. С однородностью пространства связан закон сохранения импульса.***

Аналогично обнаруживается, что *изменение ориентации изолированной системы в пространстве не изменяет хода физических явлений в системе*. Это свойство пространства называется ***изотропностью. С изотропностью пространства связан закон сохранения момента импульса.***

Однородность времени означает, что *если в два любых момента времени все тела замкнутой системы поставить в одинаковые условия, то, начиная с этих моментов, все явления в системе будут протекать совершенно одинаково*. ***Однородность времени связана с законом сохранения энергии.***

Иными словами, различные области пространства, различные направления в пространстве, различные моменты времени физически эквивалентны. Изменение одного только пространственного положения системы, или только ее ориентации, или начала отсчета времени не влияет на ход физических явлений. Эти фундаментальные свойства пространства и времени лежат в основе законов сохранения импульса, момента импульса и энергии.

1.1. Закон сохранения импульса и однородность пространства. Итак, в силу однородности пространства механические свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого в пространстве. Для замкнутой системы закон сохранения импульса формально следует из 2-го и 3-го законов Ньютона:

$$\vec{F}_{ext} = 0, \ \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \tag{1}$$

Однако справедливость 3-го закона Ньютона и закона сохранения импульса обусловлены однородностью пространства. Пусть мы имеем внутренние силы $\vec{f}_i$, действующие в замкнутой системе. Однородность пространства означает следующее: перенесем все частицы системы в пространстве на расстояние $d\vec{r}$ и, поскольку ничего не может измениться, заключаем, что работа всех внутренних сил (работа над i -ой частицей $\vec{f}_i d\vec{r}$), которая всегда равна изменению потенциальной энергии, должна быть равна 0. Запишем это условие:

$$\vec{f}_1 d\vec{r} + \vec{f}_2 d\vec{r} + ... = \left(\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + ... \right) d\vec{r} = 0 \tag{2}$$

В силу произвольности $d\vec{r}$ получаем закон сохранения импульса:

$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + ... = 0 = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = const \tag{3}$$

Поскольку полная сила на i частицу равна сумме сил со стороны каждой другой частицы, мы можем (2) записать в виде:

$$d\vec{r} \sum_{i,j} \vec{f}_{ij} = 0 \tag{4}$$

Учитывая взаимное действие частиц в системе, запишем (4) в следующем виде:

$$\sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij} = 0 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} \right) \tag{5}$$

в силу независимости взаимодействия каждой из пар частиц друг с другом получаем 3-ий закон Ньютона:

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji} \tag{6}$$

1.2. Закон сохранения момента импульса и изотропия пространства. Для замкнутой системы момент внешних сил равен нулю $\vec{M}_{ext} = 0$. Изотропия означает, что если замкнутую систему повернуть на какой-нибудь угол в пространстве, то ничего не изменится (рис.1). Пусть $\vec{M}_i$ - моменты внутренних сил относительно неподвижной точки *0*. Повернем всю систему на угол $d\alpha$. Из изотропии пространства следует, что работа моментов сил должна быть равна нулю:

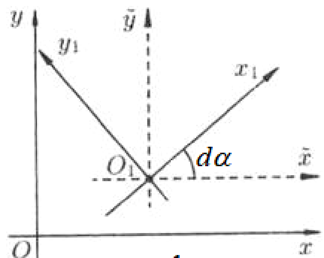

рис.1

$$dA = \vec{M}_1 d\vec{\alpha} + \vec{M}_2 d\vec{\alpha} + ... = 0 \tag{7}$$

В силу произвольности угла поворота $d\alpha$ заключаем, что сумма моментов внутренних сил равна 0:

$$\vec{M}_1+\vec{M}_2+\ldots=\sum_i \vec{M}_i=\frac{d\vec{L}}{dt}=0 \tag{8}$$

И отсюда следует закон сохранения момента импульса:

$$\vec{L}=const \tag{9}$$

Таким образом, закон сохранения момента импульса связан с изотропией пространства.

1.3. Закон сохранения энергии и однородность времени. Из динамики получаем следствие 2-го закона Ньютона - работа сил над механической системой равна приращению ее кинетической энергии E_k:

$$A_{12}=E_{k2}-E_{k1} \tag{10}$$

Пусть на i -ую частицу действует сила $\vec{F}\left(F_x,F_y,F_z\right)$, компоненты которой определяются:

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x},\ \ F_y=-\frac{\partial U}{\partial y},\ \ F_z=-\frac{\partial U}{\partial z} \tag{11}$$

В самом общем случае потенциальная энергия U (например, для незамкнутой системы) зависит еще от времени t: $U = U(x,y,z,t)$. Поэтому полное приращение U включает также и производную по времени (т.е. полный дифференциал функции):

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz+\frac{\partial U}{\partial t}dt \tag{12}$$

При этом конечное приращение потенциальной энергии при переходе из состояния 1 в состояние 2 определяется интегралом:

$$\int_1^2 dU\left(x,y,z,t\right)=U_2-U_1 \tag{13}$$

Работа сил при пространственном перемещении из точки 1 в точку 2 определяется в виде:

$$A_{12}=\int_1^2\left(F_x dx+F_y dy+F_z dz\right)=-\int_1^2\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz\right) \tag{14}$$

Чтобы в выражении (14) в скобках появился полный дифференциал U, т.е. можно было бы воспользоваться выражением (13), добавим и вычтем частную производную по времени:

$$A_{12}=-\int_1^2\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz+\frac{\partial U}{\partial t}dt\right)+\int_1^2\frac{\partial U}{\partial t}dt=-\left(U_2-U_1\right)+\int_1^2\frac{\partial U}{\partial t}dt \tag{15}$$

Складывая работы для всех частиц, получаем работу для всей системы при переходе из состояния 1 в состояние 2:

$$A_{12}=-\left(U_2-U_1\right)+\int_1^2\frac{\partial U}{\partial t}dt=E_{k2}-E_{k1} \tag{16}$$

Выражение (16) можно записать в виде:

$$\left(E_{k2}+U_2\right)-\left(E_{k1}+U_1\right)=\int_1^2\frac{\partial U}{\partial t}dt \tag{17}$$

Теперь пусть система замкнута. Однородность времени заключается в том, что в любой момент времени развитие событий происходит одинаковым образом, т.е. потенциальная энергия не может явно зависеть от времени:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=0$$

Тогда из (17) получаем ***закон сохранения энергии***: $\left(E_{k2}+U_2\right)=\left(E_{k1}+U_1\right)$ (18)

Между уравнениями динамики и законами сохранения имеется существенная разница. Законы динамики дают нам *представление о детальном ходе процесса*. Законы сохранения обусловлены фундаментальными свойствами пространства и времени и поэтому они универсальны и всеобщи. Но они не дают указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, *какие процессы запрещены в природе. Законы сохранения выступают как запреты*.

3. Функция Гамильтона.

В классической механике механические явления можно описать не только на основе законов Ньютона, но и используя так называемую ***функцию Гамильтона***. Ценность такого подхода заключается в том, что в отличие от понятия силы, которое неприменимо в квантовой механике, понятие функции Гамильтона остается там справедивым, несколько видоизменяясь, и поэтому эта функция позволяет описать и явления микромира.

По определению функцией Гамильтона системы частиц называется функция координат, импульсов частиц и, в общем случае, времени следующего вида:

$$H\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n;\vec{p}_1,\vec{p}_2,...,\vec{p}_n;t\right)=E_k+U=\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{2m_i}+U\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n;t\right) \tag{19}$$

$$где \quad p_i^2=p_{ix}^2+p_{iy}^2+p_{iz}^2$$

Здесь E_k – суммарная кинетическая энергия частиц, выраженная через импульсы, U – потенциальная функция системы частиц. *С использованием функции Гамильтона (19) можно решать только чисто механические задачи*. Те задачи, в которых существуют диссипативные процессы, т.е. процессы, приводящие к превращению механической энергии в тепловую энергию (например, при действии силы трения), должны решаться с привлечением некоторых дополнительных функций.

Уравнения движения в дифференциальной форме с использованием функции Гамильтона имеют следующий вид:

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_{ix}};\quad \frac{dy_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_{iy}};\quad \frac{dz_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_{iz}}; \tag{20}$$

$$\frac{dp_{ix}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i};\quad \frac{dp_{iy}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y_i};\quad \frac{dp_{iz}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial z_i}; \tag{21}$$

Уравнения (20) и (21) называются уравнениями Гамильтона и представляют собой систему дифференциальных уравнений первого порядка. Используя соотношение $\vec{p}=m\vec{\upsilon}$, можно показать, что уравнения в (20) дают просто *определение импульса частицы*, а используя выражение для потенциальной силы $\vec{F}=-gradU=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z\right)$, находим, что уравнения в (21) представляют собой уравнения второго закона Ньютона для частиц системы в виде проекций на оси координат. Таким образом, *уравнения Гамильтона* (20) и (21) эквивалентны уравнению второго закона Ньютона.

Используя функцию Гамильтона, покажем связь между свойствами однородности времени и законом сохранения энергии. Для простоты рассмотрим систему из двух взаимодействующих частиц, находящихся в стационарных внешних условиях. Требование стационарности внешних условий эквивалентно требованию инвариантности законов динамики относительно сдвига начала отсчета времени. Действительно, если условия стационарны, то функция Гамильтона не зависит от времени явно, а значит, не изменяется при изменении начала отсчета времени. При этом потенциальная функция заменяется потенциальной энергией, а функция Гамильтона принимает вид:

$$H\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2;\vec{p}_1,\vec{p}_2\right)=\frac{p_{1x}^2+p_{1y}^2+p_{1z}^2}{2m_1}+\frac{p_{2x}^2+p_{2y}^2+p_{2z}^2}{2m_2}+U\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right) \tag{22}$$

Найдем полную производную от функции Гамильтона по времени:

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial H}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_{1x}}\cdot\frac{dp_{1x}}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_{2x}}\cdot\frac{dp_{2x}}{dt}+$$
$$+\frac{\partial H}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dt}+\frac{\partial H}{\partial y_2}\cdot\frac{dy_2}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_{1y}}\cdot\frac{dp_{1y}}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_{2y}}\cdot\frac{dp_{2y}}{dt}+ \qquad (23)$$
$$+\frac{\partial H}{\partial z_1}\cdot\frac{dz_1}{dt}+\frac{\partial H}{\partial z_2}\cdot\frac{dz_2}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_{1z}}\cdot\frac{dp_{1z}}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_{2z}}\cdot\frac{dp_{2z}}{dt}$$

Для дальнейшего преобразования уравнения (23) воспользуемся уравнениями Гамильтона (20) и (21), записанных для системы из двух частиц:

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_{1x}};\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_{2x}};\quad \frac{dp_{1x}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_1};\quad \frac{dp_{2x}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_2}$$
$$\frac{dy_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_{1y}};\quad \frac{dy_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_{2y}};\quad \frac{dp_{1y}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y_1};\quad \frac{dp_{2y}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y_2} \qquad (24)$$
$$\frac{dz_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_{1z}};\quad \frac{dz_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_{2z}};\quad \frac{dp_{1z}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial z_1};\quad \frac{dp_{2z}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial z_2}$$

Подставим уравнения (24) в уравнение (23), в результате получим:

$$\frac{dH}{dt}=0 \qquad (25)$$

$$H=E_k+U=E=const \qquad (26)$$

Функция Гамильтона, не зависящая явно от времени, есть полная механическая энергия системы. Из соотношения (26) видно, что получен закон сохранения энергии как следствие однородности времени.

Используя функцию Гамильтона, можно аналогично из однородности и изотропности пространства получить законы сохранения импульса и момента импульса соответственно.

Вопросы для самоконтроля и обсуждения

1. Что означает понятие «симметрия» в физике?
2. С какой симметрией связан закон сохранения импульса? (приведите доказательство)
3. С какой симметрией связан закон сохранения момента импульса? (приведите доказательство)
4. С какой симметрией связан закон сохранения энергии? (приведите доказательство)
5. Что представляют собой функция Гамильтона и уравнения Гамильтона?