Лекция 8

## Специальная теория относительности

1. Релятивистское выражение для импульса.
2. Релятивистское выражение для энергии. Взаимосвязь массы и энергии.
3. Ядерные реакции.

### 1. Релятивистское выражение для импульса.

Второй закон Ньютона инвариантен относительно преобразований Галилея. Однако при больших скоростях движения переход из одной ИСО в другую осуществляется с помощью преобразований Лоренца. Для того, чтобы второй закон Ньютона, представленный в виде $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, оставался инвариантным относительно преобразований Лоренца, необходимо чтобы импульс определялся выражением:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{1}$$

**Величина, определяемая выражением (1), называется релятивистским импульсом**, т.е. это выражение импульса при больших скоростях. Масса не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Она является лоренцевым инвариантом. Тогда второй закон Ньютона, записанный в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = \vec{F} \tag{2}$$

инвариантен относительно преобразований Лоренца.

Таким образом, второй закон Ньютона, представленный соотношением

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{3}$$

может использоваться и в классической механике, и в теории относительности.

Из уравнения (2) вытекает, что ускорение тела не совпадает по направлению с действующей силой. Для доказательства этого утверждения преобразуем (2) так, чтобы ускорение тела было представлено отдельным членом слева, как в соотношении $md\vec{\upsilon}/dt = \vec{F}$:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \left(\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\right)\cdot\left[\vec{F} - \frac{\vec{\upsilon}}{c^2}\cdot(\vec{F},\vec{\upsilon})\right] \tag{4}$$

Соотношение (4) показывает, что **в релятивистской динамике в общем случае направления векторов ускорения $d\vec{\upsilon}/dt$ и силы $\vec{F}$ не совпадают, а их модули не пропорциональны между собой как во втором законе Ньютона в классической механике.**

Анализ уравнения (4) приводит к заключению о том, что только в двух частных случаях направление ускорения совпадает с направлением силы. Первый случай - когда сила перпендикулярна скорости $\vec{F} \perp \vec{\upsilon}$ (и $\upsilon = const$). Второй - когда сила всегда действует по направлению скорости.

В первом случае $\vec{F} \perp \vec{\upsilon} \Rightarrow \left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right) = 0$ и уравнение (4) преобразуется к виду:

$$\vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d\upsilon}{dt} = m_\perp\frac{d\upsilon}{dt} = m_\perp a_n \tag{5}$$

Величина $m_\perp$, равная

$$m_{\perp} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{6}$$

называется **поперечной массой** тела. Примером для данного случая является движение заряженной частицы с постоянной скоростью в однородном магнитном поле. Действующая на частицу сила Лоренца всегда перпендикулярна вектору скорости частицы.

Во втором случае $\frac{\vec{\upsilon}}{c^2}\cdot(\vec{F},\vec{\upsilon}) = \vec{F}\frac{\upsilon^2}{c^2}$ и формула (4) преобразуется к виду:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \left(\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\right)\cdot\left[\vec{F}-\frac{\upsilon^2}{c^2}\vec{F}\right] = \left(\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\right)\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\vec{F} \;\Rightarrow\; \vec{F} = \frac{m}{\sqrt{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^3}}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m_{\parallel}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m_{\parallel}a_{\tau}$$

здесь $a_{\tau}$ - тангенциальное ускорение. Величина $m_{\parallel}$, равная

$$m_{\parallel} = \frac{m}{\sqrt{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^3}} \tag{7}$$

называется **продольной массой** тела.

Таким образом, если силу $\vec{F}$ разложить на тангенциальную и нормальную составляющие, то можно записать:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\tau} + \vec{F}_n = m_{\parallel}\vec{a}_{\tau} + m_{\perp}\vec{a}_n \tag{8}$$

Так как в общем случае $m_{\parallel} \neq m_{\perp}$, то направление силы не совпадает с направлением ускорения $\vec{a} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_n$. Если $\upsilon << c$, то

$$\vec{F} = \vec{F}_{\tau} + \vec{F}_n = m_{\parallel}\vec{a}_{\tau} + m_{\perp}\vec{a}_n = m\vec{a}_{\tau} + m\vec{a}_n = m\left(\vec{a}_{\tau} + \vec{a}_n\right) = m\vec{a} \tag{9}$$

и тогда ускорение и сила совпадают по направлению.

Необходимо отметить, что иногда $m_{\perp}$ называют **релятивистской массой** тела. Введение понятия релятивистской массы имеет методические оправдания при изложении СТО на элементарном уровне. При этом утверждается, что релятивистская масса $m_{\perp}$ зависит от скорости по закону (6). Однако из анализа соотношения (4) видно, что даже при формальном подходе нельзя получить универсальной зависимости массы от скорости. В современной физике понятие релятивистской массы (6) обычно не используется.

## 2. Релятивистское выражение для энергии. Взаимосвязь массы и энергии.

Рассмотрим **полную и кинетическую энергии** частицы, а также так называемую **энергию покоя.** Для этого умножим скалярно правую часть уравнения (2) на $d\vec{r}$, а левую часть умножим на $\vec{\upsilon}dt$, равную $d\vec{r}$:

$$\left(\vec{\upsilon}dt,\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\right) = \left(\vec{F},d\vec{r}\right) \tag{10}$$

$$\left(\vec{\upsilon}dt,\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\right) = \left(\vec{\upsilon},d\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\right) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} + \frac{\upsilon^3 d\upsilon}{c^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}\right)$$

$$\left(\vec{\upsilon},d\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\right)=\frac{mc^2d\left(\dfrac{\upsilon^2}{c^2}\right)}{2\left(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}}=d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=dE \qquad (11)$$

Величина
$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (12)$$
называется **полной энергией** тела.

Правая часть уравнения (10) $\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=\delta A$ равна элементарной работе. Тогда уравнение (10) запишется в виде:
$$dE=\delta A \qquad (13)$$
т.е. работа совершенная силой равна изменению полной энергии тела. Полная энергия положительная величина, и в состоянии покоя она не равна нулю. При $\upsilon=0$ полная энергия называется энергией покоя тела $E_0$:
$$E_0=mc^2 \qquad (14)$$
Формула (14) устанавливает взаимосвязь энергии покоя тела и его массы и показывает, что **масса и энергия представлены в любом теле в пропорциональных количествах. Каждое изменение энергии покоя тела неизбежно сопровождается пропорциональным изменением его массы.**

В обычных масштабах энергия покоя чрезвычайно велика. В одном грамме вещества содержится около $10^{14}$ Дж энергии покоя. Пока научились извлекать лишь малую часть этой энергии (например, в ядерной энергетике).

**Энергия покоя равна внутренней энергии тела, не связанной с движением тела как целого и его взаимодействием с внешними силовыми полями.** В случае сложного тела, состоящего из многих частиц, его энергия покоя складывается из энергий покоя частиц, их кинетической энергии (обусловленной движением частиц относительно центра инерции тела) и потенциальной энергии взаимодействия частиц между собой. **Потенциальная энергия частиц во внешнем поле в энергию покоя $E_0$ не включается, так же как и в полную энергию $E$.**

Полная энергия состоит из энергии покоя и кинетической энергии. Поэтому **кинетическая энергия тела определяется как разность между полной энергией и энергией покоя:**
$$E_k=E-E_0=mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}-1\right) \qquad (15)$$
При малых скоростях движения ($\upsilon/c<<1$) выражение $1/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$ в уравнении (15) разлагается в ряд:
$$\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}=1+\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}+\ldots\approx 1+\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} \qquad (16)$$
Подставив (16) в (15) получаем классическое выражение кинетической энергии:
$$E\approx\frac{1}{2}m\upsilon^2$$

Определим полную энергию через импульс. Для этого выразим скорость $\vec{\upsilon}$ через импульс $\vec{p}$ используя формулу (1) и подставив ее (12), получим связь полной энергии и импульса:

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \quad \Rightarrow \quad E^2 - c^2p^2 = m^2c^4 \tag{17}$$

Самое примечательное в выражении (17) – это то, что в его правой части находится постоянная величина $m^2c^4$, одинаковая во всех инерциальных системах отсчета. Следовательно, и левая часть этого выражения не зависит от выбора системы отсчета. Таким образом, ***взятые раздельно энергия и импульс, различные в разных системах отсчета (т.е. величины относительные), в комбинации представляют абсолютную величину, инвариантную относительно преобразований Лоренца.*** Это означает, что при переходе из одной инерциальной системы в другую, энергия и импульс изменяются так, что величина $E^2 - c^2p^2$ остается неизменной.

Еще одно важное следствие из формулы (17) состоит в том, что при $m=0$ полная энергия тела не равна нулю: $E = p \cdot c$. Это указывает на возможность существования частиц с нулевой массой. Для них скорость движения $\upsilon$ равна скорости света в вакууме $c$. Таким образом, частицы с нулевой массой могут существовать только в движении со скоростью света (например, фотоны).

## 3. Ядерные реакции.

В теории относительности масса и энергия неразрывно связаны друг с другом, а численные характеристики этих свойств пропорциональны друг другу. Поэтому можно говорить об эквивалентности массы и энергии. Всякое изменение энергии системы сопровождается эквивалентным изменением ее массы. Это относится как к изменениям кинетической энергии тела, при которых масса покоя остается неизменной, так и к изменениям различных видов внутренней энергии, при которых масса покоя изменяется. Опыт показывает, что в громадном большинстве физических процессов, в которых изменяется внутренняя энергия, масса покоя остается неизменной. Как это согласовать с законом пропорциональности массы и энергии? Дело в том, что, как правило, подавляющая часть внутренней энергии (и соответствующей ей массы покоя) в превращениях не участвует, и поэтому определяемая взвешиванием масса покоя практически сохраняется, несмотря на то, что тело выделяет или поглощает энергию. Это объясняется просто недостаточной точностью взвешивания. Поэтому экспериментальное подтверждение релятивистского закона пропорциональности энергии и массы следует искать в ядерной физике и физике элементарных частиц. ***Для описания процессов с атомными ядрами и элементарными частицами, характерная особенность которых заключается в изменениях энергии системы, сравнимых с ее энергией покоя, релятивистские законы абсолютно необходимы.*** Рассмотрим в качестве примера ядерную реакцию, вызванную полученными на ускорителе протонами, а именно превращение ядра лития в две альфа-частицы:

$${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \rightarrow 2\,{}^{4}_{2}He$$

Закон пропорциональности массы и энергии позволяет сделать предсказания относительно энергетического выхода ядерной реакции. Значения масс покоя атомных ядер могут быть определены с высокой точностью при помощи масс-спектрометра. Так, масса покоя протона ${}^{1}_{1}H$ равна 1.00728 атомной единицы массы (а.е.м.), масса ядра лития ${}^{7}_{3}Li$ - 7.01601 а.е.м., а масса альфа-частицы ${}^{4}_{2}He$ - 4.00260 а.е.м. Суммарная масса покоя ядер, вступающих в реакцию, равна 8.02329 а.е.м., а масса покоя конечных продуктов реакции меньше: она составляет 8.00520 а.е.м. Таким образом, в результате ядерной реакции масса покоя уменьшается на величину $\Delta m$ = 0.01809 а.е.м. Соответствующая этому изменению массы энергия $\Delta mc^2 = 16.85 МэВ$ с хорошей точностью совпадает с измеренной на опыте кинетической энергией образующихся альфа-частиц. (Первоначальная кинетическая энергия протона мала по сравнению с этой величиной и поэтому в расчете энергетического выхода реакции не принимается во внимание).

Закон пропорциональности энергии и массы можно применить и к анализу устойчивости атомных ядер. Рассмотрим атомное ядро массы $M$, состоящее из $Z$ протонов и $A-Z$ нейтронов ($Z$ - атомный номер, т. е. заряд ядра в единицах элементарного заряда, $A$ - массовое число, т. е. полное число нуклонов в ядре). Энергия покоя ядра $Mc^2$ слагается из энергии покоя всех входящих в него частиц (нуклонов) и энергии внутреннего движения и взаимодействия нуклонов. Для того чтобы ядро было устойчивым и не могло самопроизвольно распасться на составные части, необходимо, чтобы энергия покоя ядра была меньше суммарной энергии покоя этих частей:

$$Mc^2 < \sum_i m_i c^2$$

Разность $\sum_i m_i c^2 - Mc^2$ служит мерой устойчивости ядра и называется ***энергией связи***. Для ядер, содержащих $50 \div 60$ нуклонов, энергия связи составляет около 9 МэВ на один нуклон, т. е. достигает почти 1% энергии покоя. Наряду с энергией связи мерой устойчивости ядра может служить эквивалентная величина $\Delta m$, называемая ***дефектом массы:***

$$\Delta m = \sum_i m_i - M = Zm_p + \left(A-Z\right)m_n - M$$

где $m_p$ и $m_n$ - массы покоя протона и нейтрона соответственно. Если дефект массы положителен, ядро устойчиво по отношению к распаду на отдельные протоны и нейтроны. Однако это еще не означает, что ядро абсолютно устойчиво. Различие в величине энергии связи на один нуклон у разных ядер может привести к тому, что устойчивое по отношению к распаду на отдельные нуклоны ядро не будет устойчивым по отношению к распаду на две части. Такой распад возможен, если дефект массы исходного ядра $\Delta m$ меньше, чем сумма дефектов масс $\Delta m_1 + \Delta m_2$ двух ядер, образующихся в результате распада. Это обстоятельство можно использовать для высвобождения ядерной энергии.

Например, ядро изотопа бериллия ${}_4^8Be$ имеет массу $M$ = 8.00531 а.е.м., которая меньше, чем сумма масс покоя составляющих его четырех протонов и четырех нейтронов $\sum_i m_i = 4 \cdot 1.00728 + 4 \cdot 1.00867 = 8.06380$ а.е.м., но больше, чем суммарная масса покоя двух ядер гелия ${}_2^4He$ ($2 \cdot 4.00260 = 8.00520$ а.е.м.). Поэтому ядро бериллия ${}_4^8Be$, устойчивое по отношению к распаду на отдельные нуклоны, должно самопроизвольно распадаться на две альфа-частицы, что и происходит в действительности. Дефект массы ядра другого изотопа бериллия ${}_4^9Be$ не только положителен, но и превышает сумму дефектов масс всех ядер, на которые ядро ${}_4^9Be$ могло бы распасться. Такое ядро абсолютно устойчиво.

**Вопросы для самоконтроля и обсуждения**

1. Какой вид имеет основной закон релятивистской динамики? Чем он отличается от основного закона ньютоновской механики?
2. Как определяется релятивистский импульс частицы?
3. Что такое полная энергия и энергия покоя ?
4. Напишите выражение для кинетической энергии в теории относительности. При каком условии релятивистская формула для кинетической энергии переходит в классическую формулу?
5. Какова взаимосвязь между полной энергией и импульсом?
6. В каких физических процессах особенно отчетливо проявляется релятивистский закон пропорциональности энергии и массы?