№7 лекция. Механиалық жүйенің тербелмелі қозғалысы.

7.1.Бір өлшемді тербеліс

7.2.Еріксіз тербелістер

7.3.Өшетін тербелістер

7.4. тИнерциалды емес санақ жүйесіндегі қозғалыс.

7.1. Механикалық қозғалыс ішінде ең көп тараған қозғалыстың түрі тепе-теңдік қалыптың маңайында бірдей уақыт ішінде периодты түрде қайталанып отыратын қозғалыс-**еркін бір өлшемді тербеліс** болып табылады.Осындай қозғалыс заңдарын тағайындайық.

Бір өлшемді жағдайда жүйенің Лагранж функциясы мына түрде жазылады:

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2} \qquad (1)$$

(1) Өрнектен x бойынша алынған туынды қозғалыс теңдеуін береді.

$$\mathbf{m\ddot{x}+kx=0} \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=¿\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}\right)'_{\dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}\right)'_{x} = -kx$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -kx$$

$$m\ddot{x}+kx=0$$

(2) Теңдеудің екі жағында m –ға бөлейік.

$\ddot{x}$ + $\frac{k}{m}$ **x =0** (3)

$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - тербелістің циклдік жиілігі деп аталады.

Сонда:

$\ddot{x}$ + ω^2 **x =0** (3¿)

(3¿) өрнек **бір өлшемді тербелістің дифференциялдық теңдеуі.** Бұл теңдеу **екінші реттік дифференциялдық теңдеу** болып табылады.Оның жалпы шешімі математикада толық анықталып қойылған,сондықтан оны бірден жазуға болады.

x=$c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$

x = A$\sin\omega t + \varphi_0$ (4)

(3) Өрнектен тепе-теңдік қалыптан аз ғана бұрышқа ауытқытылған механикалық жүйенің тербелісі **гармоникалық тербеліс** екендігін көруге болады.

c_1 , c_2- тұрақтылар , A –тербеліс амплитудасы.

*Тер*белістің амплитудасы деп – тепе- теңдіктен ең үлкен ауытқуды айтады.

Гармоникалық тербеліс жасайтын жүйенің жылдамдығғын анықтау үшін (4) теңдеулер жүйесіндегі екінші теңдеуден туынды аламыз.

$\vartheta = \dot{x} = \omega \mathbf{A} \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega \mathbf{A} \sin(\frac{\pi}{2} - (\omega t + \varphi_0))$

*Сон*ымен,

$\vartheta = \omega \mathbf{A} \sin(\frac{\pi}{2} - (\omega t + \varphi_0))$ (5)

(5)өрнектен көрініп тұрғандай гармониалық тербеліс жасайтын материалдық нүктенің жылдамдығы ығысудан (x) бойынша $\frac{\pi}{2}$ озады.

(5)теңдеуді ω**A**=ϑ_{max} – жылдамдықтың амплитудасы.

Гармоникалық тербеліс жасайтын материалдық нүктенің үдеуін анықтайық.Ол үшін

a =$\ddot{x}$ = - ω^2**A** $(\sin\omega t + \varphi_0)$ (6)

a_{max}=- ω^2**A** –үдеудің ең үлкен мәні.

Гармоникалық тербеліс жасайтын материалдық нүктенің толық механикалық энергиясын анықтайық.

$\mathbf{E} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\omega A\cos(\omega t + \varphi_0)^2) + \frac{k}{2}(A(\sin\omega t + \varphi_0)^2) = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{m\omega^2 A^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{m\omega^2 A^2}{2}(\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0))$

$$\mathbf{E} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \qquad (7)$$

Бір өлшемді тербеліс жасайтын материалдық нүктенің толық механикалық энергиясы.

7.2.Тербеліс жасайтын жүйеге сырттан периодты түрде өзгеретін өріс әсер етсін.Мұндай тербеліс **еріксіз тербеліс** деп аталады.

Еріксіз тербеліс деп сыртқы периодты түрде өзгеретін өрістің әсерінен жасалатын тербелісті айтады.

Бір өлшемді жағдайда еріксіз тербеліс жасайтын механикалық жүйенің Лагранж функциясы мына түрде жазылады.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + \mathbf{x\,F(t)} \qquad (8)$$

*Лагран*ж теңдеуінен еріксіз тербелістің қозғалыс теңдеуін жазуға болады.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \qquad (¿)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \mathbf{m}\dot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= ¿\mathbf{-kx + F(t)} \end{aligned}\right\} \qquad (¿*¿)$$

(¿*¿) → (¿) қойсақ

$$\mathbf{m}\ddot{x} + \mathbf{kx = F(t)} \qquad (9)$$

(9) өрнек еріксіз тербелістің қозғалыс теңдеуі.

Әрқайсысын m – ға бөлейік.

$$\ddot{x} + \omega^2\mathbf{x} = \frac{F(t)}{m} \qquad (9^{¿})$$

($9^{¿}$) өрнек еріксіз тербелістің дифференциалдық теңдеуі деп аталады.Бұл да екінші реттік сызықтық теңдеу.Оның жалпы шешімі математика курсынан белгілі,былайша жазылады.

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{f}{m(\omega^2\gamma^2)}\cos(\gamma t + \beta) \qquad (10)$$

(10) өрнек еріксіз тербелістің теңдеуі.

Еріксіз тербеліс жасайтын жүйенің толық энергиясы мына түрде жазылады.

$$\mathbf{E} = \frac{m}{2}\left(\dot{x} + \omega^2 x^2\right) \qquad (11)$$

7.3.Энергиясы уақыт өтуімен кемитін тербелістер **өшетін тербелістер** деп аталады.Өшетін тербеліс кезінде тек тербеліс жылдамдығына ғана тәуелді болатын кедергі күші жүйеге әсер етеді.Ол үйкеліс күші

$$F_{үйк} = -\alpha\,\dot{x} \qquad (1)$$

α- үйкеліс коэффициенті , мәні оң сан қабылдайды, - таңба үйкеліс күшінің жылдамдығына қарсы екендігін көрсетеді.Сонымен өшетін тербелістің қозғалыс теңдеуі.

$$\mathbf{m}\ddot{x} = -\mathbf{kx} - \alpha\dot{x} \quad (2)$$

(2)теңдеудің оң жағын солға қарай өткізіп, m-ға бөлейік.

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (3)$$

Мұндағы :$\frac{k}{m} = \omega_0^2$ –еріксіз тербелістің циклдік жиілігі.

$\frac{\alpha}{m} = 2\lambda$ $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ – өшу коэффициенті деп аталатын пропорционалдық коэффициент.

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (3^{¿})$$

($3^{¿}$)өрнек **өшетін тербелістің дифференциялдық теңдеуі** деп аталады.Оның жалпы шешімі мына түрде жазылады.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha)$$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ - өшетін тербелістің циклдік жиілігі.

7.4. Осы уақытқа дейін қарастырылған қозғалыс инерциалды санақ жүйесіндегі (ИСЖ) қозғалыс болса, енді инерциалды емес санақ жүйесіндегі қозғалысты (ИЕСЖ) қарастырайық.

Инерциалды емес санақ жүйесі (ИЕСЖ) –бақылаушыға қатысты үдеумен қозғалған денеге бекітілген санақ жүйесі.

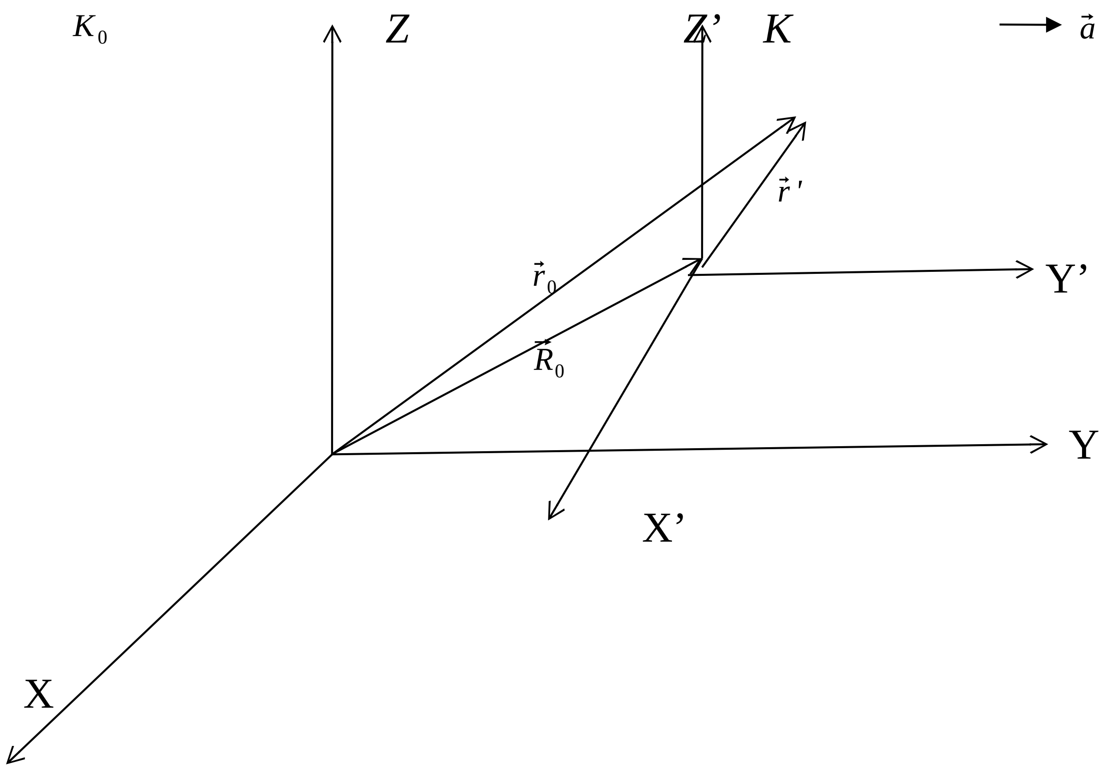
Салыстыру үшін инерциалды санақ жүйесіндегі бір бөлшектің сыртқы өрістегі күйін сипаттайтын Лагранж функциясы.

(1) $L_0 = \frac{m\vartheta_0^2}{2} - u$**, ал оған сәйкес келетін қозғалыс теңдеуі**

$m\frac{d\vec{\vartheta}_0}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial r}$ (2)

Инерциалды емес санақ жүйесіндегі бөлшектің сыртқы өрістегі қозғалыс теңдеуі, яғни Лагранж теңдеуін жазайық.

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \frac{\partial L}{\partial r}$ (3)



Суреттен көрініп тұрғандай жылдамдықтарды қосу заңына сәйкес

$\vec{r}_0 = \vec{r}\,' + \vec{R}_0$ **(4)** $\vec{\vartheta}_0 = (\vec{r}_0)' = \vec{\vartheta}\,' + \vec{\vartheta}(t)$ (5)

(5)¿>¿(1)

$L' = \frac{m}{2}(\vec{\vartheta}\,' + \vec{\vartheta}(t))^2 - u(\vec{r})$

$L' = \frac{m\vartheta'^2}{2} + m\vec{\vartheta}\,'\vec{\vartheta}(t) + \frac{(\vec{v}(t))^2 m}{2} - u(\vec{r})$ (6)

(6) өрнектің оң жағындағы 3 құраушадағы $(\vec{v}(t))^2$ уақыттың толық дифференциалы болғандықтан Лагранж функциясының қасиетіне сәйкес қалдырып жазуға болады. Яғни,

$L' ¿ \frac{m\vartheta'^2}{2} + m\vec{\vartheta}\,'\vec{\vartheta}(t) - u$ (6*)

Бұл өрнектегі оң жақтағы екінші құраушыны түрлендірейік.

$$m\vec{\vartheta}(t)\,\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \left| \frac{d\left(m\vec{v}(t)\vec{r}\,'\right)}{dt} = m\vec{v}(t)\frac{d\vec{r}\,'}{dt} + m\vec{r}\,'\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right| = \frac{d\left(m\vec{v}(t)\vec{r}\,'\right)}{dt} - m\vec{r}\,'\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \qquad (7)$$

(7) өрнекті (6*) апарып қойып, оның оң жағындағы бірінші бастапқы құраушыны уақыт бойынша толық дифференциал болғандықтан, Лагранж функциясын тастап жазайық.

$$L'¿\frac{m\vartheta'^2}{2} - m\vec{r}\,'\vec{a} - u \qquad (8)$$

(8) өрнектен Лагранж теңдеуіне (3теңдеу) көшейік.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \vartheta'} = \frac{\partial L'}{\partial r'} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial \vartheta'} &= m\vec{\vartheta}' \\ \frac{\partial L'}{\partial r'} &= -m\vec{a} \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial r'} = -m\vec{a} - \frac{\partial u}{\partial r'}$$

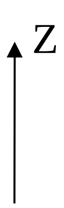
$(**) \rightarrow (9)$

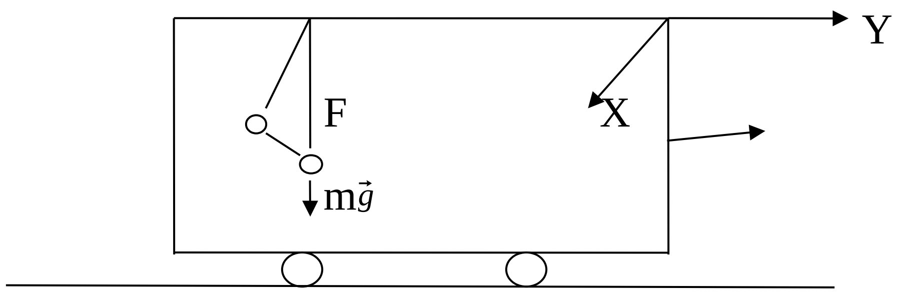
$$-m\frac{d\vartheta'}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial r'} - m\vec{a}$$

(10) өрнекті (2) өрнекпен салыстырайық: Инерциалды санақ жүйесіндегі бөлшектің қозғалысынан инерциалды емес санақ жүйесіндегі бөлшектің қозғалысының айырмашылығы қосымша $-m\vec{a}$ деген күш пайда болады. Бұл күш инерция күші деп аталады.

$$\vec{F}_u = -m\vec{a}$$

Сонымен ілгерлемелі (түзусызықты) әрі үдемелі қозғалып бара жатқан инерциалды емес санақ жүйесінде инерция күші деп аталатын күш пайда болады. Жалпы физиканың механика курсында:





$\vec{F}_u = -m\vec{a}$ (10)

Ньютон заңдары инерциалды санақ жүйесінде орындалады.

Енді инерциалды емес санақ жүйесінде инерциалды санақ жүйесіне қатысты ω бұрыштық жылдамдықпен айналмалы қозғалысқа түссін; әрі ілгерлемелі қозғалысқа түссін. Бұл жағдайда жылдамдықтарды қосу заңы.

$\vec{\vartheta}' = \vec{\vartheta}\boldsymbol{(t)} + \vec{¿¿}$ (11)

(11) өрнекті (8) өрнекке қойсақ.

$L_0 = \frac{m\vartheta_0^2}{2} - u - \vec{m}r'\vec{\alpha}$

$L_0 = m(\vec{\vartheta}(t) + ¿¿ - u(\vec{r}') - m\vec{\alpha}\vec{r}$

$L_0 = \frac{m}{2}(\vec{\vartheta}\boldsymbol{(t)})^2 + \boldsymbol{m}\vec{\vartheta}\boldsymbol{(t)}\vec{¿¿} + \frac{m}{2}¿ - \boldsymbol{u}(\vec{r}') - \boldsymbol{m}\vec{\alpha}\vec{r}$ (12)

Лагранж функциясынан (12) өрнектен толық дифференциал алайық.

$dL' = m\vec{\vartheta}d\vec{\vartheta} + m\vec{\vartheta}(t)d\vec{¿¿} + m\vec{¿¿}d\vec{\vartheta}(t) + m[\vec{\omega}\vec{r}]d[\vec{\omega}\vec{r}] - ¿m\vec{\alpha}d\vec{r} - \frac{\partial u}{\partial r}$

$\boldsymbol{dL' = m\vec{\vartheta}d\vec{\vartheta} + md\vec{\vartheta}\vec{¿¿} + md\vec{r}[\vec{\vartheta}(t)\vec{\omega}¿ + m[\vec{¿¿}d\vec{r} - m\vec{\alpha}d\vec{r}} - \frac{\partial u}{\partial r}dr$ (13)

(13)теңдеуді dϑ және dr бойынша топтайық.

$\boldsymbol{dL' = (m\vec{\vartheta} + m[\vec{\omega}\vec{r}])\, d\vec{\vartheta} + (m[\vec{\vartheta}\vec{\omega}¿ + m\, [\vec{¿¿}] - m\, \vec{\alpha})\, dr} - \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{)d\vec{r}}$ (13*)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L'}{\partial \vartheta} = m\vec{\vartheta} + m[\vec{\omega}\vec{r}] \\ &\frac{\partial L'}{\partial r} = m[\vec{\vartheta}\vec{\omega}¿ + m[\ \overrightarrow{[\omega¿r¿¿\vec{\omega}] - ¿¿}\ m\vec{\alpha} - \frac{\partial u}{\partial r} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

(14) теңдеуді Лагранж теңдеуіне қойсақ.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \frac{\partial L}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{m}\vec{\vartheta} + \mathbf{m}[\vec{\omega}\vec{r}]\right) = \mathbf{m}[\vec{\vartheta}\vec{\omega}¿ + \mathbf{m}\,[\vec{¿¿}] - \mathbf{m}\,\vec{\alpha} - \frac{\partial u}{\partial r} \quad (15)$$

$$m\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} + m\frac{d[\vec{\omega}\vec{r}]}{dt} = m[\vec{\vartheta}\vec{\omega}¿ + m[\vec{\vartheta}\vec{\omega}¿\; m\,\vec{\alpha})\; dr - \frac{\partial u}{\partial r} \quad (15^*)$$

$$m\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} + m\frac{d[\vec{\omega}\vec{r}]}{dt} + m[\vec{\omega}\,\frac{d\vec{r}}{dt}] = m[\vec{\vartheta}\vec{\omega}¿ + m\,[\vec{¿¿}] - m\,\vec{\alpha} - \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$m\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial r} - m\,\vec{\alpha} + m[\vec{r}\,\vec{\varepsilon}] + m[\vec{\vartheta}\vec{\omega}¿ + m[\vec{\vartheta}\vec{\omega}¿ + m¿$$

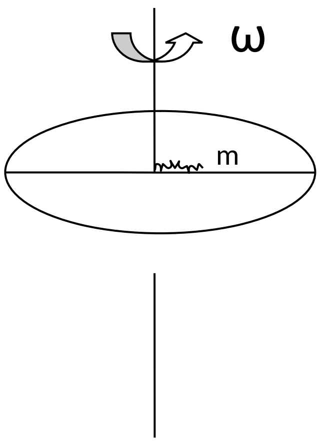
Сонымен $\boldsymbol{m\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial r} - m\,\vec{\alpha} + 2\,m[\vec{\vartheta}\vec{\omega}¿ + m[\vec{r}\,\vec{\varepsilon}¿ + ¿m¿}$

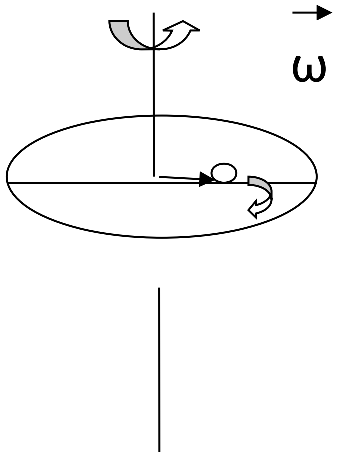
Әрі ілгерлемелі, әрі айналмалы қозғалыс жасайтын инерциалды емес санақ жүйесінде келесідей күштер пайда болады.

1) $\vec{F}_и = -\,m\,\vec{\alpha}$ – **инерция күші**
2) $\vec{F}_к = 2\,m[\vec{\vartheta}\vec{\omega}¿$- **кариолиус күші**
3) $\vec{F}_ц = m¿$-**центрден тепкіш инерция күші пайда болады.**

Егер инерциалды емес санақ жүйесінде бірқалыпты айналса, яғни $\vec{\omega}$ =const $m[\vec{r}\,\vec{\varepsilon}¿ = 0$

Жалпы физиканың механика курсында:





8 лекция. Қатты дененің динамикасы. Каноникалық теңдеулер.

8.1.Қатты дененің қозғалысының динамикасы

8.2.Қатты дененің импульс моменті

8.3.Инерция тензоры. Қатты дене қозғалысының теңдеуі

8.4.Гамильтон теңдеуі. Пуассон жақшалары.

8.1. Классикалық механикада қатты дене деп-өзара арақашықтығы өзгермейтін көптеген материалдық нүктеден тұратын жүйені айтады.2 лекциядан белгілі қатты дененің қозғалысын 2 түрге жіктеуге болады:

1 ілгерілемелі

2 айналмалы

Қатты дененің өте аз қашықтыққа ілгерілемелі қозғалысын және өте аз бұрышқа айналмалы қозғалысын қоса қарастырайық.Сонда аз ғана dR орын ауыстыру

$d\vec{R}=d\vec{R}_0+$¿ (1)