$$L=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\vartheta_i^2}{2}-U\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_n\right) \qquad (13)$$

Яғни өзара әсерін n бөлшектен тұратын тұйықталған механикалық жүйенің Лагранж функциясы оның кинетикалық және потенциалдық энергияның айырмасына тең болады.

Мұндағы $T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\vartheta_i^2}{2}$ - жүйенің толық кинетикалық энергиясы.

Лекция №5. Сақталу заңдары

5.1. Механикалық энергияның сақталу заңы

5.2. Импульстің сақталу заңы

5.3. Масса центрі және оның қозғалыс теңдеуі

5.4. Импульс моменті және импульс моментінің сақталу заңы

Сақталу заңдарын қарастырмастан бұрын Лагранж теңдеуін пайдалана отырып Лагранж функциясын талдайық. Есепті жеңілдету мақсатында Лагранж теңдеуін декаарттық координатада жазайық.

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}=\frac{\partial L}{\partial r}$ (1) немесе $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$

(1) Өрнектен (13)- 4лекциядағы өрнекті қояйық.

$$\frac{\partial L}{\partial v_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}-U(\vec{r})\right)'_v=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\left(v_i^2\right)'-\left(U(\vec{r})\right)'=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}2v_i=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_i}=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i \quad (2)$$

Яғни Лагранж функциясынан жылдамдық бойынша алынған бірінші ретті туынды жүйенің импульсіне тең болады.

$$\frac{\partial L}{\partial r_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}-U(\vec{r})\right)'_r=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}\right)'_r-\frac{\partial U(\vec{r}_i)}{\partial r_i}=\frac{-\partial U(\vec{r})}{\partial r_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_i}=\frac{-\partial U(\vec{r})}{\partial r_i} \quad (3)$$

Яғни Лагранж функциясы радиус векторы бойынша алынған бірінші ретті туынды потенциалдық энергияның бағытындағы өзгерісіне тең болады. (2) және (3)өрнекті (1)-ге қойсақ.

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i = -\frac{U(\vec{r})}{\partial r} \quad (4)$$

$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{-\partial U(\vec{r})}{\partial r}$ (4¿) $\vec{F}=m\vec{a}$ $\vec{F}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}$ $\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt} \quad (5)$$

Ньютонның 2 заңының импульс арқылы жазылуы деп аталады.

(4¿) мен (5) салыстырамыз.

$$\vec{F}=\frac{-\partial U(\vec{r})}{\partial r} \quad (6)$$

5.1. Сақталу заңына тоқталайық.

Қозғалыс кезінде механикалық жүйенің күйін анықтайтын шамалар $(q_i, \dot{q}_i)$ уақытқа байланысты өзгереді. Бірақ механикалық қозғалыс кезінде бұл 2 шаманың функциясы болғандықтан қандай да бір функция бастапқыдағы шарттарға ғана тәуелді болып, өзгермей тұрақты болып қалатын функцияларда кездеседі. Бұл функция классикалық механикада қозғалыс интегралдары деп аталады немесе сақталу заңдары деп аталады.

Осындай заңдарды қарастырайық.

1) уақыттың біртектілік қасиетіне байланысты туындайтын сақталу заңын қарастырайық. (Бұл заң механикалық энергияның сақталу заңы деп аталады.)

Уақыттың біртектілік қасиетіне байланысты тұйықталған жүйенің Лагранж функциясы уакытқа ашық түрде тәуелді болмайды. Сондықтан Лагранж функциясы уақыт бойынша алынған толық туынды мына түрде жазылады.

$$L(q,\dot{q},t)$$

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}d\,q_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\,\dot{q}_i \quad (7)$$

Мұндағы: $d\,q_i=\dot{q}_i$, $d\,\dot{q}_i=\ddot{q}_i$

Сонымен қатар Лагранж теңдеуі

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Сонда: $$\frac{dL}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\,\ddot{q}(7^{¿})$$

($7^{¿}$)өрнектің оң жағындағы қосындыны екі функцияның көбейтіндісінің туындысы ретінде қарастырып, былайша жазуға болады.

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\dot{q}_i \; (*)$$

сонымен(*) өрнекті ($7^{¿}$)- ке қойсақ

$$\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\mathbf{(8)}$$

(8) өрнектің сол жағын оң жаққа өткізейік

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{dL}{dt}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L\right)=0 \quad (9)$$

тек тұрақты шаманың туындысы 0-ге тең болғандықтан, (9)өрнектегі туынды астындағы өрнек тұрақты болады деген қорытынды жасаймыз.

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L=const \quad (10)$$

(10)өрнекті қандай да Е деген шамамен белгілейді және **жүйенің толық энергиясы** деп аталады.

$$E=\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = const \left(10¿\right)$$

Сонда тұйықталған жүйеде жүйенің толық энергиясы өзгермейді тұрақты болып қалады. Бұл тұжырым **энергияның сақталу заңы** деп аталады.

Энергияның сақталу заңы тұйықталған жүйемен қатар тұрақты сыртқы өрістегі жүйелер үшінде орындалады. Сыртқы тұрақты өрістегі механикалық жүйе консервативті жүйе деп аталады.

Сонда механикалық энергияның сақталу заңы тұйықталған **консервативті жүйе** де орындалады.

Тұйықталған жүйенің Лагранж функциясы 4 лекцияның (13) формуласына сәйкес $L=\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_n)$

яғни кинетикалық және потенциалдық энергияның айырмасына тең болатынын $(10¿)$ өрнектің Lорнына апарып қойсақ

$$E=\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - (T-U) = const \qquad (11)$$

Эйлердің функциясының біртектілігі туралы әйгілі теоремасынан

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i m_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{q}_i^2 = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2} = 2T \qquad (**)$$

(**) өрнекті (11)өрнекке қойсақ

$$E=2T-(T-U)=2T-T+U=T+U$$

$$E=T+U \qquad (12)$$

Сонымен механикалық жүйенің толық энергиясы оның кинетикалық және потенциалдық энергияның қосындысына тең болады.

5.2. Кеңістіктің біртектілік қасиетінен туындайтын сақталу заңын қарастырайық.

Кеңістіктің біртектілік қасиетіне байланысты механикалық тұйықталған жүйені кеңістікте тұтастай кез-келген параллель көшіру кезінде оның механикалық қасиеті өзгермейді. Олай болса механикалық жүйені аз ғана ε қашықтықта параллель көшіргенде жүйенің Лагранж функциясы өзгермейді деп қарастырайық.

Яғни $\delta L=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial r} \delta r + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial r}$(13) себебі параллель көшіру $r_a \to r_a + \varepsilon$

Лагранж функцисы өзгермегендіктен δL=0, олай болса

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \qquad (14)$$

Лагранж теңдеуіне сәйкес

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial r_i} (15)$$

(14) -өрнекке сейкес

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} = 0 = \text{¿} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 (16)$$

Тек тұрақты шаманың туындысы 0-ге тең болғандықтан

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = const (17)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v_i} = \text{¿} const \text{¿}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v_i} = \text{¿} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \text{¿} (***)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = const (18)$$

(18)-өрнек импульстің сақталу заңының өрнегі болып табылады.

Импульстің сақталу заңы былайша тұжырымдалады:

Тұйықталған жүйеде дене импульсінің векторлық қосындысы тұрақты болады.

Сонымен

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i (19)$$

(19)өрнекпен анықталатын шама, яғни Лагранж функциясынан жалпылама жылдамдық бойынша алынған жалпылама импульс деп аталады.

Ал $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i (20)$

Яғни Лагранж функциясынан жалпылама координата бойынша алынған туынды жүйеге әсер ететін сыртқы күштің векторлық қосындысына тең болады. Бұл күш жалпылама күш деп аталады.

(19) және (20) теңдеулерді Лагранж теңдеуіне апарып қойсақ

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{¿} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} = \text{¿} \frac{d}{dt} \vec{P}_i = \vec{F}_i \text{¿} (21)$$

$$\ddot{\vec{P}}_i=\vec{F}_i(21¿)$$

(21)-өрнек **Ньютонның 2 заңының импульс бойынша жазылуы немесе динамиканың негізгі теңдеуі.**

Лекция №6. Орталық өрістегі қозғалыс

6.1. Бір өлшемді қозғалыс.
6.2. Екі дене есебі.Келтірілген масса.
6.3. Кеплер есебі.Кеплердің заңдары.
6.4. Резерфорд өрнегі

6.1. Бір өлшемді қозғалыс.

Еркіндік дәрежесі бірге тең болатын қозғалыс **бір өлшемді қозғалыс** деп аталады.
Мұндай қозғалыстың Декаарттық координатадағы Лагранж функциясы

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-U(x) \qquad (1)$$

Жүйенің кинетикалық энергиясымен потенциалдық энергиясының қосындысы **толық механикалық энергия** деп аталады.

$$E=T+U$$

$$T=E-U$$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}=E-U(x)$$

$$\dot{x}^2=\frac{2(E-U(x))}{m}$$

$$\dot{x}=\sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}$$

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}$$

$$dx=\sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}dt(2)$$