$$\ddot{\vec{P}}_i=\vec{F}_i (21¿)$$

(21)-өрнек **Ньютонның 2 заңының импульс бойынша жазылуы немесе динамиканың негізгі теңдеуі.**

Лекция №6. Орталық өрістегі қозғалыс

6.1. Бір өлшемді қозғалыс.
6.2. Екі дене есебі.Келтірілген масса.
6.3. Кеплер есебі.Кеплердің заңдары.
6.4. Резерфорд өрнегі

6.1. Бір өлшемді қозғалыс.

Еркіндік дәрежесі бірге тең болатын қозғалыс **бір өлшемді қозғалыс** деп аталады.
Мұндай қозғалыстың Декаарттық координатадағы Лагранж функциясы

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-U(x) \qquad (1)$$

Жүйенің кинетикалық энергиясымен потенциалдық энергиясының қосындысы **толық механикалық энергия** деп аталады.

$$E=T+U$$

$$T=E-U$$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}=E-U(x)$$

$$\dot{x}^2=\frac{2(E-U(x))}{m}$$

$$\dot{x}=\sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}$$

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}$$

$$dx=\sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}dt (2)$$

(2) -өрнекті интегралдайық

$$\int dx = \int \sqrt{\frac{2\left(E-U(x)\right)}{m}}\,dt$$

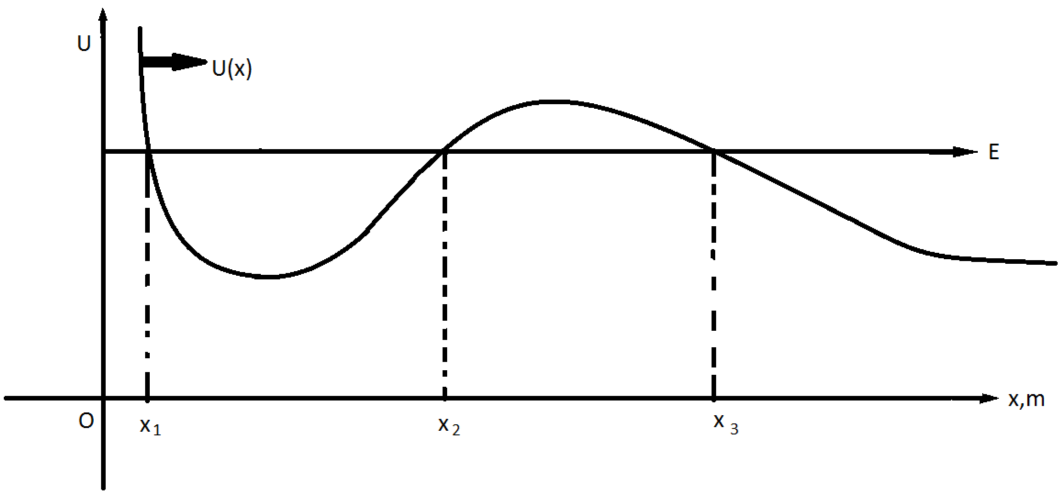
$$x = \int \sqrt{\frac{2\left(E-U(x)\right)}{m}}\,dt + const \qquad (2^{¿})$$

$(2^{¿})$ өрнек **бір өлшемді қозғалыстың қозғалыс теңдеуі** деп аталады.
Кей оқулықтарда бұл теңдеу мына түрде де жазылуы мүмкін

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2\left(E-U(x)\right)}{m}}}$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2\left(E-U(x)\right)}{m}}} + const \qquad (2^{**})$$

Осы бір өлшемді қозғалыстың ерекшеліктеріне тоқталайық:



$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = E - U(x) \quad (*)$$

Графикті аралықтарға бөліп қарастырайық:

1) $0 < x < x_1$, $U(x) > E$, олай болса $\frac{m\dot{x}^2}{2} < 0$ ал бұл мүмкін емес жүйенің кинетикалық энергиясы ешқашанда теріс мәнге ие болмайды.Олай болса, $0 < x < x_1$ классикалық жүйенің болуы мүмкін емес.

2) $x = x_1$ бұл нүктеде $U(x)$ графигі E графигімен қиылысады, яғни $U(x) = E$,бұл жағдайда $\frac{m\dot{x}^2}{2} = 0$, яғни механикалық жүйе тыныш күйде болады.

3) $x_1 < x < x_2$ бұл аралықтарда $U(x) < E$. Яғни $\frac{m\dot{x}^2}{2} > 0$. Бұл аралықта механикалық жүйе белгілі бір жылдамдықта қозғалып бара жатыр және жылдамдық айнымалы.

4) $x = x_2$ бұл нүктеде $U(x)$ графигі E графигімен қиылысады, яғни $U(x) = E$,бұл жағдайда $\frac{m\dot{x}^2}{2} = 0$, яғни механикалық жүйе тыныш күйде болады.

Сонымен мынау аралықтарда $x_1 < x < x_2$ механикалық жүйе екі жағынан шектелген қозғалысқа түседі. Екі жағынан шектелген қозғалысты **финитті қозғалыс** деп аталады. Оған мысал:
Гармоникалық тербеліс, потенциалды шұңқыр шариктің қозғалысы.

5) $x_2 < x < x_3$ бұл аралықта $U(x) > E$, олай болса $\frac{m\dot{x}^2}{2} < 0$ ал бұл мүмкін емес жүйенің кинетикалық энергиясы ешқашанда теріс мәнге ие болмайды.Олай болса,$x_2 < x < x_3$ классикалық жүйенің болуы мүмкін емес.

6)$x = x_3$ бұл нүктеде $U(x)$ графигі E графигімен қиылысады, яғни $U(x) = E$,бұл жағдайда $\frac{m\dot{x}^2}{2} = 0$, яғни механикалық жүйе тыныш күйде болады.

7) $x_3 < x < \infty$ бұл аралықтарда $U(x) < E$. Яғни $\frac{m\dot{x}^2}{2} > 0$. Бұл аралықта механикалық жүйе белгілі бір жылдамдықта қозғалып бара жатыр және жылдамдық айнымалы.
Сонымен бұл аралықта тек бір жағынан шектелген қозғалысқа түсе алады. Мұндай қозғалысты **инфинитті қозғалыс** деп аталады.

6.2. Екі дене есебі. Келтірілген масса.

Классикалық механикада көп жағдайда бірнеше денеден тұратын жүйенің қозғалысын қарастыруға тура келеді. Мұндай жүйенің есебін шешкенде формальді түрде екі дене есебін алып келеді.

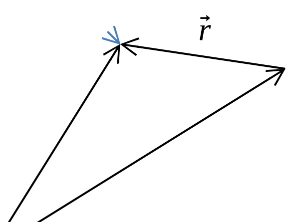
Екі денеден тұратын жүйенің есебі **екі дене есебі** деп аталады.

Екі денеден тұратын жүйенің есебін қарастырайық. Мұндай жүйенің Лагранж функциясы былайша жазылады.

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2} - U\left(\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|\right) \qquad (3)$$

Екі дененің арақашықтығы мына өрнекпен анықталады.

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad (4)$$



$\vec{r}_1$

$\vec{r}_2$

Егер координата басын инерция центріне орналастырсақ

$$0=m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2 \qquad (5)$$

(4) және (5) теңдеуді бірге шешейік:

$$\left.\begin{aligned}&\vec{r}_1-\vec{r}_2=¿\ \vec{r}\\&m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2=0\end{aligned}\right\} m_2\ \text{“}+\text{”} \qquad \begin{aligned}&m_2\vec{r}_1-m_2\vec{r}_2=m_2\vec{r} \quad ¿>¿\\&m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2=0\end{aligned}$$

$$\vec{r}_1(m_1+m_2)=m_2\vec{r}$$

$$\vec{r}_1=\frac{m_2\vec{r}}{m_1+m_2} \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}&\vec{r}_1-\vec{r}_2=¿\ \vec{r}\\&m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2=0\end{aligned}\right\} m_1\ \text{“-”} \qquad \begin{aligned}&m_1\vec{r}_1-m_1\vec{r}_2=¿\ m_1\vec{r} \quad ¿>¿\\&m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2=0\end{aligned}$$

$$-\vec{r}_2(m_1+m_2)=m_1\vec{r}$$

$$\vec{r}_2=\frac{-m_1\vec{r}}{m_1+m_2} \qquad (7)$$

(6) *және* (7) өрнекті (3) өрнекке апарып қоямыз

$$L=\frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2(\dot{r}^2+\frac{m_2}{2}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\dot{r}^2-U\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|\right)$$

$$L=\left(\frac{m_1m_2{}^2}{2}+\frac{m_2m_1{}^2}{2}\right)\frac{\dot{r}^2}{(m_1+m_2)^2}-U\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|\right)$$

$$L=\frac{m_1m_2}{2}(m_1+m_2)\frac{\dot{r}^2}{(m_1+m_2)^2}-U\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|\right)$$

$$L = ¿ \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} \dot{r}^2 - U(\vec{r}) \qquad (8)$$

(8)- өрнектен $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = M$ – **келтірілген масса** деп аталады.

Сонымен **екі денеден тұратын жүйенің Лагранж функциясы**

$$L = \frac{M}{2} \dot{r}^2 - U(\vec{r})$$

6.3. Кеплер есебі.

Екі дене есебіне мысал ретінде келесідей жағдайды қарастыруға болады.

1) Орталық тартылыс өрісінде қозғалатын материалдық нүктенің қозғалысы, яғни күнді айнала қозғалған планеталардың қозғалысы, ядроны айнала қозғалған электронның қозғалысы. (Кеплер заңдары)

2) орталық тебіліс өрісінен шашыраған бөлшектердің қозғалысы, яғни ядроны α бөлшекпен атқылаған кездегі бөлшектің шашырау құбылысы. (Резерфорд)

Орталық өрістің қасиеттерін қарастырайық.

Орталық өріс деп потенциалдық энергиясы центр деп аталатын нүктеден ара қашықтыққа ($\vec{r} - ге$) ғана тәуелді болатын өрісті айтады.

Орталық өрістегі қозғалысын бөлшекке әсер ететін күш мына өрнекпен анықталады.

$$\vec{F} = -\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \qquad (10)$$

Бұл күштің шамасы тек $\vec{r}$ ғана тәуелді, ал бағыты әрбір нүктеде $\vec{r}$ радиус вектор бойымен бағытталады.

Орталық өрістегі өріс центріне қатысты айналмалы қозғалыс жасайтын бөлшектің импульс моменті былай анықталады.

$$\vec{M} = ¿ [\vec{r}\,\vec{p}] \qquad (11)$$

$\vec{M}, \vec{r}$ векторлары өзара перпендикуляр болғандықтан және импульс моментінің сақталу заңына сәйкес $\vec{M}$**=const** болғандықтан, орталық өріс қозғалысын бөлшектердің қозғалысы бір жазықтықта жатады деген қорытынды жасауға болады. Сондықтан мұндай қозғалысты **полярлы кординатада** қарастырған ыңғайлы. Сонымен орталық өрісте қозғалған бөлшектердің қозғалыс траекториясы бір жазықтықта жатады. Полярлық координатада бұл бөлшектің күйін сипаттайтын Лагранж функциясы

$\vec{\vartheta} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{k}$ – цилиндрлік координатадағы жылдамдық.

Егер, z =0 болса, онда полярлық координатадағы қозғалыс, яғни

$$\vec{\vartheta} = \dot{\rho}\,\vec{e}_{\rho} + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_{\varphi} \qquad (12)$$

Сонда Лагранж функциясы

$$\mathbf{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho} + \rho\dot{\varphi}\right)^2 - \mathbf{u}\,(\vec{r}) \qquad (13)$$

Орталық өрісте қозғалған бөлшектің қозғалысын сипаттайтын Лагранж функциясы, $\rho = r$ деп қарастырайық.

$$\mathbf{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2\right) - \mathbf{u} \qquad (13¿)$$

(13¿) өрнектен орталық өрісте қозғалған бөлшектің Лагранж функциясы φ –ға ашық түрде тәуелді емес. Мұндай жағдайда Лагранж функциясын **циклдік** функция деп атайды.

Лагранж теңдеуі

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = ¿\ \mathbf{0} \qquad (¿)$$

Лагранж функциясынан жалпылама жылдамдық бойынша алынған туынды жалпылама импульсті береді.

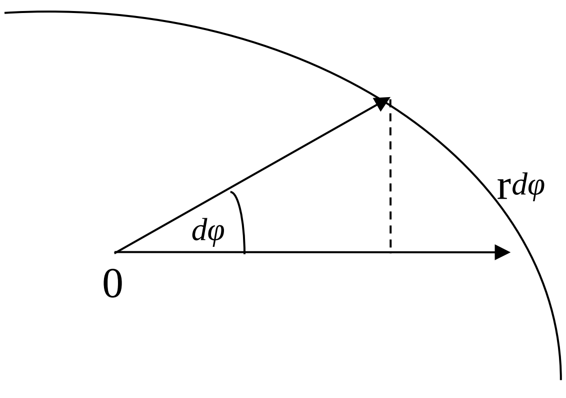
$$P_{\vartheta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial\left(\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - u\right)}{\partial \vartheta_i} = \mathrm{m}\,\dot{r}$$

$$P_{\varphi} = ¿\ \mathbf{m} r^2\,\dot{\varphi} \qquad (14)$$

(14)өрнектен импульс моментінің сақталу заңын жазуға болады.

$$\mathbf{m} r^2\,\dot{\varphi} = \mathbf{const} \qquad (15)$$

Бөлшектің қозғалысы бір жазықтықта жататындықтан келесідей геометриялық түрлендіру жазуға болады.



Бұл жағдайда секторлық жылдамдық

$$\mathbf{d}f = \frac{1}{2}\,\mathbf{r}\ \mathbf{r}\ \mathbf{d}\varphi$$

Оны импульс моментінің өрнегіне қойсақ

$$\mathbf{M= 2md}\boldsymbol{f} \qquad (16)$$

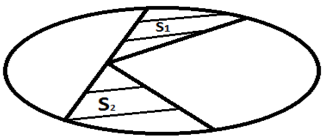
Кеплердің екінші заңының өрнегі болып табылады.

Ол былайша тұжырымдалады: орталық өрісте қозғалған бөлшектің секторлық жылдамдығы **const** болады.

$$\mathbf{M= 2md}\boldsymbol{f}\mathbf{= const}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{f}\mathbf{= \; const} \qquad (16¿)$$

Жалпы физика курсында Кеплердің екінші заңы былайша тұжырымдалатын еді. Планетаның күнге қатысты орнын анықтайтын радиус вектор тең уақыт аралығында тең ауданшалар сызып өтеді.



Бөлшектердің орталық өрістегі қозғалысын толық шешу үшін энергияның және импульстің сақталу қолдануымыз керек.

$$\mathbf{M = m}r^2\,\dot{\varphi} \qquad \dot{\varphi}=\frac{M}{mr^2} \qquad (17)$$

(17)→ (13¿)

$$\mathbf{E} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\left(\frac{M}{mr^2}\right)^2\right) + \mathbf{u} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + \mathbf{u} \qquad (17¿)$$

М- импульс моменті

$\dot{r}$- тапсақ

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{M^2}{2mr^2}-u\right)} = \sqrt{\frac{2}{m}[E-u]-\frac{M^2}{m^2r^2})}$$

$$\mathbf{dt} = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-u]-\frac{M^2}{m^2r^2})}} \qquad (18)$$

$$\dot{\varphi}=\frac{M}{mr^2} \quad \frac{d\varphi}{dt}=\text{¿}\,\frac{M}{mr^2} \quad \mathbf{d}\varphi = \frac{M}{mr^2}\,\mathbf{dt} \qquad (19)$$

(18)→ (19) қойсақ, кейін интегралдайық

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{M}{mr^2}\,\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-u]-\frac{M^2}{m^2r^2})}} = \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-u]-\frac{M^2}{r^2})}} \qquad (19^{\text{¿}})$$

Интегралдайық

$$\varphi=\int\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-u]-\frac{M^2}{r^2})}} + \mathbf{const} \qquad (20)$$

(20) өрнек r $жәнe\,\varphi$ координаталардың арасындағы байланысты тағайындайды, яғни орталық өрістегі қозғалған бөлшектің траекториясының теңдеуі болып табылады.

($17^{\text{¿}}$) өрнекті

$$E=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2mr}+U(\vec{r})$$

$$U_{эф}=U(\vec{r})+\frac{M^2}{2mr^2} \qquad (21)$$

Орталық өрістегі қозғалған бөлшектің қозғалыс ерекшеліктеріне байланысты пайда болатын **эффективтік**(әсерлік) **потенциялдық энергия** деп аталады.

Мұндағы:

$\frac{M^2}{2mr^2}-$ **центрден тепкіш энергия** деп аталады.

Орталық өрістегі бөлшектің қозғалыс кезіндегі бөлшек өрістің центріне белгілі бір қашықтыққа дейін жақындай алады және белгілі бір қашықтықтан алыстай алмайды.

Орталық өрістегі қозғалған бөлшектің потенциялдық энергиясы:

$$\mathbf{U}=\pm\frac{L}{r}$$

“+” егер өріс тебіліс болса

“-” егер өріс тартылыс болса

Егер орталық өріс тартылыс өрісі болса (гравитациялық өріс) потенциалдық энергияның радиус-векторға тәуелділігі мына өрнекпен сипатталады.

$$U=-\frac{L}{r} \qquad (\text{¿}*\text{¿})$$

$(¿*¿) \rightarrow (21)$

$$U_{эф} = -\frac{L}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \qquad (22)$$

Суреттен көрініп тұрғандай

$r \rightarrow 0$ онда $U_{эф} \rightarrow \infty$

$r \rightarrow \infty$ онда $U_{эф} \rightarrow 0$

r= $\frac{M^2}{Lm}$ $(U_{эф})_{min}$- ең кіші мәнге ие болады.Олай болса осы мәнді (22) өрнекке қойсақ.

$$\left(U_{эф}\right)_{\min} = -\frac{L}{\frac{M^2}{mL}} + \frac{M^2}{2mM^4 \over m^2 L^2} = -\frac{mL^2}{2M^2}$$

$$\left(U_{эф}\right)_{\min} = -\frac{mL^2}{2M^2} \qquad (23)$$

(23) өрнекті (20) өрнекке қойып,сөйтіп интегралдағанда

$$\phi = arc\cos\frac{\frac{M}{r} - \frac{mL}{M}}{\sqrt{2mE - \frac{m^2L^2}{M^2}}} + const \qquad (24)$$

$\phi-$ді табу үшін const=0 деп және $\frac{M^2}{mL} = p$ $\sqrt{1 + \frac{2EM^2}{mL^2}} = e$ деп белгілеулер жүргізсек (24) мынадай түрге келеді.

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\phi \qquad (25)$$

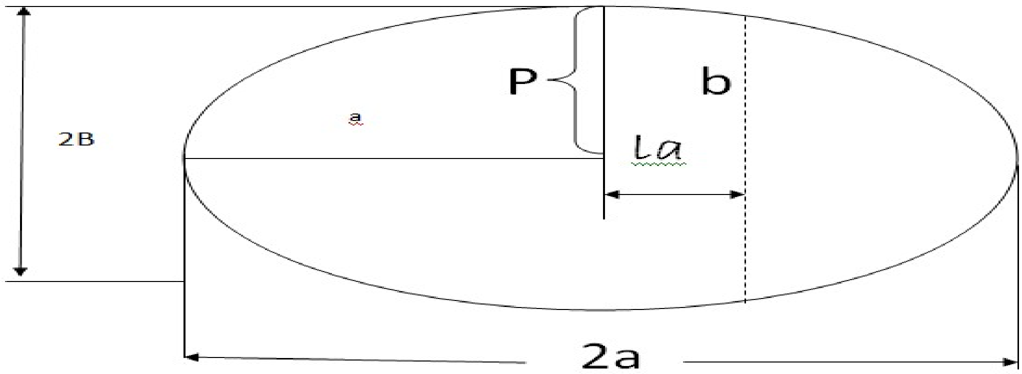
(25) теңдеу жоғары математика курсынан белгілі 2-ретті қисық сызықты эллипстің теңдеуі, канодикалық қима теңдеуі болып табылады.

Мұндағы: p-эллипстің параметірі, e-орбитаның экстрецинтет деп аталады.

Егер $\phi-$координата басына сәйкес келсе $(\phi = 0)$ $\frac{p}{r} = 0$ ол эллипске жақын жатқан нүкте фокус деп аталады.

(25) теңдеуден Кеплердің 1-заңы тұжырымдалады. Орталық өрісте қозғалған бөлшектің траекториясы эллипс болып табылады, өрістің центрі эллипстің бір фокусына орналасады. Жалпы физикада Кеплердің 1-заңы былайша айтылады

Әрбір планета күнді эллипс траекториямен айналады, эллипстің бір фокусына күн орналасады.



Келлердің III заңын қарастырайық:

Ол үшін аналитикалық геометриядан белгілі эллипстің жарты осі:

$$\mathbf{a}=\frac{p}{1-e^2}=\frac{\frac{M^2}{mL}}{1-(1+\frac{2EM^2}{mL^2})}=-\frac{\frac{M^2}{mL}}{\frac{2EM^2}{mL^2}}=\frac{-L}{2E}$$

$$\mathbf{a}=\frac{-L}{2E} \qquad (26)$$

$$\mathbf{a}=\frac{L}{2\vee E\vee ¿¿} \qquad (26^{¿})$$

Эллипстің кіші жарты осі

$$b=\frac{P}{\sqrt{|1-e^2|}}=\frac{M}{\sqrt{2m\vee E\vee ¿¿}} \qquad (27)$$

$$r_{min}=\frac{P}{1+e}=\text{a}\,(1\text{-e})$$

$$r_{max}=\frac{P}{1-e}=\text{a}\,(1\text{+e})$$

Импульстің сақталу заңына сәйкес

$$\mathbf{M= 2md}\boldsymbol{f} \qquad 2\,\mathrm{mf}=\mathrm{TM} \qquad (28)$$

$$\mathbf{T}=\frac{2mf}{M}$$

$f=\pi ab$ -эллипс орбитасының ауданы

$\mathbf{M= b}\ \sqrt{2m\vee E\vee ¿¿}$

$$\mathbf{T}=\frac{2m\pi ab}{b\sqrt{2m\vee E\vee ¿¿}}=\frac{\pi a\sqrt{4m^2}}{\sqrt{2m\vee E\vee ¿¿}}=\pi a\sqrt{\frac{2m}{¿E\vee ¿}}¿$$

$$T^2=¿\ \pi^2a^2\sqrt{\frac{2m}{¿E\vee ¿}}¿=\pi^2a^2\sqrt{\frac{2m}{¿E\vee ¿}}¿\ \frac{2L}{2L}=\frac{4\pi^2m}{L}\ a^2\frac{L}{2\vee E\vee ¿¿}=\frac{4\pi^2m}{L}\ a^3$$

$$T^2=¿\ \frac{4\pi^2m}{L}\ a^3 \qquad (29)$$

$T^2\ \ a^3$

(29) тендеу **Кеплердің III заңы** болып табылады.
Ол былайша тұжырымдалады:
Орталық өрісте айнала қозғалған бөлшектің периодтарының квадраты оның үлкен жарты осінің кубына тура пропорционал.

Жалпы физикада бұл заң былайша айтылады.
Планеталардын күнді айналу периодтарының квадраттарының қатынасы олардың үлкен жарты осінің кубтарының қатынасындай болады.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}$$

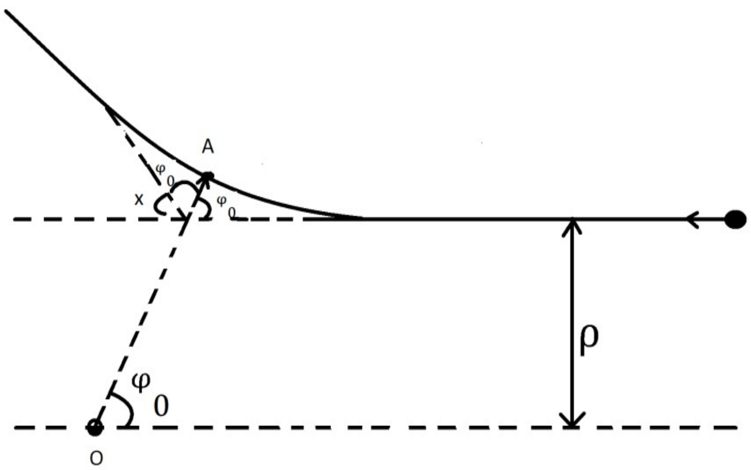
6.4. Ортақ тербеліс өрісіндегі бөлшектің қозғалысына кулондық өрісте тебілген бөлшектің қозғалысын, яғни бөлшектің шашырауына мысал ретінде қарастырамыз.

Тебіліс өрісінде потенциалдық энергия

$$U=\frac{\alpha}{r} \qquad (*)$$

Олай болса $$U_{эф}=\frac{\alpha}{r}+\frac{M}{2mr^2} \qquad (****)$$

Ортақ тебіліс өрісінде бөлшектің қозғалысына мысал ретінде Резерфордтың α бөлшекпен атомды атқылау тәжірибесін алуға болады.Осы жағдайларды қарастырайық.



Суреттегі ρ-нысанаға алу қашықтығы.

X=$|\pi-2\varphi_0|$-шашырау немесе ауытқу бұрышы деп аталады.

Ал, φ_0-орталық өрісте қозғалған бөлшектердің траекториясын анықтайтын функция. Ол (20) өрнекпен анықталады:

$$\varphi_0=\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U]-\frac{M^2}{r^2}}} \qquad (20)$$

$r_{min}=|OA|$-бөлшектің орталық центрге ең жақын келу қашықтығы

Бөлшектің толық энергиясы шексіздікте максимал кинетикалық энергияға тең болатынын $E=\frac{m\vartheta_\infty^2}{2}$ ал импульс моменті $M=m\rho\vartheta_\infty$

Осыны ескерсек

$$\varphi_0=\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{\frac{m\rho\vartheta_\infty}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[\frac{m\vartheta_\infty^2}{2}-U\right]-\frac{m^2\rho^{2\vartheta_\infty^2}}{r^2}}}=\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{\frac{m\rho\vartheta_\infty}{r^2}dr}{\sqrt{m^2\vartheta_\infty^2-2mU-\frac{m^2\vartheta_\infty^2}{r^2}\rho}}=\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{\rho\frac{m\vartheta_{\infty dr}^2}{r^2}}{\sqrt{m^2\vartheta_\infty^2\left(1-\frac{2U}{m\vartheta_\infty^2}-\frac{\rho^2}{r^2}\right)}}=\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1-\frac{2U}{m\vartheta_\infty^2}-\frac{\rho^2}{r^2}}}$$

Яғни: $$\varphi_0=\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1-\frac{2U}{m\vartheta_\infty^2}-\frac{\rho^2}{r^2}}} \qquad (1)$$

(1)-**ортақ тебіліс өрісінде қозғалған бөлшектің траекториясының теңдеуі.**

(1) өрнектің физикалық мағынасын ашу үшін 1 бөлшектің шашырауы емес, бөлшектер ағынының орталық тебіліс өрісінен шашырауын қарастырайық. Ол үшін бөлшектің ағынының эффективті қимасы деген түсінік енгізеді.

Бөлшектер шоғырының әрқайсысының нысанаға алу қашықтығы әртүрлі болғандықтан әрбір бөлшектердің шашырау бұрыштары да әртүрлі болады.

Шашырау бүрыштарының нысанаға алу қашықтығына тәуелділігін анықтау үшін бөлшектер шоғырынының ішінен dN бөлшектерді бөліп қарастырайық. Олардың шашырау бұрышы χ мен χ+dχ арақашықтықта жатсын. Сонда $\frac{dN}{n}=d\sigma-¿$бөлшектер ағының бірлік уақытта бірлік көлденең қимасы арқылы өтетін бөлшектер ағынының эффективті қимасы немесе өлшем бірлігі $м^2$ болатын шашыраудың эффективті қимасы.

n-бөлшектер ағынының көлденең қимасының бірлік ауданы арқылы 1 сек өтетін бөлшектер саны, яғни χ+dχ арақашықтықта нысанаға алу қашықтығы $\rho+d\rho$ аралықта жататын бөлшектер саны. Сонда

$$d\sigma=\frac{dN}{n}=2\pi\rho d\rho \qquad (2)$$

$$dN=2\pi\rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| \qquad (3)$$

(3) өрнек эффективті қиманың бөлшектерінің өріс центрнен шашырау бұрышына тәуелділік өрнегі деп аталады.

(3) өрнектің негізінде Резерфорд өрнегін қорытайық. Ол үшін тебіліс өрнегінің потенциалдық энергиясы $U=\frac{\alpha}{r}$ екендігін ескеріп (1) өрнекті интегралдайық, сонда

$$\varphi_0=\arccos\frac{\frac{\alpha}{m\vartheta_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{m\vartheta_\infty^2\rho}\right)^2}} \qquad (4)$$

Бұл өрнектен

$$\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2\vartheta_\infty^4}tg^2\varphi_0 \qquad (5)$$

$\chi=|\pi-2\varphi_0|=>\varphi_0=\frac{\pi-\chi}{2}$ *екендігін ескерсек*

$\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2\vartheta_\infty^4}tg^2\frac{(\pi-\chi)}{2}=\frac{\alpha^2}{m^2\vartheta_\infty^4}ctg^2\frac{\chi}{2}$ *соңымен*

$$\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2\vartheta_\infty^4}ctg^2\frac{\chi}{2} \qquad (6)$$

(6) өрнекті (3) өрнекке қойып оны дифференциялдайық

$$d\sigma=\pi\left(\frac{\alpha}{m\vartheta_\infty^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^2\left(\frac{\chi}{2}\right)}d\chi \qquad (7)$$

(7) өрнек **Резерфорд өрнегі** деп аталады.