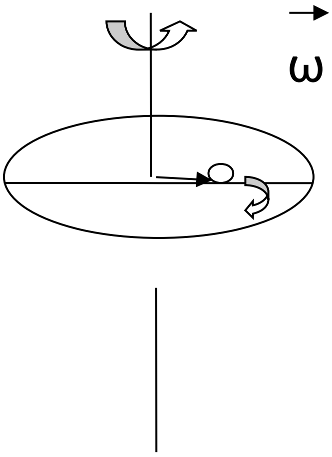


8 лекция. Қатты дененің динамикасы. Каноникалық теңдеулер.

8.1.Қатты дененің қозғалысының динамикасы

8.2.Қатты дененің импульс моменті

8.3.Инерция тензоры. Қатты дене қозғалысының теңдеуі

8.4.Гамильтон теңдеуі. Пуассон жақшалары.

8.1. Классикалық механикада қатты дене деп-өзара арақашықтығы өзгермейтін көптеген материалдық нүктеден тұратын жүйені айтады.2 лекциядан белгілі қатты дененің қозғалысын 2 түрге жіктеуге болады:

1 ілгерілемелі

2 айналмалы

Қатты дененің өте аз қашықтыққа ілгерілемелі қозғалысын және өте аз бұрышқа айналмалы қозғалысын қоса қарастырайық.Сонда аз ғана dR орын ауыстыру

$d\vec{R}=d\vec{R}_0+¿$ (1)

Мұндағы

$$\frac{d\vec{R}}{dt}=\vec{\vartheta} \qquad \frac{d\vec{R}_0}{dt}=\vec{\vartheta}_0 \qquad \frac{d\vec{\varphi}}{dt}=\vec{\omega}$$

(1)өрнекті dt - ға бөлсек

$$\vec{\vartheta}=\vec{\vartheta}_0+[\vec{\omega}\,\vec{r}] \qquad (2)$$

(2) өрнектен: Абсолютті қатты дененің масса центрінің жылдамдығы оның масса центрінің ілгерілемелі қозғалысының жылдамдығы мен айналмалы қозғалысының жылдамдығының қосындысына тең болады деген қорытынды жасауға болады.

(2) өрнектен уақыт бойынша толық туынды алайық

$$\frac{d\vec{\vartheta}}{dt}=\frac{d\vec{\vartheta}_0}{dt}+d\text{¿¿}$$

$$\vec{a}=\vec{a}_0+\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}\right]+\left[\vec{\omega}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\right] \qquad \frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{\varepsilon} \qquad \frac{d\vec{A}}{dt}=[\vec{\omega}\,\vec{A}]$$

$$\vec{a}=\vec{a}_0+[\vec{\varepsilon}\,\vec{r}]+[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}]] \qquad (3)$$

(3) өрнек **әрі ілгерілемелі, әрі айналмалы қозғалыстың үдеуі.**

Сонымен айналмалы қозғалыс кезінде бұрыштық жылдамдық және бұрыштық үдеу деген айналмалы шамалар енгізіледі.

Айналмалы қозғалыс динамикасын сипаттайтын негізгі шама-**күш моменті.**

$$\vec{K}=[\vec{r}\,\vec{F}]$$

Тек айналмалы қозғалысты қарастырайық. $a_0=0$.Олай болса

$$\vec{F}=m\vec{a}$$

$$\vec{K}=[\vec{r}\,m\vec{a}]=m[\vec{r}\,\vec{a}]$$

Радиус векторы тұрақты болған жағдайда

$$[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}]]=0.$$

Олай болса (3) өрнектен

$$\vec{K}=m[\vec{r}[\vec{\varepsilon}\,\vec{r}]]$$

$\vec{\varepsilon}\perp\vec{r}$ және$\vec{\varepsilon}=const$ болған жағдайда екендігін ескерсек

$$\vec{K}=m\vec{\varepsilon}\,r^2$$

Мұндағы $mr^2=I\,қатты\,дененің\,инерция\,моменті$ деп аталатын айналмалы қозғалыс кезіндегі оның инерттілігін сипаттайтын скалярлық шама. Олай болса

$$\vec{K}=I\vec{\varepsilon} \qquad (4)$$

Қатты дене қозғалысының динамикасының негізгі теңдеуі болып табылады.

8.2.Физиканың барлық бөлімдеріндегі сияқты механикалық жүйенің күйін сипаттайтын маңызды шамалардың бірі-айналмалы қозғалыс кезіндегі жүйенің импульс моменті.

Импульс моменті деп-материалдық нүктенің орнын анықтайтын радиус векторы мен оның импульс векторының векторлық көбейтіндісін айтады. $\vec{M}_i-\text{¿}$импульс моменті. Материалдық нүкте үшін

$$\vec{M}_i=[\vec{r}_i m_i\vec{\vartheta}_i]=m_i[\vec{r}_i\vec{\vartheta}_i] \qquad (5)$$

(5) өрнектегі $\vec{\vartheta}_i=[\vec{\omega}\,\vec{r}_i]$ алмастырсақ. Онда

$$\vec{M}_i=m_i[\vec{r}_i[\vec{\omega}\,\vec{r}_i]]$$

Материалдық нүктелер жүйесі үшін

$$\vec{M}=\sum_{i=1}^{n}\vec{m}_i[\vec{r}_i\text{¿}[\vec{\omega}\,\vec{r}_i]]\text{¿} \qquad (6)$$

Тензорлық белгілеулерді енгізейік

$$[\vec{r}_i[\vec{\omega}_i\vec{r}_i]]=r^2\vec{\omega}-\vec{r}(\vec{\omega}\,\vec{r})$$

$$\vec{M}=\sum_{i=1}^{n}m_i\{r^2\vec{\omega}-\vec{r}(\vec{\omega}\,\vec{r})\} \qquad (6\text{¿})$$

(6¿) өрнектен жүйенің импульс моменті

$$\vec{M}=I\vec{\omega} \qquad (7)$$

(7) өрнектен импульс моментінің сақталу заңын шығарып алуға болады. Ол үшін (7) өрнектен уақыт бойынша туынды алайық.

$$\frac{d\vec{M}}{dt}=\frac{d}{dt}(I\vec{\omega})$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt}=I\frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad \frac{d\vec{\omega}}{dt}=\varepsilon$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt}=I\vec{\varepsilon} \qquad (8)$$

(4) (8) салыстырайық $\vec{M}=I\vec{\varepsilon}$

$$\vec{K}=\frac{d\vec{M}}{dt} \qquad (9)$$

(9) өрнек қатты дененің айналмалы қозғалысының динамикасының негізгі теңдеуі.
Қатты денеге сырттан күш әсер етпесін,яғни жүйе тұйықталған болсын.Онда

$$\vec{K}=0 \qquad \frac{d\vec{M}}{dt}=0 \qquad (10)$$

Тек уақыт бойынша өзгермейтін тұрақты шаманың туындысы ғана 0-ге тең болатын

$$\vec{M}=const \qquad (11)$$

Қатты дененің айналмалы қозғалыс кезіндегі импульс моментінің сақталу заңы. Бұдан

$$I\vec{\omega}=const$$

8.3. Материялдық нүктелер жүйесінен тұратын қатты дененің кинетикалық энергиясын есептейік:

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\vartheta_i^2}{2}=\sum_{i=1}^{n}m_i(\vec{\vartheta}_0+¿]\,)^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\vartheta_0^2}{2}+\sum_{i=1}^{n}m_i\vartheta_0[\vec{\omega}\vec{r}_i]+\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}¿ \qquad (12)$$

(12) өрнектегі индексіндегі і жоқтарды қосынды белгінің сыртына шығаруға болады.

Екінші көпмүше: $\sum_{i=1}^{n}m_i¿¿¿=\ [\vartheta¿¿_0\vec{\omega}]\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i¿¿$ (*)

(*) өрнектен санақ басын і-ші нүктеге апарып орналастырсақ

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i=0$$

Олай болса

$$T=\frac{\vec{\vartheta}_0}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i[\vec{\omega}\vec{r}_i¿^2 \quad (13)$$

$\sum_{i=1}^{n}m_i=m$ жүйенің толық массасын береді.

$$[\vec{\omega}\vec{r}_i¿^2=\omega^2r^2-(\vec{\omega}\vec{r})^2 \quad (**)$$

- Векторлың векторлық көбейтіндісінің анықтамасына сәйкес

$$[\vec{\omega}\vec{r}_i¿=¿\,\vec{\omega}\vec{r}\sin\alpha$$

- Векторлың скалярлық көбейтіндісінің анықтамасына сәйкес

$$(\vec{\omega}\vec{r})=¿\vec{\omega}\vec{r}\cos\alpha¿$$

$$[\vec{\omega}\vec{r}¿^2+¿(\vec{\omega}\vec{r})^2=\omega^2r^2$$

Бұдан $[\vec{\omega}\vec{r}¿^2=¿\ \omega^2r^2-(\vec{\omega}\vec{r})^2$

(**) ескеріп (13) өрнекті былай жазуға болады.

$$\boldsymbol{T}=\frac{m\vartheta_0^2}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{m}\{\omega^2r^2-(\vec{\omega}\vec{r})^2\} \qquad (13^*)$$

(13*) өрнектен оң жақтағы бірінші энергия $\frac{m\vartheta_0^2}{2}=T_{іл}$ - ілгерілемелі қозғалыстың кинетикалық энергиясы. Ал екінші құраушысы $\frac{1}{2}m\{\omega^2r^2-(\vec{\omega}\vec{r})^2\}=T_{айн}$- айналмалы қозғалыстың кинетикалық энергиясы.

Тензор ұғымына сәйкес $\vec{r}$ және $\vec{\omega}$ белгілеулерін x_i және ω_i белгілеулерін алмастырсақ. Сонда тензордың қасиетіне сәйкес

$$T_{айн}=\frac{1}{2}m\{\omega_i^2 x_i^2-\omega_k x_k \omega_i x_i\}=\frac{1}{2}\omega_i\omega_k m\{x_i^2\delta_{ik}-x_k x_i\}$$

Мұндағы $\delta_{ik}-¿$бірлік тензор деп аталады. Ал,$m\{x_i^2\delta_{ik}-x_k x_i\}$-$I_{ik}$-инерция тензоры деп аталады.Сонда

$T_{айн}\frac{1}{2}I_{ik}\omega_i\omega_k$ (14)

(14) өрнек айналмалы қозғалыс жасайтын қатты дененің кинетикалық энергиясы болып табылады.

8.4.Классикалық механикадағы негізгі заңдарды жалпылама координата мен жалпылама жылдамдықтардың функциясы болып табылатын Лагранж функциясының көмегімен қарастыруды үйрендік. Енді жалпылама координата және жалпылама импульске тәуелді болатын Гамильтон функциясы деп аталатын функция көмегімен механикалық жүйенің күйін сипаттауды қарастырайық. Ол үшін Лагранж функциясының толық дифференциялын алайық.

$dL=\sum\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i+\sum\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}d\dot{q}_i$ (15)

$\sum\frac{\partial L}{\partial q_i}=\sum\dot{P}_i$ $\sum\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=\sum P_i$(***)

Сонда

$dL=\sum\dot{P}_i dq_i+\sum P_i d\dot{q}_i$ (16)

(16) өрнекті былайша түрлендірейік

$d\left(\sum P_i\dot{q}_i\right)=\sum\dot{q}_i dP_i+\sum P_i d\dot{q}_i$

Осы өрнектен

$\sum P_i d\dot{q}_i=d\left(\sum P_i\dot{q}_i\right)-\sum\dot{q}_i dP_i$ (17)

(17)=>(16) қойсақ

$dL=\sum\dot{P}_i dq_i+d\left(\sum P_i\dot{q}_i\right)-\sum\dot{q}_i dP_i$ (17*)

$d\left(\sum P_i\dot{q}_i-L\right)=-\sum\dot{P}_i dq_i+\sum\dot{q}_i dP_i$ (18)

(18) өрнектегі толық дифференциялдың астындағы жақша ішіндегі өрнекті H әрпімен белгілейік.

$H=\sum P_i\dot{q}_i-L$ =>**Гамильтон функциясы** деп аталады

(18) өрнектен көрініп тұрғандай Гамильтон функциясы жалпылама координатаға,жалпылама импульске,уақытқа тәуелді болады.

(18) өрнектен

$\mathbf{dH}=-\sum_{i=1}^{n}\dot{P}_i\mathbf{d}q_i+\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\mathbf{d}P_i$ ($18^{¿}$)

($18^{¿}$) – дан

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_i&=\frac{\partial H}{\partial P_i}\\ \dot{P}_i&=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

(19) өрнек P және і шамаларына тәуелді болатын , Гамильтон теңдеулері деп аталатын негізгі қозғалыс теңдеуі болып табылады.Бұл теңдеуді қарапайымдылығы және симметриялығы үшін **канондикалық теңдеулер** депте атайды.

Гамильтон функциясынан уақыт бойынша алынатын толық туынды.

$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathbf{d}q_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial P_i}\mathbf{d}P_i$ (20)

(20)$\to$(19) өрнекке қойсақ

$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}$ (21)

Гамильтон формуласы уақытқа тәуелді болмаса, яғни

$\frac{\partial H}{\partial t}=0$, онда

$\frac{dH}{dt}=\mathbf{0}$ (22)

Бұл **механикалық энергияның сақталу заңы** болып табылады. Себебі: тек тұрақты шамадан алынған туынды нольге тең болады.

$$\mathbf{H = const} \qquad (22¿)$$

Айнымалы q ,$\dot{q}$ немесе q, P сияқты динамикалық шамаларға тәуелді болатын Лагранж және Гамильтон формуласы әртүрлі параметрлерге яғни, механикалық жүйенің күйін сипаттайтын шамаларға тәуелді болады. Сондай шаманы λ деп белгілейік. Бұл λ шамасын қандайда бір айнымалы шама деп қарастырайық. Лагранж функциясының дифференциалы мына түрде жазылады.

$$\mathbf{dL}= \sum_{i=1}^{n} \dot{P}_i \mathbf{d}q_i + \sum_{i=1}^{n} P_i \, \mathbf{d}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} \, \mathbf{d\lambda} \qquad (23)$$

Сонда (18) өрнек мына түрде жазылады.

$$\mathbf{dH}= - \sum_{i=1}^{n} \dot{P}_i \mathbf{d}q_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \mathbf{d}P_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} \, \mathbf{d\lambda} \qquad (24)$$

(23) (24) өрнекті салыстырсақ.

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{q,P} = - \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}} \qquad (25)$$

(25) өрнек **Пуассон жақшалары** деп аталады.

Лекция №1

Электр заряды және электромагниттік өріс.

Жоспар:

1.1 Заряд. Заряд тығыздығы және ток тығыздығы.

1.2 Зарядтың сақталу заңы.

1.3 Электромагниттік өріс. Электр өрісінің кернеулігі .Магнит өрісінің индукция векторы.

1.1 Теориялық физиканың келесі бір бөлімі электродинамика болып табылады. Электродинамика пәнінде заряд және электромагниттік өріс, олардың бір-біріне әсері электромагниттік өріс теориясының негіздері қарастырылады. Электродинамика бөлімінде негізгі дерек көзі Максвеллдің электромагниттік өріс теориясы негізінде қаланған Максвеллдің 4 дифференциалдық теңдеуі болып табылады.

Электродинамикада негізгі математикалық ақпараттық теңдеулер векторлық анализ тәсілдері дифференциал және динамика операторлары қарастырылады. Электродинамикада негізгі ұғымдар заряд және электромагниттік өріс.

Заряд - бойына бөлшектің (заттың) бүкіл электрлік қасиеттерін шоғырландырған субстанция.

Электродинамикада заряд ұғымы келесідей түсініктермен байланысты қарастырылады:

1. Нүктелік заряд -өрісінің әсері қарстырылатын қашықтықпен салыстырғанда өлшемін елемеуге болатын заррядталған дене. Нүктелік заряд электродинамикада негізгі түсінік. Себебі, зарядталған бөлшектердің барлығы нүктелік заряд ретінде қарастырылады;

2. Нүктелік зарядтар жүйесі - нүктелік зарядтардың жиынын айтады. Жалпы заряд деп электродинамикада электромагниттік өрісті тудырушы және сол өрісі арқылы басқа зарядтарға әсер етуші субстанцияны айтады;

3. Бірлік заряд - шамасы 1 бірлікке тең зарядты айтады.

1.2. Электродинамикада зарядтар үшін зарядтың сақталу заңы деп аталатын фундаментальды заң айтылады, ол былайша тұжырымдалады: Тұйықталған жүйеде зарятардың алгебралық қосындысы өзгермейді, тұрақты болады .

Бұл заңды былайша басқаша тұжырымдауға болады: Тұйықталған жүйеде зарядтың уақыт бойынша кему (өзгеру) тездігі сол уақыт ішінде жүйе арқылы өтетін ток тығыздығына тең болады.

$$\frac{-\partial P}{\partial t} = ¿\,\vec{j}$$ (1) → Үзілісіздік теңдеуі деп аталады.

Бұл өрнек зарядтың сақталу заңын сипаттайды.

$$\rho=\frac{dq}{dV}\left[\frac{Кл}{м^3}\right]\rightarrow$$ заряд тығыздығы немесе көлем тығыздығы.

$$\vec{j}=\frac{dI}{dS}\left[\frac{A}{м^2}\right]\rightarrow$$ ток тығыздығы.

1.3.Электродинамикадағы негізгі түсініктердің бірі электромагнитттік өріс. Электромагниттік өріс - қозғалыстағы зарядтың айналасында пайда болатын материяның ерекше түрі.

Электромагниттік өріс өзіне енген зарядқа күшпен әсер етеді және сол зарядтың үстінен жұмыс жасай алады.

Электромагниттік өріс 2 құраушыдан тұрады:

1) Электр өрісі;
2) Магнит өрісі;

Электр өрісінің күштік сипаттамасы электр өрісінің кернеулік векторы деп аталады. $E=\frac{d\vec{F}}{dq}\left[\frac{H}{Кл}\right]$

Электромагниттік өріс көптеген зарядтардың өрістерінің жиынтығынан тұрса, онда өрістің қорытқы кернеулік векторы суперпозиция принципімен анықталады.

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+¿\ldots\vec{E}_n$$

Магнит өрісінің күштік сипаттамасы магнит өрісінің индукция векторы деп аталады. $\vec{B}[Тл]$

Өрістің қорытқы индукция векторы да сурепозиция принципімен анықталады.

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\ldots\vec{B}_n$$

Егер өрістің берілген нүктесіндегі $\vec{E}$ және $\vec{B}$ сипаттамалары белгілі болса өрістің сол нүктедегі шешімі анықталған деп саналады. Олай болса электродинамиканың негізгі есебі өрістің кез келген нүктесіндегі $\vec{E}$ және $\vec{B}$ векторларын анықтау болып табылады.

2Лекция

2.1 Максвеллдің вакуммдағы зарядтар жүйесі үшін 4-ші дифференциалдық теңдеулер жазылуы. Ол теңдеулер;

1)$rot\,\vec{E}=\frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}$ 2)$\div\vec{B}=0$

3)$rot\,\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{j}$ 4)$\div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Мұндағы: $\mu_0=1.26*10^{-6}\frac{Кл*м}{A^2c^2}$- магнит тұрақтысы деп аталады

$\varepsilon_0=8.85*10^{-12}\frac{Ф}{м}$ – электр тұрақтысы деп аталады

$\mu_0\varepsilon_0=\frac{1}{c^2}$, $c=3*10^8\frac{c}{м}$ вакуммдегі электромагнит толқындық таралу жылдамдығы

Максвелдің теңдеулері бір-бірімен тығыз байланысты. **1-ші теңдеу мен 2-ші** теңдеуі $\vec{E}$ және $\vec{B}$ в екторларының өзара байланысын көрсетеді.

Яғни 1-ші теңдеуінен 2-шісіне көшуге болады. Осыны қарастырайық. Ол үшін: $rot\,\vec{E}=\frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}$

Берілген теңдеудің екі жағынада ¿ оператор қолданамыз

$$¿rot\,\vec{E}=¿\left(\frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

Векторлық анализ курсынан белгілі, кез келген $\vec{a}$ вектор үшін

$¿rot\,\vec{a}=0$ олай болса $¿rot\,\vec{E}=0$ сонда $0=\frac{-\partial}{\partial t}\div\vec{B}$.

Соңғы орнек орындалу үшін $¿\vec{B}=0$ болуы шарт.

Енді **3-ші мен 4-ші** теңдеулердің байланысын тағайындайық.

$$rot\,\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{j};$$

Берілген теңдеудің екі жағынада ¿ оператор қолданамыз.

$$divrot\,\vec{B}=\text{¿}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)+\text{¿}\left(\mu_0\vec{j}\right)$$ кез келген $\vec{a}$ вектор үшін

$$divrot\,\vec{a}=0\,;divrot\,\vec{B}=0.$$

Сонда $0=\text{¿}\,\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}+\text{¿}\,\vec{E}+\left(\mu_0\div\vec{j}\right);$

$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\div\vec{E}=-\mu_0\div\vec{j};$ $\qquad\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\div\vec{E}=-\text{¿}\,\vec{j};$

$\text{¿}\,\vec{j}=\frac{-\partial\rho}{\partial t};\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\div\vec{E}=\frac{-\partial\rho}{\partial t}\,;$ $\qquad\varepsilon_0\div\vec{E}=\rho\;\;;\text{¿}\,\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,.$

Электр және магнит өрістері бір-бірімен тығыз байланысты, яғни құйынды электр өрісі магнит өрісін тудырады.

2.2. Максвел теңдеулерінің интегралдық түрде жазылуы.

1)$rot\,\vec{E}=\frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}$; теңдеудің 2-жағын аудан бойынша интегралдаймыз $\int_s rot\,\vec{E}\,d\vec{S}=\frac{-\partial}{\partial t}\int_s B d\vec{S}$

Жалпы физика курсынан белгілі Стокс теоремасына сәйкес бет бойынша интегралдан тұйық контур бойынша интегралға көшуге болады; $\int_s rot\,\vec{E}\,d\vec{S}=\text{¿}\oint_L\vec{E}\,d\vec{l}\,\text{¿}$

мұндағы $\frac{-\partial}{\partial t}\int_s B\,d\vec{S}\,d\Phi=\vec{B}\,d\vec{S}$**;** $\qquad\oint_L\vec{E}\,d\vec{l}=\frac{-d\Phi}{\partial t}$**;**

Максвелдің 1-дифференциалдық теңдеуінің интегралдық түрде жазылуы.

2)Максвелдің 2-дифференциалдық теңдеуінің интегралдық түрде жазылуы.$\text{¿}\,\vec{B}=0$ теңдеудің 2-жағын көлем бойынша интегралдаймыз. $\int_V\text{¿}\,\vec{B}\,dv=\text{¿}\oint_v 0\,dv\,\text{¿}$. Гаусс теоремасына сәйкес көлем бойынша интегралдан тұйық бет бойынша интегралға көшуге болады; $\int_V\text{¿}\,\vec{a}\,d\vec{V}=\text{¿}\oint_s\vec{a}\,d\vec{S}\,\text{¿}$; $\int_v\text{¿}\,\vec{B}\,dv=\text{¿}\oint_s B\,ds\,\text{¿}$;

$\oint_v 0\,dv=0$; Сонда $\oint_s B\,ds=0$

3) Максвелдің 3-дифференциалдық теңдеуінің интегралдық түрде жазылуы. $rot\,\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{j}$

теңдеудің 2-жағын аудан бойынша интегралдаймыз. $rot\,\overrightarrow{Bd}\,S=\vec{\varepsilon}_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\int_s\vec{E}\,d\vec{S}$ Стокс теоремасы сәйкес;

$\int_s rotBd\,\vec{S}=\text{¿}\oint_L\vec{B}\,d\vec{l}\int_s\vec{E}\,d\vec{S}=\Psi\,\text{¿}$; электр өрісінің күш сызығының ағыны. $\oint_L\vec{B}\,d\vec{l}=\int_s\vec{\varepsilon}_0\mu_0\frac{\partial\Psi}{\partial t}$;

Максвелдің 3-ші теңдеуінің интеграл түрде жазылуы.

4)Максвелдің 4-дифференциалдық теңдеуінің интегралдық түрде жазылуы. $\text{¿}\,\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$; 2-жағын көлем бойынша интегралдаймыз. $\int_V\text{¿}\,\vec{E}\,d\vec{V}=\text{¿}\oint_V\frac{\rho}{\varepsilon_0}d\vec{V}\,\text{¿}$ Гаусстеоремасына сәйкес $\int_V\text{¿}\,\vec{a}\,d\vec{V}=\text{¿}\oint_s\vec{a}\,d\vec{S}\,\text{¿}$**;**

$\int_V\text{¿}\,\vec{E}\,d\vec{V}=\text{¿}\oint_s\vec{E}\,d\vec{S}\,\text{¿}$**;** $\int_V\frac{\rho dv}{\varepsilon_0}=\text{¿}\frac{\rho dv}{\varepsilon_0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q}{\varepsilon_0}\oint_s\vec{E}\,d\vec{S}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q}{\varepsilon_0}\text{¿}$ **;**Максвелдің4-дифференциалдық теңдеуінің интегралдық түрде жазылуы.

2.3 Максвеллдің әр теңдеуі электромагниттік құбылыстарды сипаттайтын заңдармен байланысты жазылған.

Осы байланысты анықтайық. Максвелдің вакуумдағы зарядтар жүйесі үшін жазылған 1-ші теңдеуінің қандай заңмен байланысты екенін қарастырайық.**1)**$Rot\,\vec{E}=\frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}$; Берілген теңдеуді 2-кі жағынанда аудан бойынша интеграл алайық $\int_S rot\,\vec{E}\,d\vec{S}=\frac{-\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\,d\vec{S}$;Стокс теоремасына сәйкес: $\int_S rot\,\vec{E}\,d\vec{S}=\oint_L \vec{E}\,d\vec{l}\,\Phi=\int_s \vec{B}\,d\vec{S}$ -магнит ағыны. Сонда,$\oint_L \vec{E}\,d\vec{l}=\frac{-d\Phi}{dt}$;$\oint_L \vec{E}\,d\vec{l}=\varepsilon\rightarrow$электростатикалық өрістің циркуляциясы, яғни электр қозғаушы күш болып табылады.$\varepsilon_i=\frac{-d\Phi}{dt}\rightarrow$Электромагниттік индукция заңы (Фарадей заңы) Максвелдің 1-дифференциалдық теңдеуі Фарадейдің электромагниттік индукция заңымен байланысты.**2)**Максвеллдің 2-ші теңдеуінің қандай заңмен байланысты екенін қарастырайық.

$¿\vec{B}=0$, 2 жағын көлем бойынша интегралдайық. $\int_v ¿\vec{B}\,dV=0$ Гаусс теоремасына сәйкес $\int_v ¿\vec{B}\,dV=\oint_s \vec{B}\,d\vec{S}$, $\oint_s \vec{B}\,d\vec{S}=0$ Бұл Ампердің молекулалық ток туралы гипотезасына сәйкес жазылған.

3)Максвеллдің 3-ші теңдеуінің қандай заңмен байланысты екенін қарастырайық.$rot\,\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{j}$ теңдеудің 2-жағын аудан бойынша интегралдаймыз $\int_s rot\,\vec{B}\,d\vec{S}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\int_s \vec{E}\,d\vec{S}+\mu_0\int_s \vec{J}\,d\vec{S}$;Стокс теоремасына сәйкес; $\int_s rot\,\vec{B}\,d\vec{S}=¿\oint_L \vec{B}\,d\vec{l}\int_s \vec{E}\,d\vec{S}=\Psi¿$; $\int_s \vec{J}\,d\vec{S}$ электр өрісінің күш сызығының ағыны.

$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l}=\int_s \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\mu_0\vec{J}$; Био-Савар Лаплас заңы. Максвелдің 3-ші теңдеуінің интеграл түрде жазылуы.

4)Максвеллдің 4-ші теңдеуінің қандай заңмен байланысты екенін қарастырайық.

$¿\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_O}$, екі жағынанда интегралдап алайық. $\int_v ¿\vec{E}\,dV=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho dV$, Гаусс теоремасына сәйкес. $\int_v ¿\vec{E}\,dV=\oint_S \vec{E}\,d\vec{S}$ Сонда $\oint_S \vec{E}\,d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho dV$ Мұндағы $\int_v \rho dV=Q$ заряд , сонда, $\oint_S \vec{E}\,d\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$; Бұл Кулон заңымен байланысты жазылған өрнек. $\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}|Q|*¿q\vee\frac{¿}{R^2},\vec{E}=const¿$, $\vec{E}\int_s ds=\frac{Q}{\varepsilon_0}$, $\vec{E}S=\frac{Q}{\varepsilon_0}$, Сфера бетінің ауданы $S=4\pi r^2$ екендігін және нүктелік зарядтың кернеулігі $E=\frac{F}{q}$,екендігін ескерсек онда $\frac{\vec{F}}{q}4\pi R^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}$ F=$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}|Q|\vee q\vee\frac{¿}{R^2}¿$

2,5 Оқшауланған зарядтар жүйесімен электромагниттік өрісті вакуумдағы қарастытайық .

Лоренц Максвелл теңдеулерін Классикалық механиканың заңдарымен байланысты қарастыруды ұсынды.Бірақ мұндай есепті шешу тиімсіз себебі нақты есепті жатпайды. Сондықтан Лоренц жоғардағы шешу үшін есепті берілуіне бірнеше екетпеулерді енгізу ұсынды.

1.Тұйықталған жүйені әр дайым тандап алу мүмкін емес,себебі, өріске басқа өстер тарапынан әсерді шектеу мүмкін емес сондықтан сыртқы толқын көздері жоқ деп қарастыруды ұсынды, яғни қарастырылып жатқан жүйеге белгілі бір азғана шекті уақыт ішінде сырттан басқа өрістер әсер етпейді деп қарастырады.

2.Зарядтар үнемі үдемелі қозғалыста болғанда “Реакциялық үйкеліс күші п.б.” Бұл күшті Ньютонның заңдары арқылы сипаттау мүмкін емес, сондықтан Лоренц бұл күшті ескермеуді ұсынды.

3.Зарядтар жүйесі үшін Классикалық механика заңдарын қолдану үшін Лоренц оларға механикалық модельдерді қолдануды ұсынды.Осы ұсыныстарды ескере келіп, Лоренц Максвелл теңдеулері былайша жазуды ұсынды.

1) $rot\,\vec{E}=\frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}$ 2) $¿\,\vec{B}=0$ 3) $rot\,\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0 q\,\vec{r}\,\sigma\vee\vec{r}-\overrightarrow{r_0\vee¿¿}$ 4) $¿\,\vec{E}=\frac{q_i v_i \sigma\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)}{\varepsilon_0}7;$

Лекция №3

Электромагниттік өрістің энергиясы және импульсі.

3.1. Зарядтың орын аыстыруы кезінде атқарылатын жұмыс.

3.2. Электромагниттік өрістің энергиясы. Энергияның сақталу заңы.

Эенргия және импульс әмбебап шамалар.Олар барлық физикалық нысандар үшін, оның ішінде Электромагниттік өріс үшін де негізгі шамалар болып табылады.Өзара әрекеттесетін зарядталған материалдық нүктелер жүйесін қарастырайық: Мұндай жүйе Максвелл- Лоренц теңдеулер жүйесімен сипатталады Осы теңдеулерді пайдалана отырып өріс- заряд тұйықталған жүйе үшін энергия және импульс түсініктерін қарастырайық.Макроскопиялық электр зарядтары материалдық денелермен байланысты, сондықтан массасы mi бөлшектің заряды qi деп қарастырайық. Мұндай дене үшін қозғалыс теңдеуі мына түрде жазылады: $\frac{\frac{d}{dt}*m_i\vec{v}_i}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}=F_i$

(3.1)Теңдіктің екі жағынада элементар орын ауыстыру (qri) көбейтейік;**d** $\vec{r}_i\frac{m_i\vec{\vartheta}_i}{\sqrt{1-\left(\frac{\vartheta_i}{c}\right)^2}}=q_i\vec{E}_i$ **d**$\vec{r}_i$**(3.2)**

(3.2) теңдеуінің оң жағы Лоренц күшінің жұмысын береді.Лоренц күші 2 құраушыдан тұрады:
1.Электрлік құраушы; 2.Магниттік құраушы;

$\vec{F}_л=q\vec{E}+q\left[\vec{V}\,\vec{B}\right]$ (*)

Бірақ Лоренц күщінің магниттік құраушысы жұмыс жасамайды.Себебі,Лоренц күші орын ауыстыруға әрқашанда перпендикуляр.яғни:

$q_i\left(\vec{U}_i\vec{B}_i\right)\overrightarrow{dr_i}=0$ (3.3)

Лоренц күшінің элементар жұмысы зарядталған материалдық нүктенің реаливистік энергиясының өсімшесіне тең болады. Элементар жұмыстарды біріктерсек

$$\frac{d}{dt}\frac{m_i c}{\sqrt{1-(\frac{v_i}{c})^2}}=\sum_{i=1}^{n}q_i\vec{E}_I\vec{v}_i \qquad (3.4)$$

(3.4) өрнек материалдық нүктелер жүйесі үшін энергияның өзгеру теоремасы деп аталады.Бірлік уақыт ішіндегі өрістің жұмысын табу үшін(3.4)өрнектің оң жағын интегралдаймыз:

$P=\int_v^{□}\vec{J}\,\vec{E}\,dv$(3.5)

(3.5) өрнектен қуаттың тығыздығын,яғни бірлік көлемде бірлік уақыттағы атқарылатын жұмысты табуға болады.

$P_o = \vec{E}\,\vec{j}$ (3.6)

3.2 $\vec{E}$ *және* $\vec{B}$векторлары берілген болсын, солардың көмегімен электромагниттік өрістің энергиясын анықтайық .

Электродинамикадағы себептілік принципіне сәйкес бастапқы уақыт мезетіндегі электромагниттік өрісті сипаттайтын $\vec{E}$және$\vec{B}$ *векторлары анықталған жағдайда*алдағы кез-келген уақыт мезетіндегі кеңістіктің кез-келген нүктесіндегі өрістің сипаттамаларын дәл анықтауға болады.

Максвелл теңдеулерінен:

$$¿=E_o\mu_o\frac{dt}{dt}+\mu_o\vec{j}$$

$$¿+\vec{J}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\mathrm{rot}\frac{1}{\mu}\vec{B}=E_o\frac{d\vec{E}}{dt}+\vec{J}$$

3.3 Өріс-заряд тұйықталған жүйесін қарастырайық;

Алдымен (3.10)-шы өрнектен энергияның сақталу заңының тұжырымдарын келтірейік: Белгілі бір көлемдегі энергияның кемуі сол көлемнен шығып жатқан энергия ағыны мен осы жүйедегі зарядтар үстінен өрістің атқаратын жұмысына тең болады.Тұйықталған жүйеде сәулелену интенсивтілігі (ағыны) ескерілмейтіндіктен (3.9)-шы өрнектен

$$\frac{-\partial}{\partial t}=\int_V^{\square}\frac{1}{2}(\varepsilon_0\vec{E}^2+\frac{B^2}{\mu_0})\mathrm{dV}=\int_V^{\square}\square\vec{J}\,\vec{E}\,dV \qquad (3.11)$$

(3.11)-ші өрнектен тұйықталған жүйедегі зарядтар үстінен өрістің жасайтын жұмысы сол өрістің энергиясының кемуі есебінен атқарылады. Тұйықталған өріс-заряд жүйесі үшін энергияның сақталу заңын қорытып алайық. Ол үшін (3.11)-ші оң жағы жұмыс екендігін ескерсек (3.4)-ші өрнекке сәйкес

$$\int_V^{\square}\square\vec{J}\,\vec{E}\,dV=\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\frac{m_i c^2}{\sqrt{1-(\frac{\vartheta_i}{c})}}$$ Сонда

$$-\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}(\varepsilon_0E^2+\frac{B^2}{\mu_0})\mathrm{dV}=\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\frac{m_i c^2}{\sqrt{1-(\frac{\vartheta_i}{c})^2}};$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)dV+\sum_{i=0}^{n}\frac{m_i c^2}{\sqrt{1-(\frac{\vartheta_i}{c})}})=0 \quad (3.12)$$

Тек тұрақты шаманың туындысы 0-ге тең болатындықтан (3.12)-ші теңдеудің жақша ішіндегі шаманы

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_0E^2+\frac{B^2}{\mu_0})dV+\sum_{i=0}^{n}¿\frac{m_i c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{V_i}{c}\right)}¿}=const\;¿ \quad (3.13)$$

(3.13)-шы өрнек өріс-заряд тұйықталған жүйесі үшін энергияның сақталу заңы деп аталады.

3.4 Электромагниттік өрістің импульсінің теңдеуі келесідей жолмен алынады. Электромагниттік өріс үшін қозғалыс теңдеуі

$\vec{F}$=m$\vec{a}$; $\vec{a}=\frac{d\vec{\vartheta}}{dt}$; $\vec{F}=m\frac{d\vec{\vartheta}}{dt}=\frac{d(m\vec{\vartheta})}{dt}$; $\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\frac{m_i\vec{\vartheta}_i}{\sqrt{1-(\frac{\vartheta_i}{c})}}=\sum_{i=0}^{n}(q_i\vec{E}_i+q_i[\vartheta_i B_i])$$

Зарядтың кеңістікте таралуын үздіксіз болса онда (3.14)-ші теідіктің оң жағындағы қосындыны интегралмен алмастыруға болады.

$$\sum_{i=0}^{n}(q\vec{E}_i+q_i[\vec{v}_i\vec{B}_i]=\int_V(\rho\vec{E}+[\vec{J}\vec{B}]dV.$$

q=ρdV; $q_i\vec{V}_i=\vec{J}$;

$$\frac{d}{dt}\sum_{i-1}^{n}\frac{m_i\vec{\vartheta}_i}{\sqrt{1-(\frac{\vartheta_i}{c})}}=\int_V(\rho\vec{E}+[\vec{J}\vec{B}])dV \qquad (3.15)$$

(3.15)-ші өрнектің оң жағындағы жақша ішіндегі өрнекті түрлендірейік

$$\rho\vec{E}+[\vec{J}\vec{B}]=\varepsilon_0\vec{E}\mathrm{div}\vec{E}-\varepsilon_0[\frac{d\vec{E}}{dt}B]+$$

$$\frac{1}{\mu_0}[\mathrm{rot}\vec{B}\cdot\vec{B}]. \qquad (3.16)$$

$\rho=\varepsilon_0\mathrm{div}\vec{E}$;

$\mathrm{rot}\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{d\vec{E}}{dt}+\mu_0\vec{J}$ => $\vec{J}=\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

(3.16)-шы өрнектің оң жағын уақыттың толық туындысы болатын қандайда бір шамаға келтіру үшін оған мынандай қосымша қояйық

$$-\varepsilon_0[\vec{E}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}]-\varepsilon_0[\vec{E}\,rot\,\vec{E}]$$

$$\rho\vec{E}+[\vec{J}\vec{B}]=\varepsilon_0\vec{E}\div\vec{E}-\varepsilon_0[\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}]+\frac{1}{\mu_0}[\mathrm{rot}\vec{B}\cdot\vec{B}]-\varepsilon_0\left[\vec{E}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right]-\varepsilon_0\left[\vec{E}\,rot\,\vec{E}\right]+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\div\vec{B} \qquad (3.16¿)$$

Бұл теңдеудің оң жағын біріктірейік (топтастырайық);

$$\rho\vec{E}+[\vec{J}\vec{B}]=-\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0[\vec{E}\vec{B}]+\varepsilon_0(\vec{E}\div\vec{E}-[\vec{E}\,rot\,\vec{E}]+\frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\div\vec{B}+[\vec{B}\,rot\,\vec{B}](3.16¿*¿¿)$$

(3.16¿*¿¿)-шы өрнекті ескеріп (3.15) – ші теңдеуді мына түрде жазуға болады.

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\vec{V}_i}{\sqrt{1-\left(\frac{\vartheta_i}{c}\right)^2}}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\varepsilon_0(\vec{B}\div\vec{B})-[\vec{B}\,rot\,\vec{B}]dV \quad (3.15¿)$$

Төртінші қосымшаға (векторлық анализдің)өрнектеріне сәйкес

$$\int_V(\vec{E}\mathrm{div}\vec{E}-[\vec{E}\,rot\,\vec{E}]dV=0$$

$\int_V(\vec{B}\mathrm{div}\vec{B}-[\vec{B}\,rot\,\vec{B}]=0$ екендігін ескерсек

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\frac{m_i\vec{\vartheta}_i}{\sqrt{1-\left(\frac{\vartheta_i}{c}\right)}}=-\frac{d}{dt}\int_V[\vec{E}\vec{B}]dV \quad (3.15¿*¿¿)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\vec{\vartheta}_i}{\sqrt{1-\left(\frac{\vartheta_i}{c}\right)}}+\int_V \varepsilon_0\left[\vec{E}\,\vec{B}\right]dV\right)=0 \quad (3.17)$$

Тек тұрақты шаманың туындысы 0-ге тең болатындықтан

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\vec{\vartheta}_i}{\sqrt{1-\left(\frac{\vartheta_i}{c}\right)}}+\int_V \varepsilon_0\left[\vec{E}\,\vec{B}\right]dV=const \quad (3.17¿)$$

(3.17¿)-ші өрнек өріс-заряд тұйықталған жүйесі үшін импульстің сақталу заңы деп аталады.

$\vec{g}=\varepsilon_0\left[\vec{E}\,\vec{B}\right]$ – импульс тығыздығы деп аталады.

Лекция №4

\Электромагниттік өрістің потенциялдары үшін теңдеулері

4.1 ЭМ өрістің потенциалдары

4.2 ЭМ өрістің теңдеулерін потенциалдар арқылы жазу

4.3 ЭМ өрістің потенциалдар арқылы жазылған теңдеулердің жалпы шешімі туралы түсінік.

4.1 Электродинамиканың негізгі теңдеулерін шешу үшін Максвел теңдеулерін интегралдауға тура келеді.Максвелл теңдеулерін нақты жағдайлар үшін тікелей интегралдау математикалық тұрғыдан белгілі бір қиындықтар туғызады.Сондықтан осы қиындықтан шығу үшін ***өріс потенциалдары*** деген көмекші шамалар енгізілді.

Кез-келген векторлық өріст математикалық тұрғыдан толық анықталған болып саналады,егер өрістің дивергенциясы(div) және роторы(rot) берілген болса. Сондықтан Максвелл теңдеулер жүйесі толық болып саналады. Себебі Максвелл теңдеулерінде $\vec{E}$ және $\vec{B}$ $\vec{p}$ және $\vec{j}$ арқылы анықталады. Дивергенциясы нөлге тең емес, ал, ротыры нөлге тең өріс потенциалды өріс деп аталады. Яғни күш сызықтары электр зарядтарынан басталып электр зарядтарынан аяқталатын өріс потенциялды өріс деп аталады. Дивергенциясы нөлге тең, ал, ротыры нөлге тең емес өрістер құйынды өрістер деп аталады. Яғни құйынды өрістердің күш сызықтары түйықталған болады.

Көмекші шамалардың, яғни, өріс потенциялдарын енгізейік. Ол үшін

$¿\vec{B}=0$ $\quad\quad$ $\vec{B}=rot\,\vec{A}$ $\quad\quad$ деп белгілесек.

$divrot\,\vec{A}=0$ теңдеуін қанағаттандырады. Мұндағы $\vec{A}$ векторы электромагниттік өрістің потенциялы деп аталады. Сонымен $\vec{B}$ векторы физикалық мағнасы бар шама, ал ,$\vec{A}$ тәжірибеде анықталмайтын көмекші шама болып табылады. Дәл осы сияқты электрлік құраушысына көмекші шама енгізейік. Ол үшін

$rot\,\vec{E}=\frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\quad\quad$ $\vec{B}$= rot$\vec{A}$ $\quad$ 4.1 $\quad\quad$ $\vec{E}=\frac{-\partial}{\partial t}rot\,\vec{A}$

$rot\,\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{A}$=0 $\quad\quad$ $rot\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$

Электростатикалық өрістің роторы 0-ге тең болатындығын ескерсек,онда

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-grad\varphi \qquad 4.2$$

$\varphi(r,t)-¿$өрістің скаляр потенциалы.

Сонымен өрістің скаляр және вектор потенциялдарының функциялары $\varphi(r,t)$және $\vec{A}(r,t)$ берілген жағдайда $\vec{E}\,және\,\vec{B}$ векторларын дифференциалдау арқылы анықтауға болады.

4.2 4.1 және 4.2 өрістерді пайдаланып Максвеллдің диференцалдық теңдеулерін қайта жазып көрейік.

$$rot\,rot\,\vec{A}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{j}$$

$\vec{E}$=- grad - $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ *

$$rotrot\,\vec{A}=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\partial t-\varepsilon_0\mu_0\,grad\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mu_0\vec{j} \qquad 4.3$$

*өрнекті ескерсек $\text{¿}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$-divgrad\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\div\vec{A}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$divgrad\varphi=\Delta\varphi$сонда:

$$\Delta\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\div\vec{A}=\frac{-\rho}{\varepsilon_0} \qquad 4.4$$

Сонымен

$$rotrot\,\vec{A}=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\partial t-\varepsilon_0\mu_0\,grad\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mu_0\vec{j}$$

$$\Delta\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\div\vec{A}=\frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

4.3 өрнекті түрлендіріп былайша жазуға болады . Кез –келген вектор үшін $rotrot\,\vec{A}=grad\div\vec{A}-\Delta\vec{A}$ ескерсек.

$$grad\div\vec{A}-\Delta\vec{A}=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}-\varepsilon_0\mu_0\,grad\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mu_0\vec{j}$$

$$-\Delta\vec{A}=\mu_0\vec{j}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-grad(div\vec{A}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t})$$ *(-1) көбейтсек*

$$\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j}+grad\left(\div\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

Мұндағы

. $\text{¿}\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ ** шартын енгізейік.

Бұл **Лоренц калибировкасы** деп аталады.

$$\begin{cases}\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j}\\ \Delta\varphi+\text{¿}\vec{A}=\frac{-\rho}{\varepsilon_0}\end{cases} \qquad 4.5$$

div$\vec{A}$=$\frac{-1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$

$\Delta\varphi$-$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$=$\frac{-\rho}{\varepsilon_0}$ 4.6

$$\begin{cases}\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j}\\ \Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{-\rho}{\varepsilon_0}\end{cases} \qquad 4.7$$

4.7 өрнек Максвелл теңдеулерінің **потенциалдар арқылы жазылуы**.

Мұндағы:

$$\begin{cases} \vec{E}=-grad\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ rot\,\vec{A}=\vec{B} \end{cases} \qquad 4.8$$

4.3

Максвелл теңдеулерінің потенциялдар арқылы жазылған өрнегінің артықшылығы оның жалпы шешімдерін алуға болатындығында. Максвелл теңдеулерінің потенциялдар арқылы жазылған өрнегінің шешімдерінің жалпы түріне тоқталайық. Есептің қойылуы қандайда бір инерциялды санақ жүйесінде зарядтарының орналасуы p=p($\vec{r}$,t) және олардың қозғалысы $\vec{j}=\vec{j}$($\vec{r}$,t) берілсін. Табу керек өрістің векторлары $\vec{E}=\vec{E}$($\vec{r}$,t) ж /е $\vec{B}=\vec{B}$($\vec{r}$,t) ?

Есепті математикалық тұрғыдан жеңілдету мақсатында алдымен көмекші шамаларды-потенциялдарды анықтайық

$$\left.\begin{aligned} &\Delta A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{dt^2}=-\mu_0\vec{j} \\ &\Delta A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{dt^2}=-\mu_0\vec{j} \\ &\Delta A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j} \\ &\Delta A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j} \\ &\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j} \end{aligned}\right\}$$ 1 типті математикадағы Даламбер теңдеуіне ұқсас

$\Delta U-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-g(\vec{r},t)$ Даламбер теңдеуі

Даламбер теңдеуі математикада толық шешілген сондықтан оның жалпы шешәмә толқындық теңдеу деп аталатын біртекті теңдеулерге сәйкес келеді,ол былайша жазылады

$$\Delta v-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0$$

Ал дербес шешімі u=v+u_g

Бұл толқындық теңдеулердің электр зарядтары толқын болатынын айқындайды. Электр заряды жоқ кездегі кеңістіктегі электр магниттік өріс – еркін өріс деп аталады. Өрістің нақты қандай түрі болатындығы бастапқы шарттарға тәуелді болады.

Бастапқы шарттар

$\varphi_{t=0}=\varphi_{баст}(\vec{r})$

$\left|\dfrac{d\varphi}{dt}\right|\square_{t=o}=\varphi_{баст}(\vec{r})$

$A_{x|t=0}=A_{xбаст}(\vec{r})$

$\dfrac{\partial A_x}{\partial t}=A_{xбаст}(\vec{r})$

Лекция №5

Вакуумдегі стационар электр өрісі

Жоспар

5.1. Стационар өрістің ерекшеліктер.
5.2. Стационар электр өрісі теңдеулерінің потенциалдар арқылы жазылуы.
5.3 Электростатикалық өріс және Кулон заңы.
5.4 Зарядтар жүйесінің алыс қашықтықтағы электростатикалық өрісі.

5.1 $\frac{\partial P}{\partial t}$=0; $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$=0 шарттарын қанағаттандыратын, яғни, заряд пен ток тығыздықтары уақытқа тәуелді болмайтын (тұрақты болатын) өріс стационар өріс деп аталады.Мұндай өрістердің потенциалдарының өрнегі (шешімі) кешігуші потенциалдар өрнегімен алынады.Кешігуші птенциалдар өрнегі мына түрде жазылатын:

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\Pi\mathcal{E}_0}\int_V \frac{\rho\left(\vec{r}_0 t-\frac{r'}{c}\right)}{r'}\mathrm{d}V_0$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\Pi\mathcal{E}_0}\int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}_0 t-\frac{r'}{c}\right)}{r'}\mathrm{d}V_0$$

Ал, озушы потенциалдар :

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\Pi\mathcal{E}_0}\int_V \frac{\rho\left(\vec{r}_0 t+\frac{r'}{c}\right)}{r'}\mathrm{d}V_0$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\Pi\mathcal{E}_0}\int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}_0 t+\frac{r'}{c}\right)}{r'}\mathrm{d}V_0$$

Сонда стационар өріс үшін:

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\Pi\mathcal{E}_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}_0)}{r'}\mathrm{d}V_0$$

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\Pi\mathcal{E}_0}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}_0)}{r'}\mathrm{d}V_0 \qquad (5.1)$$

$\Rightarrow$ Стационар өріс үшін Максвелл теңдеу-лерінің потенциалдар арқылы жазылуы

$$E=-\mathrm{grad}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases}\vec{E}=-grad\varphi\\ \vec{B}=rot\,\vec{A}\end{cases}$$

Осыларды ескеріп стационар өріс үшін Максвеллдің дифференциалдық теңдеулерін былайша жазамын.(Электрлік құраушылар мен магнит құраушыларын бөліп жазайық):

$$\begin{cases}¿\,\vec{E}=\frac{\rho}{\mathcal{E}_0}\\ rot\,\vec{E}=0\end{cases} \quad (5.3) \qquad \begin{cases}¿\,\vec{B}=0\\ rot\,\vec{B}=\mu_o\vec{j}\end{cases} \quad (5.4)$$

(5.3)-шартты қанағаттандыратын өріс-электростатикалық өріс деп аталады. Дивергенциясы 0-ге тең емес, ал роторы 0-ге тең өріс-потенциалды өріс болып табылады. Олай болса, электростатикалық өріс потенциалды өріс болып табылады.

(5.4)-өрнекті қанағаттандыратын өріс-магнитостатикалық(стационар магнит) өріс деп аталады.

Дивергенциясы 0-ге тең, ал роторы 0-ге тең емес өріс-құйынды өріс деп аталады. Олай болса, магнитостатикалық өріс құйынды өріс болып табылады.

5.2 Тұрақты электр өрісі 2 жағдайда туындауы мүмкін:

1) Қозғалмайтын зарядтың маңында $\rho=\rho(\vec{r}), \vec{j}=0$
2) Стационар қозғалатын зарядтың айналасында $\rho=\rho(\vec{r}), \vec{j}=\vec{j}(\vec{r})$

Бірінші жағдайда ток жоқ, мұндай өріс электростатикалық өріс деп аталады.

Ал, екінші жағдайда кеңістіктің барық нүктелерінде ток тығыздығы уақытка тәуелді емес,бірдей,мұндай өріс-стационар электр өрісі деп аталады.

Стационар электр өрісі үшін 3 және 4 дифференциалдық теңдеулермен қатар мына интегралдық өрнекті де жазуға болады:

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (5.5)$$

Бұл теңдеу Гаусс (Остроградский Гаусс) деп аталады.

Электростатикалық потенциалы үшін теңдеу мына түрде жазылады:

(4.7)-өрнектен:

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Стационар өріс үшін : $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$

$$\Delta\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5.6)$$

(5.6)-өрнек математикада Пуассон өрнегі деген атпен беріледі. Бұл өрнектін жалпы шешімін табу үшін оның дербес шешіміне сәйкес келетін мынадай бір типті теңдеуді қосып жазуға болады:

$\Delta\varphi=0\,(5.7)$ Лаплас теңдеуі

5.3. Практикада нүктелік заряд деген модель жиі қолданылады. Нүктелік заряд:

1. Өрісі қарастырылып отырған нүктеге дейін салыстырғанда өлшемін елемеуге болатын зарядталған дене.
2. Зарядталған дененің туғызатын өрісін анықтау кезінде оның бірлік көлемінің (көлем элементінің) зарядын айтады.

Нүктелік зарядтың өрісінің потенциалы мен кернеулігін осы уақытқа дейін қарастырдық, электростатикалық өріс үшін негіз болып табылатынекі нүктелік зарядтың өзара әсерлесу заңын – Кулон заңын Максвелл теңдеулерінен қорытып алған едік.

Кулон заңы былайша жазылады:

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot|q_1|\cdot|q_2|\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \quad (5.8)$$

Мұндағы: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=k=9\cdot10^9\frac{Н\cdot м^2}{Кл^2}$ – Кулон тұрақтысы деп аталады.

Электростатикалық өрістің кернеулік векторының анықтамасына сәйкес,

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=K\frac{(q)}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \quad (5.9)$$

Стационар өріс үшін:

$$\vec{E}=-grad\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\quad \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=0$$

$$\vec{E}=-grad\varphi \quad (5.10)$$

(5.9)→(5.10) қойсақ

$$K¿q\vee\frac{¿}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}=-grad\varphi¿$$ теңдіктің екі жағында $-\partial\vec{r}$ ға көбейтейік

$$grad\varphi\,\partial\vec{r}=-k¿q\vee\frac{¿}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}¿$$ - интегралдайық

$$\int grad\varphi d\vec{r}=-k\vee q\vee\int\frac{\vec{r}\,dr}{r^3}$$

$$\varphi=-k\frac{q}{r}+C \quad (5.11)$$

Сонымен, 5.11 өрнек электростатикалық өрістің потенциалы болып табылады. Интеграл тұрақтысы С ны табу үшін келесі нормалау шартын пайдаланамыз:

$$\varphi\vee_{r\to\infty}=0=¿\varphi=k\frac{q}{r}(5.11¿)$$

Зарядталған денелер жүйесі үшін егер заряд тығыздығы үздіксіз болса потенциал:

$$\varphi(\vec{r})=k\int_{V_0}\frac{\rho(\vec{r}_0)}{r'}dV_0 \quad (5.12)$$

Ал кернеулік

$$\vec{E}(\vec{r})=k\int\frac{\vec{r}\rho(\vec{r}_0)}{(r')^3}dV_0$$

5.4.Кеңістіктің қандай да бір шекті көлемінде үздіксіз таралған зарядтар жүйесінен алыс қашықтықтағы өрісін қарастырайық:

Бұл жағдайда өрістің патенциалы мен кернеулігінің өрнектері жуықтап алыныды және 1 немесе 2 параметірінің көмегімен жүйені сипаттайды.

Патенциалдың жуық мәнін алу үшін 5.12 теңдеудігі $\frac{1}{r^2}$ функциясын r_0 шамасының дәрежесі бойынша қатарга жіктейміз: жазуға ыңғайлы болу үшін x→x_1, $y\to x_2$, z→x_3деп белгілеп, ал функцияны $\frac{1}{r'}=\sqrt{\sum_{i=0}^{n}(x_\alpha-x_{\circ\alpha})^2}$ деп белгілеп Тейлор қатарына жіктейміз:

$$\frac{1}{r'}=\frac{1}{r}-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\alpha=1}\left(\frac{1}{r}\right)x_{\circ\alpha}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}*\left(\frac{1}{r}\right)x_{\circ\alpha}x_{0\beta}+\dots\dots$$

Осы қатарды 1,2 теңдеудің 1/не қойсақ: $\varphi(1)=K\int_{v_0}\frac{\rho(\vec{r}0)}{r}dv_0-k\int_{v_0}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)x_{0\alpha}*\rho(\vec{r}_0)dv_0+$ $\frac{1}{2}k\int_{v_0}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha\partial x_\beta}}*\left(\frac{1}{r}\right)x_{0\alpha}x_{0\beta}*\rho(\vec{r}_0)dv_0+\dots\dots\dots.$

Интеграл белгісінің сыртына идексінде 0 белгісі жоқ, яғни, интегралдың айнымалысы болмайтын шамаларды шығарайық:$\varphi(1)=\frac{k}{r}\int_{v_0}\rho(\vec{r}_0)dv_0$-$\frac{k}{r}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int x_{0\alpha}\rho(\vec{r}_0)dv_0$+$\frac{k}{\partial r}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_{0\alpha}\partial x_\beta}$ $\int x_{0\alpha}x_{0\beta}*\rho(\vec{r}_0)dv_{05,13}$

5.13 теңдеудің 1ші құраушысы жүйе патенциалы үшін 0-дік жуықтау д.а

Ал, 5.13-теңдеудің 2ші құраушысы-дипольдік жуықтау д.а.Оны век-қ түрде былайша жазылады:

K grad$\varphi\left(\frac{1}{r}\right)\int_{v_0} \rho(\vec{r}_0)\,dv_0$

Мұндағы:...$\int_{v_0} \vec{r}_0\,\rho(\vec{r}_0)\,dv_0=\vec{p}$

Егер жүйе n нүктелік зарядтан тұрса, онда дипольдік момент:...$\vec{P}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{0i}\,q_i$

5.13-теңдеудің 3ші құраушысы патенциалдың квадрупольдік жуықтауы деп аталады.

Лекция №6

Лекция 6. Электростатикалық өрістің жұмысы мен энергиясы.

6.1. Сыртқы электростатикалық өрістегі зарядтар жүйесі. Жұмыс және потенциалдық өріс.

6.2. Сыртқы электростатикалық өрістегі қатаң зарядтар жүйесіне әсер ететін күштер.

6.3. Зарядтардың әсерлесу энергиясы және электростатикалық өріс энергиясы.

6.1. Электростатикалық өрістің энергетикалық қатынасына тоқталайық. Өріске енген зарядтардың үстінен өріс тарапынан жасалатын жұмысты анықтайық.

q зарядтардың үстінен электростатикалық өрістің атқаратын элементар жұмысын δA десек

$$\delta A=\vec{F}\,d\vec{r}=q\,\vec{E}\,d\vec{r}$$

Мұндағы: $\vec{E}=-grad\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$$\delta A=-grad\varphi\,d\vec{r}$$

$$grad\varphi\,d\vec{r}=d\varphi$$

Сонда $\delta A=-qd\varphi$ (6.1)

$A=q(\varphi_1-\varphi_2)$ (6.1*)

Электростатикалық өрістің q зарядты орынауыстырғанда өрістің атқаратын жұмысы.

Бұл өрнектен электростатикалық өрістің q заряд үстінен атқаратын жұмысы зарядтардың бастапқы және соңғы нүктесіндегі потенциалының айырмасымен анықталады және заряд қозғалысының траекториясының түріне тәуелді болмайды.

(6.1*) өрнекке сәйкес өрістің берілген нүктесіндегі потенциалдық энергиясы деген түсінік енгізіледі.

$A=q\,\varphi_1-q\,\varphi_2$

$U(\vec{r})=q\varphi(\vec{r})$ (6.2) - потенциалдық энергия

Сыртқы өрістегі зарядтар жүйесі үшін потенциалдық энергия былайша жазылады

$$\left.\begin{aligned} &U=\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi(\vec{r}_i)\\ &U=\int \rho(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\,dV\end{aligned}\right\}\qquad (6.3)$$

6.2. Кулон заңына сәйкес

$\vec{F}=\sum_{i=1}^{n} q_i\vec{E}_i$ (6.4)

Нүктелік жүйенің жуықталған жағдайына сәйкес

$\vec{F}=\vec{E}(\vec{r})\sum_{i=1}^{n} q_i$ (6.5)

$\vec{p}$- дипольдік моментімен сипатталалатын электр жағынан бейтарап жүйеге әсер ететін күшті табу үшін $U(\vec{r})=-\vec{p}\,\vec{E}(\vec{r}_0)$ өрнегін пайдаланамыз.

Потенциалдық өріс күштері үшін $rot\,\vec{F}=0$ шарты орындалатындықтан $rot(q\,\vec{E})=0$

Олай болса $\vec{F}=-gradU$

Бұдан біздің жағдай үшін

$$\vec{F}=-gradU(\vec{p}\,\vec{E})$$

Есептеу кезінде II қосымшадағы 29 өрнекке сәйкес

$$grad(\vec{a}\vec{b})=(\vec{b}\nabla)\vec{a}+(\vec{a}\nabla)\vec{b}+[\vec{b}\,rot\,\vec{a}]+[\vec{a}\,rot\,\vec{b}]$$

Осығаан сәйкес және $\vec{p}$-ның $\vec{r}$-ға тәуелді емес екенін ескерсек $rot\,\vec{E}=0$

$$\vec{F}=gradU(\vec{p}\vec{E})$$

$$\vec{F}=(\vec{p}\nabla)E(\vec{r}) \quad (6.6)$$

6.3 Зарядтардың әсерлесу энергиясы ж/е электростатикалық қріс энергиясы.

Нүктелік зарядтар жүйесінің өзара әсерлесу энергиясын яғни жүйенің потенциалдық энергиясын қарастырайық. Жүйенің жекеленген зарядтарының әсерлесу энергиясы $W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i v_i$; $\varphi=k\sum_{i\neq j}^{n}\frac{q_i}{rj}$

(6.7)орнына қойсақ ; $W=\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}\square\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i q_j}{r_i j}$6.8 жүйедегі зарядтардың өзара әсерлесу энергиясы.

Егер заряд V көлемге үздіксіз таралған болса 6.8 өрнек келесідей интегралдық өрнекке алмастырылады.$W=\frac{k}{2}\int\int_{v'}^{\square}\frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\overrightarrow{r'}|}dvdv'$(6.9) $W=\frac{1}{2}\int_{v}^{\square}\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})dv$ (6.9*)$\varphi(\vec{r})=k\int\frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dv'$

(6.10)Бұл өрнекті былайша қарастырайық.$W=\int_{v}^{\square}\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)dv$

Өрнетен B=0 екенін ескерсек , $W=\int_{v}^{\square}\frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2)dv;W=\frac{1}{2}\int_{v}^{\square}\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})dv;$

$$W=\frac{1}{2}\int_{v}^{\square}¿(\varepsilon_0\varphi div\,\vec{E})dv=\begin{vmatrix} div\varphi\,\vec{E}=\varphi div\,\vec{E}+\vec{E}\,grad\varphi\downarrow \\ div\varphi\,\vec{a}=\varphi div\,\vec{a}+\vec{a}\,grad\,\varphi\nearrow \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\int_{v}^{\square}\varepsilon_0\div(\varphi\vec{E})dv-\frac{1}{2}\int_{v}^{\square}\begin{Bmatrix} ¿\varepsilon_0\vec{E}\,grad\varphi dv=Гаусс\,теоре.\downarrow \\ \int_{v}^{\square}¿(\varphi\vec{E})dv=\int_{\square}^{\square}\varphi\vec{E}\,d\vec{S} \\ grad\varphi=-\vec{E} \end{Bmatrix}=$$

, сонымен, $W=\frac{1}{2}\oint_{s}^{\square}\varepsilon_0\varphi\vec{E}\,d\vec{S}+\frac{1}{2}\int_{v}^{\square}\varepsilon_0\overrightarrow{E^2 dv},\varphi=k\frac{q}{r}r\to\infty,\varphi=0,\oint_{s}^{\square}\varepsilon_0\varphi\vec{E}\,d\vec{S}=0,$ сонымен, зарятдаржүйесінің потенциалды энергиясы , сол зарятдар жүйесі тудыратын өрістің энергиясына тең екендігі дәлелденді.

№7лекция

Вакуммдегі магнитастатикалық өріс.

7. 1 Магнитостатикалық өріс теңдеудің потенциалдар арқылы жазылуы?

7 .2 Вектор потенциал және магнитостатикалық өріс индукциясы?

7.1 Ток тығыздығы уақытқа байланысты өзгермей қалатын, яғни тұрақты жылдамдықпен қозғалатын зарядтың айналасында пайда болатын өріс магнитатикалық өріс деп аталады.

Магнитастатикалық өріс үшін Максвелл теңдеулері мына түрде жазылады:

$$rot\,\vec{B}=M_{\circ}\vec{j}$$

$¿\vec{B}$=0 ***(7.1)***

Ал потенцал арқылы жазылуы:

$$\Delta\,\vec{A}=-M_{\circ}\vec{j}$$

(7.2)

Мұндағы : $\vec{B}=rot\,\vec{A}$

Бұл теңдеудің шешімі мына түрде жазылады:

$\overrightarrow{A(\vec{r})} = \frac{M_{\circ}}{4\pi} \int_{V_{\circ}} \frac{\vec{j}(\vec{r}_{\circ})}{r'} dV_{\circ}$ **(7.3)**

(7.3)өрнектің жалпы шешімі Лаплас өрнегімен жазылады. Яғни

$$\Delta \vec{A} = 0$$

Сонымен қатар, магнитастатикалық өріс үшін Максвелл теңдеуінің интегралдық түрде жазылуы қолданылатын

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_{\circ} I$$

I-контурды қиып өтетін ток.

7.2

(7.3)-өрнекті пайдалана отырып құйынды магнитастатикалық өрістің индукциясын табайық ол үшін келесідей белгілеу енгізейік

$f = \frac{\mu_{\circ}}{4\pi} = 10^{-7} \frac{кг * м}{А^2 * с^2} \rightarrow$индукциялық тұрақты.

Осы индукциялық тұрақтының К тұрақтымен байланысы мына түрде жазылады:

$$K = c^2 * f$$

К-кулон тұрақтысы.

$$\varepsilon_{\circ} \mu_{\circ} = \frac{1}{c^2} \rightarrow c^2 = \frac{1}{\varepsilon_{\circ} \mu_{\circ}}$$

$$K = c^2 * f = \frac{\frac{1}{\varepsilon_{\circ} \mu_{\circ}} * \mu_{\circ}}{4\pi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}} = 9 * 10^9 \frac{Н * м^2}{Кл^2}$$

Осыны пайдаланып

$$\vec{B} = rot_r A = f \int_V rot_r \frac{\overrightarrow{j(\vec{r}_{\circ})} dV_{\circ}}{|\vec{r} - \vec{r}_{\circ}|} = f \int_V \left[grad \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{\circ}|} * \vec{j}(\vec{r}_{\circ}) \right] dV_{\circ} = f \int_V \frac{-\left[(\vec{r} - \vec{r}_{\circ}) \vec{j}(r_{\circ}) \right]}{|\vec{r} - \vec{r}_{\circ}|^3} dV_{\circ}$$

Сонда:

$$\vec{B} = f \int_V \frac{\left[\vec{j}(\vec{r}_{\circ}) * \vec{r}' \right]}{|\vec{r} - \vec{r}_{\circ}|^3} dV_{\circ}$$

Бұл (7.4) өрнек Био-Савар Лаплас өрнегі болып табылады және магнитастатикалық өрістің кеңістіктің кез келген нүктесіндегі индукция векторын анықтауға мүмкіндік береді.

7.3. Сыртқы магнит өрісінде қозғалған зарядтар жүйесінің энергисы. Жү әсер етуші күш.

Зарядтар жүйесінің кеңістікте қандай да бір шекті облысындағы стационар қозғалысын қарастырайық. Үзліксіздік теңдеуінен және зарядтар қозғалысыны стационар шартынан:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}=0\\ \frac{\partial \rho}{\partial t}=0\end{array}\right\} \text{ стационар шарт}$$

$$\frac{-\partial \rho}{\partial t}=¿\vec{j} \qquad ¿\vec{j}=0 \quad 7.5$$

7.5-өрнектен ток тығыздығы $\vec{j}$ болатын өрістің күш сызықтары тұйықталған қорытынды жасайды.

Жүйенің бүкіл көлемін тұйықталған ток түтікшелеріне бөліп қарастырайық Жіңішке түтікше үшін $\vec{j}_{i^{dv}i}=I\,d\vec{l}_i$ орындалады.

Мұндағы

I-түтікшенің өне бойы тұрақты болып қалатын ток күші

Өрнекті интегралдайық.

$$\int_v \vec{j}\,dv=\sum_{i=1}^{n} \int_v \vec{j}\,dv=\sum_{i=1}^{n} I_i \oint_L d\vec{l}_i=0\,(7.6)$$

$$\oint_L d\vec{l}=0\;\frac{1}{r'}=\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}_\circ r}{r^3}\;осыөрнекті\,7.3\,ге\,қойсақ$$

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{f}{r}\int \vec{y}(r_0)\,d\,v_0+\frac{f}{r^3}\int \vec{j}(\vec{r}_0)*(\vec{r}_0\vec{r})\,d\,v_0\,7.7$$

7.6-ші өрнекке сәйкес 7.7-ші оң жағындағы 1 – ші құраушысы 0-ге тең.

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{f}{r^3}\int_v \vec{j}(\vec{r}_0)*(\vec{r}_0\vec{r})\,d\,v_0\,7.8$$

$\vec{j}(\vec{r}_0\vec{r})$ өрнегін жіктейік.

$$\vec{j}(\vec{r}_0\vec{r})=\frac{1}{2}\left(\vec{j}(\vec{r}_0\vec{r})-\vec{r}_0(\vec{j}\vec{r})\right)+\frac{1}{2}\left(\vec{j}(\vec{r}_0\vec{r})-\vec{r}_0(\vec{j}\vec{r})\right)$$

Бұл өрнекте 1- ші жақша ішіндегі өрнекті былай жазуға бодлады. $\frac{1}{2}\left[\left[\vec{r}_0\vec{j}\right]\vec{r}\right]$

Сонда 7.8- ші өрнек мына түрде келеді:

1. **Жүйеге әсер етуші күштер.**
2. **Магнитостатикалық өрістің энергиясы.**

8.1 Сыртқы магниттік өрістегі жүйенің дипольдік жуықтаудағы орнегін алу үшін 2-шарт енгізейік.

1. Жүйе сыртқы өрісте өзгермейтін магниттік момент деп аталатын шамамен сипатталатын болсын.
2. Магнит өрісі дипольдік жуықтауда электростатикалық өріске ұқсас болғандықтан, кеңістіктің шекті аймағында токтар жүйесін дипольдік жуықтауда ρ_mтығыздықпен таралған магниттік зарядтар жүйесі ретінде қарастырылсын. Жүйе тұтастырылғанда электр жағынан бейтарап болсын, яғни,

$\int_{v_0} \rho_m d v_0 = 0$, бұндай жағдайда жүйенің магниттік моменті электростатикалық өрістің өрнегіне ұқсас (6.2-6.3) жазуға болады,яғни өрістегі жүйенің энергиясы $U = -\vec{m}\vec{B}$(8.1) салыстыру үшін (6-лекциядағы) $U(\vec{r}) = -\vec{\rho}\vec{E}$. Дәл осы сияқты электростатикалық өрістегі өрнекке ұқсас 6.6 өрнек токтар жүйесіне әсер ететін күш $\vec{F} = (\vec{m}\Delta)\vec{B}$ (8.2) соған ұқсас $(\vec{F} = (\vec{p}\Delta)\vec{E})$.

8.2 Магнитостатикалық орістің энергиясы.

3-лекциядағы $W = \int_v \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) dv$ – электромагниттік өріс өрнегінен біздің жағдайда тек магнитостатикалық өріс қарастырылып жатқандықтан E=0, $W = \frac{1}{2\mu_0}\int_v B^2 dv$ (8.3)магнитостатикалық өрістің энергиясының өрнегі.

Магнитостатикалық өрістің энергиясын токтардың өзара әсерлесу өрнегімен бір мәндес екендігін дәлелдейік ол үшін, $B^2 = \vec{B}\vec{B} = \vec{B}\, rot\, \vec{A}$- ны түрлендірейік, және $¿[\vec{A}\vec{B}] = \vec{B}\, rot\, \vec{A} - \vec{A}\, rot\, \vec{B}$-екендігін ескерсек $\vec{B}\, rot\, \vec{A} = \vec{A}\, rot\, \vec{B} + ¿[\vec{A}\vec{B}]$ сонымен: $W = \frac{1}{2\mu_0}\int_v \vec{A}\, rot\, \vec{B} + ¿[\vec{A}\vec{B}] dv$(8.4).(7.1)-өрнектен $rot\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$-екендігін ескерсек $W = \frac{1}{2\mu_0}\int_v \vec{A}\mu_0\vec{j}\, dv + \frac{1}{\mu_0}\int_v ¿[\vec{A}\vec{B}] dv$(8.4*)

8.4* өрнектің оң жағын Гаусс теоремасын қолданайық$W = \frac{1}{2}\int_v \vec{A}\vec{j}\, dv + \frac{1}{2\mu_0}\oint_s [\vec{A}\vec{B}] d\vec{S}$(8.5)

Тұйық бет бойынша интегралды шекті жағдайда қарастырайықғ яғни тұйық бетті шексіз үлкен мөлшерде қарастырғанда $\oint_s [\vec{A}\vec{B}] d\vec{S} = 0$ $W = \frac{1}{2}\int_v \vec{A}\vec{j}\, dv$ (8.6) осы өрнектен $\vec{A} = \int \frac{\vec{j}\vec{r}_0}{¿\vec{r} - \vec{r}_0 \vee ¿ dv} ¿$;екендігін ескерсек, $W = \frac{f}{2}\int\int_v \frac{\vec{j}(\vec{r})\vec{j}(\vec{r'})}{¿\vec{r} - \vec{r'} \vee ¿ dv dv'} ¿$(8.7) Өзара әсерлесуші токтар жүйесінің энергиясының өрнегі.

Лекция №8

3. **Жүйеге әсер етуші күштер.**
4. **Магнитостатикалық өрістің энергиясы.**

8.1 Сыртқы магниттік өрістегі жүйенің дипольдік жуықтаудағы орнегін алу үшін 2-шарт енгізейік.Жүйе сыртқы өрісте өзгермейтін магниттік момент деп аталатын шамамен сипатталатын болсын.Магнит өрісі дипольдік жуықтауда электростатикалық өріске ұқсас болғандықтан, кеңістіктің шекті аймағында токтар жүйесін дипольдік жуықтауда ρ_mтығыздықпен таралған магниттік зарядтар жүйесі ретінде қарастырылсын. Жүйе тұтастырылғанда электр жағынан бейтарап болсын, яғни,$\int_{v_0} \rho_m d v_0 = 0$, бұндай жағдайда жүйенің магниттік моменті электростатикалық өрістің өрнегіне ұқсас (6.2-6.3) жазуға болады,яғни өрістегі жүйенің энергиясы $U = -\vec{m}\vec{B}$(8.1) салыстыру үшін (6-лекциядағы) $U(\vec{r}) = -\vec{p}\,\vec{E}$. Дәл осы сияқты электростатикалық өрістегі өрнекке ұқсас 6.6 өрнек токтар жүйесіне әсер ететін күш $\vec{F}=(\vec{m}\Delta)\vec{B}$ (8.2) соған ұқсас $(\vec{F}=(\vec{p}\Delta)\vec{E})$.

8.2 Магнитостатикалық орістің энергиясы.

3-лекциядағы $W=\int_v \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)dv$ – электромагниттік өріс өрнегінен біздің жағдайда тек магнитостатикалық өріс қарастырылып жатқандықтан E=0, $W=\frac{1}{2\mu_0}\int_v B^2\,dv$ (8.3)магнитостатикалық өрістің энергиясының өрнегі.

Магнитостатикалық өрістің энергиясын токтардың өзара әсерлесу өрнегімен бір мәндес екендігін дәлелдейік ол үшін, $B^2=\vec{B}\,\vec{B}=\vec{B}\,rot\,\vec{A}$- ны түрлендірейік, және $\text{¿}[\vec{A}\,\vec{B}]=\vec{B}\,rot\,\vec{A}-\vec{A}\,rot\,\vec{B}$-екендігін ескерсек $\vec{B}\,rot\,\vec{A}=\vec{A}\,rot\,\vec{B}+\text{¿}[\vec{A}\,\vec{B}]$ сонымен:$W=\frac{1}{2\mu_0}\int_v \vec{A}\,rot\,\vec{B}+\text{¿}[\vec{A}\,\vec{B}]\,dv$(8.4).(7.1)-өрнектен $rot\,\vec{B}=\mu_0\,\vec{j}$-екендігін ескерсек$W=\frac{1}{2\mu_0}\int_v \vec{A}\,\mu_0\,\vec{j}\,dv+\frac{1}{\mu_0}\int_v \text{¿}[\vec{A}\,\vec{B}]\,dv$(8.4*)

8.4* өрнектің оң жағын Гаусс теоремасын қолданайық$W=\frac{1}{2}\int_v \vec{A}\,\vec{j}\,dv+\frac{1}{2\mu_0}\oint_s [\vec{A}\,\vec{B}]\,d\vec{S}$(8.5)

Тұйық бет бойынша интегралды шекті жағдайда қарастырайықғ яғни тұйық бетті шексіз үлкен мөлшерде қарастырғанда $\oint_s [\vec{A}\,\vec{B}]\,d\vec{S}=0$ $W=\frac{1}{2}\int_v \vec{A}\,\vec{j}\,dv$ (8.6) осы өрнектен $\vec{A}=\int \frac{\vec{j}\,\vec{r}_0}{\text{¿}\vec{r}-\vec{r}_0\vee\text{¿}\,dv}\text{¿}$;екендігін ескерсек, $W=\frac{f}{2}\int\int_v \frac{\vec{j}(\vec{r})\,\vec{j}(\vec{r}\,')}{\text{¿}\vec{r}-\vec{r}\,'\vee\text{¿}\,dvdv'}\text{¿}$(8.7) Өзара әсерлесуші токтар жүйесінің энергиясының өрнегі.

9.1Максвелл теңдеулері және электромагниттік толқынның туылуы.

Вакуумдағы электромагниттік өріс үшін Максвелл теңдеулерін жазайық:$\{$

Бұл теңдеулер жүйесі вакуумдағы еркін элетромагниттік өрісті сипаттайды.
Айнымалы өрістің $\vec{E}$ және $\vec{B}$ векторларының өзара байланысын және олардың өріс таралуының шекті жылдамдығының болуы электромагниттік толқынның тууына әкеледі.еркін өрістің толқындық сипатын анықтау үшін 9,1 теңдеулер жүйесін талдайық. Ол үшін бірінші теңдеудің 2-жағынада rot операторын қолданайық. $rotrot\,,\vec{E}=rot\left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right)$ $rotrot\,\vec{a}=grad\div\vec{a}-\Delta\vec{a}$ екенін ескерсек :

$graddiv\,\vec{E}-\Delta\vec{E}=\frac{-\partial}{\partial t}rot\,\vec{B}$, $graddiv\,\vec{E}-\Delta\vec{E}=\frac{-1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$, $\Delta\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$ (9.2)

Дәл осы сияқты 3-4 теңдеулерді пайдалансақ. $\Delta\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}=0$ **(9,3)**

Бұл теңдеулер (4-лекцияда) қарастырылған. Толқындық теңдеулер болып табылады және олардың шешімі мына түрде жазылады.

$$\begin{cases}\vec{E}=\vec{E}\left(t-\frac{\vec{k}_0\vec{r}}{c}\right); \\ \vec{B}=\vec{B}\left(t-\frac{\vec{k}_0\vec{r}}{c}\right)\end{cases} \quad (9.4)$$

9.4 өрнектер жазық толқындардың теңдеуі болып табылады. Олай болса еркін элентромагниттік орістің толқындық болып табылатына көз жеткіздік.

9.2. Жазық Электромагниттік толқынның кернеулігі мен индукция векторы.

9,2 және 9,3-өрнектен өрістің толқынды екенін дәлелдейді, бірақ еркін эктромагниттік өрістердің ерекшеліктерін анықтау үшін вакуумдағы толқындық теңдеулерді потенциалдар арқылы жазған

ыңғайлы: $\begin{cases} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \; (9.5) \\ \Delta \vec{\varphi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial t^2} = 0 \; (9.6) \end{cases}$ мұндағы

$\vec{E} = -grad\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \vec{B} rot \vec{A}$, сонымен қатар $div \{ \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial \iota} = 0 ¿$ Лоренц колибровкасы екенін ескерейік.

(9,5)(9.6)-ші теңдеулерге 2-шарт қолданайық.($\varphi = 0, \div \vec{A}$=0) (9.7)
(9.7)- шартты потенциалдардың толқындық колибровкасы деп аталады. Бұл шартты тек қана заряды жоқ кеңістікте($\rho = 0$) жағдайда орындалады.

Сонымен 9,7 шартты ескерсек $\left.\begin{matrix} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \\ ¿ \vec{A} = 0 \\ \vec{E} = \frac{-\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = rot \vec{A} \end{matrix}\right\} (9.8)$

(9.8) теңдеулер жүйесінің 1 және 2-теңдеулерінен$\vec{A} = \vec{A}\left(t - \frac{\vec{k_0}\vec{r}}{c}\right)$, $\vec{k_0}$- бағытытолқын фронтының

бағытымен сәйкес келетін бірлік вектор. 9,8-теңдеулер жүйесінің 3-теңдеуінен: $\vec{E} = -\dot{\vec{A}}$,

$\vec{B} = rot \vec{A} = [\nabla \vec{A}] = \left[\nabla \left(t - \frac{\vec{k_0}\vec{r}}{c}\right)\dot{\vec{A}}\right] = \frac{1}{c}[\dot{\vec{A}} \vec{k_0}] = \frac{1}{c}[\vec{k_0}\vec{E}]$, Сонда $\vec{B} = \frac{1}{c}[\vec{k_0}\vec{E}]$ (9.10) Осы өрнектен

$(9.10)\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}\left(t - \frac{\vec{k_0}\vec{r}}{c}\right). \\ \vec{B} = \vec{B}\left(t - \frac{\vec{k_0}\vec{r}}{c}\right) \end{cases}$ мұндағы$\vec{E}$ *және* $\vec{B}$ векторлары өзара $|\vec{B}'| = \frac{1}{c}|\vec{E}|$ (9.11¿)

9.3
Классикалық электродинамикада жазық толқынның дербес жағдайы яғни гармоникалық (монохроматты) толқындар үлкен маңызға ие.Олар үшін мына өрнектер жазылады :

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - t)$$
$$\vec{E} = -\vec{A}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - t)$$

$\vec{B} = [\vec{A}_0 \vec{k}] \sin(\vec{k}\vec{r} - t)$
(9.12)2-ші және 3 теңдеулерді мына түрде жазған ыңғайлы
$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - t)$(9.12*)
$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - t)$
Өйткені -ω$\vec{A}_0$=$\vec{E}$
[$\vec{A}_0\vec{k}$]=$\vec{B}_0$ мұндағы
$\vec{B} = \frac{1}{e}[\vec{k}\vec{E}]$E⊥k k=$\frac{❑}{c}$ $k_0 = \frac{\vec{k}}{k}$
Сонымен еркін өрістің гармоникалық құраушылары болады,олардың дербес шешімдері келесі функциялар түрінде беріледі

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - t)}$$
$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - t)}$$

9.4

Еркін электрмагниттік өрісі сипаттаушы супер позиция принципі бойынша оның мүмкін болатын монохраматты құраушының ($\mu . \partial$ жиілік, амплитуда, таралу бағыты) құраушының жиынтығы кіреді. Кез келген өр-ң гарм-қ құраушысын 2 гарм-ң (өзара 1, алдын ала бағыты және амплитудасы берілген) жиын-ы ретінде қарасиыруға болады. Сонда**:**

$$\vec{E}_0(\vec{k})=\vec{e}_1 E_{01}\left(\vec{k}\right)+\vec{e}_2 E_{02}(\vec{k}) \qquad (9.13)$$

Олай болса

$$\vec{E}=\int(\vec{e}_1 E_{01}\left(\vec{k}\right)*e^{i\left(x^2\vec{r}-\cot\right)}+\vec{e}_2 E_{02}(\vec{k})e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\cot\right)})d\vec{k}$$

Толқын жазық поляриз-к д.а. Егер e вект-ң бағыты тұрақты болса.

Бұл анықтама сәйкес монохраматты толқ-р жазық полярз-н толқ-а жатады.

Толқ-ң поляр-ң 2-ші бір түрін қ-қ. Екі гармон-ң (толқ-ң) жиіліктері бірдей болсын, бірақ бост. Фаза-ы әртүрлі болсын. Соныменқатар ол-ң бір құраушысы $\vec{e}_1 E_1$ол 2-сі $\vec{e}_2 E_2$болсын. Сонда:

$$\begin{cases}\vec{E}_x=E_{01}\cos(wt-kz) & \dfrac{E_x^2}{E_{01}^2}+\dfrac{E_y^2}{E_{02}^2}=1 \\ \vec{E}_y=E_{02}\sin(wt-kz) & \end{cases} \qquad (9.14)$$

(9.14) шартты қанағат-н толқ-р эллиптикалық полярз-н т-р б. Т.

9.5

Жалпы жағдайда жүйеде еркін қозғалған зарядтар жүйесі үшін φжәне A потенциалдары 5-ші лекциядағы (5.1)-өрнекпен

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi E_0}\int_v \frac{p(\vec{r_0},t-\frac{\acute{r}}{c})}{\acute{r}}\,dv \qquad (9.15)$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\vec{j}(\vec{r_0},t-\frac{\acute{r}}{c})}{\acute{r}}\,dv_0 \qquad (9.15) \qquad \text{сипатталады.}$$

Бұл өрнектермен нақты потенциалдарды есептеп анықтауда кешігуді ескеру қажет болғандықтан белгілі бір қиындықтар туындайды. Сол себепті өрісті есептеуде тек жуықтап есептеу мүмкін болады. Әсіресе, электр бейтарап зарядтар жүйесінің кеңістіктің белгілі бір шектеулі аймағын алып жатқан жағдайдағы одан өте алыс қашықтықтағы өрістін қарастыру маңызды. Ол үшін 5-ші лекциядағы суретке сәйкес r_0<< r жағдайын қарастырайық. Бұл жағдайда

$$\frac{1}{\acute{r}}=\frac{1}{|\overrightarrow{r-\vec{r}_0}|}=\frac{1}{r}+(\text{grad }\frac{1}{r})(-\vec{r_0})=\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\vec{r_0}}{r^3}$$

яғни:

$$\acute{r}=|\vec{r}-\vec{r_0}|=r+(\text{grad } r)(-\vec{r_0})=r-\frac{\vec{r}\vec{r_0}}{r}$$

Дәл осы сияқты (9.15)-өрнектегі

$$t-\frac{\acute{r}}{c}=t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{r}\vec{r_0}}{r*c}=\tau+\frac{\vec{r}\vec{r_0}}{r*c}$$

Мұндағы: $(t-\frac{r}{c})=\tau$

Ал, $\frac{\vec{r}}{r}=\vec{n}$деп белгілесек, онда p және $\vec{j}$функцияларын қатарға жіктегенде

$$p(\vec{r_0},\tau+\frac{\vec{n}*\vec{r_0}}{c})$$

$$\vec{j}(\vec{r_0},\tau+\frac{\vec{n}\vec{r_0}}{c}) \qquad (9.16)$$

(9.17) $\begin{cases} p\left(\vec{r}_0,\tau+\frac{\vec{n}\vec{r}_0}{c}\right)=p\left(\vec{r}_0\right)+p\left(\tau+\frac{\vec{n}\vec{r}_0}{c}\right)=p\left(\vec{r}_0\right)+\frac{\vec{n}\vec{r}_0}{c}p(\tau) \\ \vec{j}\left(\vec{r}_0,\tau+\frac{\vec{n}\vec{r}_0}{c}\right)=\vec{j}\left(\vec{r}_0\right)+\vec{j}\left(\tau+\frac{\vec{n}\vec{r}_0}{c}\right)=\vec{j}\left(\vec{r}_0\right)+\frac{\vec{n}\vec{r}_0}{c}p(\tau) \end{cases}$

¿

(9.17) өрнекті (9.15) өрнекке қойсақ:

$\varphi=k\int_{v_0}\frac{\rho(\vec{r}_{0,}\tau)}{r}dV_0+k\int_{v_0}\frac{\rho(\vec{r}_{0,}\tau)\vec{r}_{0,}\vec{n}}{r^2}dV_0+k\int_{v_0}\frac{\rho(\vec{r}_{0,}\tau)\vec{r}_{0,}\vec{n}}{cr}dV_{0+\ldots}(9.18)$

$\vec{A}=f\int_{v_0}\frac{\vec{I}(\vec{r}_{0,}\tau)}{r}dV_0+f\int_{v_0}\frac{\vec{I}(\vec{r}_{0,}\tau)\vec{r}_{0,}\vec{n}}{r^2}dV_0+f\int_{v_0}\frac{\vec{I}(\vec{r}_{0,}\tau)\vec{r}_{0,}\vec{n}}{cr}+dV_0(9.19)$Бұл өрістің потенциалдарының жуықталған өрнектері. Осы өрнектерді талдайық, $\varphi=k\int_{v_0}\frac{\rho(\vec{r}_{0,}\tau)}{r}dV_0=\frac{k}{r}\int_{v_0}\rho(\vec{r}_{0,}\tau)dV_0=k\frac{Q}{r};$

$\varphi=k\frac{Q}{r};(9.20)$ Бұл өрнек жүйенің зарядының шамасына тең. Q нүктелік зарядтың потенциалдық өрнегі болып табылады.Егер жүйе электр жағынан бейтарап болса, онда (9.20) өрнек нолге тең болады. (9.18) өрнектің 2-ші құраушысын қарастырайық:

$\varphi=k\int_{v_0}\frac{\rho(\vec{r}_{0,}\tau)\vec{r}_{0,}\vec{n}}{r^2}dV_0=\frac{k\vec{n}}{r^2}\int_{v_0}\rho\vec{r}_{0,}(\vec{r}_{0,}\tau)dV_0=\frac{k\vec{n}}{r^2}\vec{p};\text{ ягни },\varphi=\frac{k\vec{n}}{r^2}\vec{p}(9.21)$ (9.21) өрнек толқындық сипатқа ие және жүйенің электрлік дипольдік моментімен анықталатын потенциал өрнегі. (9.18) өрнектің 3- құраушысын қарастырайық:$\varphi=k\int_{v_0}\frac{\dot{\rho}(\vec{r}_{0,}\tau)\vec{r}_{0,}\vec{n}}{cr}=\frac{k\vec{n}}{cr}\int_{v_0}\rho\vec{r}_{0,}(\vec{r}_{0,}\tau)dV_0\frac{k\vec{n}}{cr}\dot{\vec{p}},\ \varphi=\frac{k}{cr}\vec{n}\dot{\vec{p}}(9.22)$

Дәл осы сияқты (9.19) ді, яғни вектор потенциалының өрнегін талқылайық немесе талдайық.Бұл өрнек электрлік дипольдік сәулелену өрнегі б.т. $\vec{A}=f\int_{v_0}\frac{\vec{I}(\vec{r}_{0,}\tau)}{r}dV_0=\frac{f}{r}\int_{v_0}\vec{I}(\vec{r}_{0,}\tau)dV_0;$

$\vec{A}=\frac{f}{r}\int_{v_0}\vec{I}(\vec{r}_{0,}\tau)dV_0;(9.23)$

$\vec{A}=f\int_{v_0}\frac{\vec{I}(\vec{r}_{0,}\tau)\vec{r}_{0,}\vec{n}}{r^2}dV_0=\frac{f}{r^2}\int_{V_0}(\vec{r}_{0,}\vec{n})\vec{I}(\vec{r}_{0,}\tau)dV_0=[\vec{m}\vec{n}]=\frac{f}{r^2}[\vec{m}\vec{n}];\vec{A}=\frac{f}{r^2}[\vec{m}\vec{n}](9.24)$ Дәл осы сияқты:

$\vec{A}=f\int_{v_0}\frac{\vec{I}(\vec{r}_{0,}\tau)\vec{r}_{0,}\vec{n}}{r^2}dV_0=\frac{f}{cr}\int_{V_0}(\vec{r}_{0,}\vec{n})\dot{\vec{I}}(\vec{r}_{0,}\tau)dV_0=\frac{f}{cr}[\dot{\vec{m}}\vec{n}];\ \vec{A}=\frac{f}{cr}[\vec{m}\vec{n}];(9.26)$

9.6.

(9.22) және (9.23)-өрнектерді пайдаланып, өрістің $\vec{E}$ және $\vec{B}$ векторларының электрлік дипольдік сәулеленуін табайық. Ол үшін алдымен магнит индукциясын анықтайық.

$\vec{B}$=rot$\vec{A}$Мұндағы: $\vec{A}=\frac{k}{c^2*r}\dot{\vec{p}}$

$\vec{B}$=rot$\vec{A}$=rot$\frac{k}{c^2*r}\dot{\vec{p}}=\frac{f}{r}rot\dot{\vec{p}}$Векторлық анализ курсынан белгілі кез келген вектордың туындысының өрнегі:

rot$\dot{\vec{p}}$=rot$\vec{p}$(t-$\frac{r}{c}$)+rgrad$\frac{1}{r}\vec{p}$

Сонда: $\vec{B}=\frac{f}{r}$rot$\vec{p}$(t-$\frac{r}{c}$)+fgrad$\frac{1}{r}\vec{p}$ (9.26)

Олайболса:$\vec{E}$=c$[\vec{B}\vec{n}]=\frac{f}{r}[[\ddot{\vec{p}}\vec{n}]\vec{n}]$ (9.27)

(9.27)-өрнек-Электрлік дипольдік сәулеленудің өрнегі

9.7.
Өрістің $\vec{E}$ және $\vec{B}$ векторларын V¿ cжағдайында, яғни, электрлік дипольдік сәулеленудің интенсивтілігі моменттік дипольдік сәулеленудің интенсивтілігінен әлдеқайда көп жағдайда қарастырайық:

$$\vec{E}=-\frac{f}{cr}\left[\ddot{\vec{m}}\vec{n}\right] \quad (9.28)$$

$$\vec{B}=-\frac{f}{c^2 r}\left[\vec{n}\left[\ddot{\vec{m}}\vec{n}\right]\right]=\frac{1}{c}\left[\vec{n}\vec{E}\right] \quad (9.29)$$

Олай болса, магниттік дипольдік сәулелену жағдайда өріс сфералық толқындық сипатқа ие болады және жүйеде өте үлкен, тез өзгеретін токтардың болуының нәтижесінде магниттік дипольдік сәулеленудің орын алатындығын болжауға болады.

10.1

Электромагниттік өрістің негізгі теңдеулері және олардың шешімдері мен олардың шығатын салдарлар ИСЖ-сі үшін орынды,электромагниттік құбылыстардың релятивистік сипаты Лоренц күштеріне қатысты электродинамиканың негізгі заңдары мен Электромагниттік шамалардың қасиеттерінің нақты түрленулері ковариантты болатындығын көрсетеді,Лоренц түрлендірулерін былайша жазайық. $X'_\alpha=\sum_{\beta=0}^{3} ¿\alpha\beta\, X_\beta$

Мұндағы $\alpha,\beta=0,1,2,3\ldots\ldots ¿\alpha\beta - ¿¿$ Лорнец түрлендірулерінің матрицасының элементтері. Лорнец түрлендірулерінің матрицасының элементтері мына түрде жазылады

¿¿ (10.2)

(10.1)ші өрнектегі X'_α, X_β - төрт өлшемдегі кеңістіктегі нүктелердің келесі координаталарына сәйкес келетін радиус векторлары¿Яғни $x_\alpha=(ict, x, y, z)$

Көп жағдайда қысқаша жазу үшін $x_\alpha=(ict,\vec{r})$

$\vec{r}=\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z$

Теңдеудің ковариантылығы Электромагниттік өріс заряд жүйесін сипаттайтын шамалар немесе сколяр шамалар не векторлық шамалар не Лоренц түрлендірулерінің тензоры болуы мүмкін екендігін көрсетеді.

k- санақ жүйесінен k'санақ жүйесіне көшкенде

1)сколяр шамалар үшін көшу заңы$f'=f$(10.3,1)

2)Векторлық шамалар үшін$A'_\alpha=\sum_{i=1}^{3} ¿\alpha\beta ¿ A_\beta$

3)тензор үшін$F'_{\alpha\beta}=¿\gamma\delta ¿\alpha\delta ¿\beta\delta F_{\gamma\delta}$

<u>10,2</u>
Электромагниттік өрістің φ және а потенциялдарына оралайық, скаляр және вектор потенциялдарды матрица қатарына формальды түрде біріктірейік: $A_a=\begin{pmatrix}\frac{i}{c}\varphi\\ A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix}$

Төрт операторлы Даламбер теңдеуін қолданайық:

$$\square = \frac{-1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2}{dx_0^2} + \frac{d^2}{x^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{d\,z^2} \quad (10.4)$$

Яғни

$$\square = \frac{d^2}{d\,x_0^2} + \frac{d^2}{d\,x_1^2} + \frac{d^2}{dx_2^2} + \frac{d^2}{dx_3^2} (10.5)$$

(10.5)- өрнек Лоренц түрлендірулерінің скаляры депаталады.
Электромагниттік өрістің потенциялдар арқылы жазылған өрнегі:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle \vec{A} = \frac{-1}{c^2}\frac{d^2 A}{dt^2} = -\mu_0 \vec{j} \\ \triangle \varphi = \frac{1}{c^2}\frac{d^2 \varphi}{d\,t^2} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} \end{array}\right\} (*)$$

(10,5)- теңдеуге қарап былайша жазуға болады:

$$\triangle A_\alpha = -\mu_0 \vec{j}_\alpha (10.6)$$

(10.6)-теңдеудің оң жағында Лоренц түрлендірулерінің векторы жазылған ол: $\vec{j}_\alpha$
Сондықтан $A_\alpha - ¿$төрт өлшемді вектор, ал μ_o- түрлендірудің скаляры болып табылады.
Лоренц колибробкасының шарты бұл жағдайда былайша жазылады:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{dA_\alpha}{dx_\alpha} = 0\, немесе\, \nabla_\alpha A_\alpha = 0 (10,7)$$

Өріс теңдеулерінің төрт өлшемді формада жазылуы ол теңдеулерінің Лоренц түрлендірулеріне қатысты ковариантты екендігін көрсетеді. Сонымен қатар теңдеуге енетін шамаларды түрлендірулердің жалпы әдісін береді. Лоренц түрлендірулердің ковариантты екендігін көрсетеді, яғни бұл үш өлшемді кез-келген инерциялды санақ жүйесіне орынды екендігін көрсетеді.

10.3.

Сонымен өріс теңдеулерінің потенциалдар арқылы жазылуы Лоренц түрлендірулерінің коварянтты екендігін көрсетеді. Яғни, бұл 3 өлшемді кез-келген инерциалды санақ жүйесінеде орынды екенін көрсетеді.
Бір санақ жүйесінен екінші санақ жүйесіне көшкенде $\vec{E}$ және $\vec{B}$ векторлары өзгеруі мүмкін. Осы өзгерісті есептейік. Ол үшін екінші рангалы антисимметриялық тензор арқылы анықталатын шаманы қарастырайық.

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial X_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial X_\beta}, \qquad \vec{B} = rot\,\vec{A}, \vec{E} = -grad\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t};$$

екендігін ескеріп тензор элементін анықтайық

$$F_{\alpha\beta} = \left[\begin{array}{l} 0 \frac{i}{c} E_x \frac{i}{c} E_y \frac{i}{c} E_z \\ \frac{-i}{c} E_x 0\, B_z - B_y \\ \frac{-i}{c} E_x - B_z 0\, B_x \\ \frac{-i}{c} E_x B_y - B_x 0 \end{array}\right. \qquad (10.9)$$

Мұндағы, $F_{\alpha\beta} - ¿$электромагниттік өрістің тензоры деп аталады. Бұл шама өрістің электрлік және магниттік сипаттамасын береді, олай болса өрісті толық сипаттауға мүмкіндік береді.
Электромагниттік өрістің тензорының көмегімен Максвеллдің бірінші және үшінші теңдеулерінің коварянтты түрін алуға болады. Бірінші жұбының коварянттық түрін тензордың көмегімен былайша жазамыз:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial F_{\gamma\beta}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} = 0 \quad (10.10)$$

Мұндағы, α, β, γ әр түрлі мәндерді қабылдайды.
Максвеллдің теңдеуінің 2 жұбы тензордың көмегімен былай жазылады:

$$\sum_\beta \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \mu_0 \vec{j}_\alpha \quad (10.11)$$

(10.10) және (10.11) теңдеулер келесі ерекшеліктермен ерекшеленеді:
1) Тензор көмегімен сипатталатын бұл теңдеулер электр және магнит өрістерінің біртұтас екендігін, яғни оларды бөліп қарастыруға болмайтындығын көрсетеді. Ал электр және магнит өрісі деп бөлу шартты екенедігін көрсетеді.
2) Максвелл теңдеулерінің коварянттылығы ((10.10), (10.11)) электромагниттік өрістің табиғаты релятивистік екендігін көрсетеді.
3) 10.10 және 10.11 теңдеулер $\vec{E}$ және $\vec{B}$ векторларын бір инерциалды санақ жүйесінен екінші инерциалды санақ жүйесіне көшкенде түрленуін қарастыруға мүмкіндік береді.

10.4.

Электрамагниттік өрістің $\vec{E}$ және $\vec{B}$векторларының проекциялары $F_{\alpha\beta}$-тензорларының компаненттерімен байланысты болады. Сондықтан бір инерциялды санақ жүйесінен екінші инерциялды санақ жүйесіне көшкен кезде тензорлық шамалардың түрленудің жалпы ережесіне сәйкес былайшы жазылады.

$$F_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} A_{\alpha\gamma} A_{\beta\gamma} F_{\gamma б}$$

Индекске қажетті шамаларды бере отырып 10,9 матрица көмегімен $\vec{E}$ және $\vec{B}$ векторларының проекцияларын алуға болады.

$$E_x' = E_x \; B_x' = B_x$$

$$E_y' = \frac{E_y - V B_x}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \; B_y' = \frac{B_y + \frac{V}{C^2} E_z}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \quad (10.12)$$

$$E_z' = \frac{E_z + V B_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \; B_z' = \frac{B_z - \frac{V}{c} E_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

Кері қарай түрлендіру жылдамдықтың таңбасына қарай болады.

$$E_x = E_x' \; B_x = B_x'$$

$$E_y = \frac{E_y' + V B_x}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \; B_y = \frac{B_y' - \frac{V}{C^2} E_z}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \quad (10,13)$$

$$E_z = \frac{E_z' - V B_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \; B_z = \frac{B_z' + \frac{V}{c} E_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

(10,12-10,13) теңдеулерден электромагниттік өрістер электірлік және магниттік құраушыларды шартты екендігін көруге болады, сонымен қатар өрістің электірлік және магниттік қасиеттерінің білінуі санақ жүйесінің таңдап алуға тәуелді екенін байқауға болады. Релативистік физикада шамалардың абсалюттік мәндері ерекше маңызға ие электромагниттік өріс үшін шамалардың инварианттық мәнін алу үшін Лоренц түрлендірулерінің скаляр мәнін пайдаланады.

$$\sum_{\alpha}\sum_{\beta} F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}=2\left(B^2-\frac{1}{c^2}E^2\right.$$

Мұндағы: $B^2-\frac{1}{c^2}E^2=I_n V^{(1)}$

(10.12) - өрнекті қолдансақ өріс векторларының скаляр көбейтіндісі $\vec{E}\vec{B}=I_n V^{(1)}$екендігі шығады.

10.5.

Жарық көзінің және қабылдаушының бақылаушыға тқатысты қозғалу жылдамдығына байланысты толқынның жиілігінің өзгеру құбылысын жарық үшін Доплер эффектісі болып табылады. Электромагниттік өріс релятивистік қасиетге ие болғандықтан онымен байланысты болытын барлық құбылыстар мен эффектілер релятивистік табиғатқат ие болады. Жарық үшін Доплер құбылысыда релятивистік табиғатқа ие. Олай болса, огы қарастыру үшін Лоренц теңдеуін (4 вектормен) пайдаланамыз.
Жазық электромагниттік толқын вакумда иновариантттық жылдамдықпен тарайды, яғни барлық ИСЖ да оның жылдамдығы **с-**ға тең. Электромагниттік өрістің басқада иновarианттарын (10.15 және 10.16) пайдаланып $\vec{E}\, және\, \vec{B}$ векторының өзара перпендикуляр екендігін және **E=CD**
Өрнегінің барлық санақ жүйесінде орындалатынын қорытып алуға болады. Сонымен қатар $\vec{E}\, және\, \vec{B}$ векторының бірдей фазада тербелетіндігін және оның барлық фазада өзгермей қалатындығын, яғни фаза

$$\varphi=\vec{k}\vec{r}-\omega t$$

Лоренйтің скаляр екендігін көрсетеді. Фаза өрнегіндегі $\vec{k}-¿$толқындық векторы, ω**-** тербеліс жиілігі бір санақ жүйесінен екінші санақ жүйесіне өткенде түрленеді.
Бір СЖ- не екінші СЖ-не көшкенде $\vec{k}-¿$толқындық векторының өзгеруі – **жарықтың аберациясы** деп аталаы.
Тербеліс жиілігн (ω) құбылысы – **Доплер эффектісі** деп аталады.
Барлық санақ жүйесінің тең құқылы толқын көзі оның қабылдағышнның бір-бірімен салыстырғандағы қозғалыс жылдамдығына байланысты жиіліктің өзгеру құбылысы **Доплер эффектісі** деген атпен белгілі.
ЭМ толқын үшін Доплер эффектісін қарастырайық. Ол үшін тербеліс жиілігінің (ω) толқын көзінің қозғалыс жылдамдығына тәуелділігін тағайындайық.

1-суреттен көрініп тұрғандай таңдап алынған екі санақ жүйесінің **ох** және **о'х'** координаталары параллель болсын және $\vec{k}\,'$санақ жүйесі **k** мен салыстырғанда $\vec{\vartheta}$ тұрақты жылдамдықпен қозғалысын. Бұл жағдайда фаза- скаляр шаманы екі төрт вектордың көбейтіндісімен жазуға болады.

$\varphi=k_\alpha * x_\alpha$ (10.17) мұндағы: $k_\alpha=\left(\frac{i\omega}{c},\vec{k}\right)$

(10.3.2)- формуланы пайдалана отырып 4-векторды былайша жазуға болады. $k'_\alpha = \sum_\beta \Lambda_{\alpha\beta} k_\alpha$ (10.18)

Лоренц түрлендірулерінің матрицасы негізінде (10.2) толқындық вектордың уақыттық құраушысын былайша жазады:

$$k'_0 = \frac{k_0 - \frac{i\vartheta}{c} k_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\vartheta}{c}\right)^2}} \qquad (10.19)$$

Суреттен көрініп тұрғандай $k_1 = k_x = k\cos\theta$.Олай болса, $k_0 = \frac{\omega}{c}$

Ал, $k'_0 = \frac{i\omega}{c}$екендігін ескерсек, жиіліктің өрнегі: $\omega' = \frac{\omega\left(1 - \frac{\vartheta}{c}\cos\theta\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\vartheta}{c}\right)^2}}$ (10.20)

Толқын көзі тыныштықта тұратын жүйеге қатысты толқынның жиілігін - ω_0деп белгілеп, оны меншікті жиілік деп алайық. Сонда қозғалыстағы көзіне байланысты санақ жүйесінде жиіліктің өзгеруі былайша жазылады.

$$\omega = \frac{\omega_0\left(\sqrt{1 - \left(\frac{\vartheta}{c}\right)^2}\right)}{1 - \frac{\vartheta}{c}\cos\theta}$$

(10.21) Қозғалыстағы толқын көзіне байланысты жиіліктің өзгерісін түсіндіретін Доплер құбылысының формуласы.

Егер толқын серпімді толқын болған жағдайда толқын көзі қозғалған кезде (10.21)- өрнек мына түрге келеді:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{\vartheta}{c}\cos\theta} (10.21)¿$$

Егер толқын қабылдағыш қозғалған жағдайда бұл өрнекбылайша жазылады: $\omega = \omega_0\left(1 + \frac{\vartheta}{c}\cos\theta\right)$

(10.22)

Доплер құбылысының нақты маңызды жағдайлар үшін теңдеулерін жазайық:

1) Толқын көзі оны қабылдағыштан алшақтап бара жатқандағы, яғни бұрыш-180° болса:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{\vartheta}{c}}{1 - \frac{\vartheta}{c}}} \; \omega < \omega_0$$

2) Толқын көзі оны қабылдағғышқа жақындап келе жатқан жағдай үшін яғни: $\theta = 0^\circ$,

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{\vartheta}{c}}{1 - \frac{\vartheta}{c}}} \; \omega > \omega_0$$

3) Толқын көзі оны қабылдағғышқа 90° бұрыш жасай қозғалса, бұл Доплердің көлденең эффектісі деп аталады. $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\vartheta}{c}\right)^2}$

11.3

Сыртқы электр өрісіне заттық ортаны енгізгенде заттың ішіндегі еркін немесе байланысқан зарядтардың қайта таралуын қарастырайық.

1)Сыртқы өріске диэлектрик ортаны енгізсек.Мысалы: диэлектрик сыртқы өріс жоқ
Сыртқы өріс жоқ кезде диэлектрик ортада байланысқан зарядтардыңорналасуы бейберекет.Осы диэлектриктерді кернеулігі сыртқы өріске орналастырсақ.Өрістердің әсерінен байланысқан зарядтар сыртқы өрістің бағытына бағдарлана орналаса бастайды.Бұл құбылыс диэлектриктердің поляризациясы деп аталады. $- \leftarrow + ¿ ¿$

Байланысқан заряд немесе диполь моменті оны $\vec{P} = q\vec{l}$
Диэлектриктердің поляризацияланғанын сипаттау үшін поляризация векторы немесе поляризацияланғыш деп аталады.Векторлық шама енгізіледі. $\vec{p} = \frac{d\vec{p}}{dv}$ (11.3)

Поляризация векторы деп диэлектриктің дипольдік моментінің тығыздығын айтады.Поляризация векторы диэлектриктің әртүрлі нүктесінде әртүрлі мәнге ие болуы мүмкін және уақытқа байл *Место для формулы*.анысты өзгеріп отыруы мүмкін
$p = ¿\vec{p}(\vec{r}, t) ¿$ Микроскопиялық тұрғыдан қарастырғандағы поляризация векторы байланысқан зарядтардың диэлектрик ішінде таралуына байланысты болады. $\vec{p} = \vec{r} q$dq=$\rho_{бай} dv$
D$\vec{p} = \vec{r} \rho_{бай} dv (4)$
(4)=(3) қарастырайық

$p = ¿\vec{r} \rho_{бай} ¿$ (11.5) $\rho_{бай} = \frac{\vec{p}}{r^2} \vec{r}$ (11.6)

$\varphi = k \int_{-v_0}^{v} \frac{\rho_{бай} dv}{r} = -k \int \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} dv$ (11.7)

(11.7) өрнектердің интеграл астындағы шаманы түрлендірейік

$\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} - ¿$ қосымшадағы 15 формуланы пайдаланып $\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}$=-$\vec{p}$grad$\frac{1}{r}$ Мұндағы

$Pgrad \frac{1}{r} = ¿\left(\vec{P}\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} \div \vec{P}$ (*)

(*) өрнекті ескеріп

$\frac{\vec{pr}}{r^3} = -¿\left(\vec{p}\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} \div \vec{P}$ (**)

$\varphi = k \int ¿\left(\vec{P}\frac{1}{r}\right) dv - k \int \frac{¿\vec{P}}{r} dv$ (11.8)

(11.8)өрнектерінің 1ші құраушысы ара қашықтықтары кері пропорционал,олай болса алыс қашықтықтары(шексіздікте) 0-ге айналады.Олай болса: $\varphi = -k \int \frac{¿\vec{p}}{r} dv$ (11.8*)

(11.8*)өрнекті (11.7) өрнекпен салыстырсақ:

$\rho_{бай} = -¿\vec{p}$ (11.9)

Тәжриебеде көрсеткендей поляризация векторы сыртқы өрнектердің кернеулік векторының шамасына тура пропорционал (тәуелді) болады.Ол тәуелділік мына түрде жазылады:

$\vec{p} = X \cdot \varepsilon_0 \vec{E}$ (11.10)

X-импирикалық тәсілмен анықталатын коэффициенттері ол заттың магниттік қабылдағыштығы деп аталады.Бұл шама барлық заттар үшін оң X>0 сырты өрнек кернеулік векторы тәуелді болмайды,өлшем бірлігі жоқ.
(11.10) өрнекті (11.9) өрнекке қойсақ

$\rho_{бай} = -E_0 \div (X\vec{E})$ (11.11)

11.4.

Байланысқан зарядтар үшін үзіліксіз теңдеуін жазайық.

$$¿\vec{j}_{байл}+\frac{\partial\rho_{байл}}{\partial t}=0$$

(11.9) өрнекке қойсақ

$$¿\vec{j}_{байл}=\frac{-\partial\div\vec{P}}{\partial t}$$

$$¿\vec{j}_{байл}=¿(\frac{\partial\vec{P}}{\partial t})$$

$\vec{j}_{байл}=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$ (11.12)

(11.10) $\rightarrow$ (11.12) қойсақ

Сонда $\vec{j}_n=\chi\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$(11.13)

$\vec{j}_{байл}$ орнына $\vec{j}_n$ деп белгілеу себебі: байланысқан зарядтардың ток тығыздығының сыртқы эектр өрісі әсерінен ығысуына байланысты болғандықтан, оны **поляризация тогының тығыздығы** деп атай береді.

Бұл кезінде Ампер айтқан әйгілі гипотезасын растайды.

Әрбір молекулалық токқа элементар магниттік диполь сәйкес келеді. Осы элементар дипольдің сипатына қарай заттарды 3 топқа бөлуге болады:

1) Парамагнетиктер
2) Диамагнетиктер
3) Ферромагнетиктер

Пара және диамагнетиктер мен ферромагнетиктердің ерекшеліктерін қарастырайық.

Диамагнетиктердің молекулалық магниттік моменті сырты магнит өрісі енгенде оны әлсірететіндей болып сыртқы өріске қарсы бағдарланады, бірақ сыртқы өрістен алып тастағанда қайтадан бастапқы қалпына оралады.

Ферромагнетиктердің молекулалық магнит моменті сыртқы магнит өрісінің әсерінен пайда болып, өрісті өте күшейтеді және сыртқы өрістен алып шыққанда да ұзақ уақыт сақталады. Заттың макроскопиялық магниттік қасиеттері **магниттелу векторы** деп аталатын шамамен сипатталады.

$$\vec{j}=\frac{d\vec{m}}{dV}$$

Магниттелу векторы деп магниттік моменттің тығыздығын айтады.

Вектор потенциалдың өрнегін жазайық

$$\vec{A}=f\int_{-r}^{0}\frac{\vec{j}_{байл}}{r}dV$$

$\vec{j}_{байл}dV=d\vec{m}$. Олай болса (7.9) өрнек

$$d\vec{A}=f\frac{[d\vec{m}\vec{r}]}{r^3}$$

$\vec{A}=-f\int\frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3}dV$ (11.14)

II 22-ші өрнегінен $rot\left[\frac{\vec{j}}{r}\right]=\frac{1}{r}rot\,\vec{j}+\frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3}$

$\frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3}=rot\left[\frac{\vec{j}}{r}\right]-\frac{1}{r}rot\,\vec{j}$ (**)

(**) $\rightarrow$ (11.14) қойсақ:

$\vec{A}=\frac{1}{r}f\int rot\,\vec{j}\,dV-f\int rot\left[\frac{\vec{j}}{r}\right]dV$ (11.15)

Шексіздікте (11.15) өрнектің оң жағы интеграл 0-ге тең болып кететіңдіктен.

$\vec{A}=f\int\frac{rot\,\vec{j}}{r}dV$ (11.16)

(11.16) өрнекті (5.1) өрнекпен салыстырсақ

$j_{байл} = rot\,\vec{j}$(11.17)
Эксперименттер көрсеткендей магниттелу векторы сыртқы магнит өрісі индукция векторына тура пропорционал және мына өрнекпен анықталады.

$\vec{j} = \frac{\propto}{\mu_0}\vec{B}$ (11.18)

$\propto$ - магниттік қабылдағыш деп аталады. Seшамаларымен байланысты анықтайтын коэффициент. Ол байланыс мына түрде жазылады.

$\propto = \frac{Se}{1+Se}$ (***)

$\vec{j} = \frac{Se}{\mu_0(1+Se)}\vec{B}$(11.19)

(11.17) өрнекті ток тығыздығының құраушысын **магниттелу тогы**деп те атайды $\vec{j}_м$ деп белгіленеді.

$\vec{j}_м = rot\left(\frac{Se}{\mu_0(1+Se)}\vec{B}\right) = \frac{1}{\mu_0}rot\frac{Se}{1+Se}\vec{B}$(11.20)

11.5

Алынған мәліметтерді пайдаланып, зат ішіндегі өріс үшін Максвелл теңдеулерін жазайық.

$rot\,\vec{E} = \frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}$

$¿\vec{B} = 0$

$\frac{1}{\mu_o}rot\,\vec{B} = \varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + rot\,\vec{j} + \vec{j}$ (11.20)

$¿\vec{E} = \frac{-¿\vec{P}}{\varepsilon_o} + \frac{\rho}{\varepsilon_o}$

Бұл теңдеулержүйесінің (3) және (4) теңдеулерінен былайша түрлендірейік.

$\frac{1}{\mu_o}rot\,\vec{B} - rot\,\vec{j} = \varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$

$rot\left(\frac{1}{\mu_o}\vec{B} - \vec{j}\right) = \varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{dt} + \vec{j}$

$\frac{1}{\mu_o}\vec{B} - \vec{j} = \vec{H}$ (11.21)

$div\varepsilon_o\vec{E} + ¿\vec{P} = \rho$

$¿(\varepsilon_o\vec{E} + \vec{P}) = \rho$

$\varepsilon_o\vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$ (11.22)

Сонымен:

$\frac{1}{\mu_o}\vec{B} - \vec{j} = \vec{H}$ (11.23)

$\varepsilon_o\vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$

Осыларды ескерсек зат ішіндегі өріс үшін Максвелл теңдеулері мына түрде жазылады:

$rot\,\vec{E} = \frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}$

$¿\vec{B} = 0$

$rot\,\vec{H} = \varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$

$¿\vec{D} = \rho$ (11.24)

(11.19)$\rightarrow$(11.24) қойсақ:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o(1+\c{s}e)}$$

Мұндағы:$1+\c{s}e = \mu \rightarrow$ ортаның магниттік өтімділігі деп аталатын пропорционалдық коэффициеті.
Сонымен:

$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu\mu_o}$ (11.25)

$\vec{H}$-магнит өрісінің кернеулік векторы деп аталады.

Дәл осы сияқты:

$$\vec{D}=\varepsilon_o(1+\chi)\vec{E}$$

Мұндағы :$1+\chi=\mathcal{E}\rightarrow$ ортаның диэлектрлік өтімділігі деп аталатын пропорционалдық коэффициенті.

Сонда:

$\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_o\vec{E}$ (11.26)

Мұндағы:$\vec{D}-$¿электр өрісінің индукция (ығысу) векторы деп аталады.

11.6

Зат ішіндегі өрістің вакуумдағы өріспен салыстырғанда кейбір ерекшеліктері байқалады. Яғни, өрістің $\vec{E}$ және $\vec{B}$ векторларын анықтағанда заряд және ток тығыздықтары мен қатар заттың ерекшеліктерін сипаттайтын ¿$(\vec{r})$, ¿$(\vec{r})$және ¿$(\vec{r})$шамаларда берілуі тиіс.

Мұндағы ɣ-заттың меншікті өткізгіштігі

Осыларды ескеріп зат ішіндегі өріс үшін Максвелл теңдеулерін жазсақ

$$\begin{cases} rot\,\vec{E}=\frac{-\partial\vec{B}}{\partial t} \\ ¿\vec{B}=0 \\ rot\,\vec{B}=\square_\circ\square_\circ\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\square_\circ\vec{j} \\ ¿\vec{E}=\frac{\square}{\square_\circ} \end{cases} \quad 11.27$$

$\vec{E}=grad+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$*және* $\vec{B}=rot\,\vec{A}$**екендігін ескерсек теңдеулердің потенциялдар арқылы мына түрде жазылады:**

$$\left.\begin{array}{l} \triangle\vec{A}-\frac{\square}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\square_\circ\vec{j} \\ \triangle-\frac{\square}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t}=\frac{-\square}{\square_\circ} \end{array}\right\} \quad 11.28$$

Мұндағы Лоренц колигрофкасы мына түрде жазылады: $¿\vec{A}+\frac{\square}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}=0$ 11.29

11.7

Заттық ортадағы өріс теңдеуінің жалпы шешімдерінде кейбір еркін функйиялар кездеседі. Нақты *есептерді шешкенде бұл функциялардан бастапқы және шекаралық шарттардың көмегімен құтылуға болады*

Шекаралық шарттар деп – заттық ортамен оны қоршап тұрған орта шекарасында , яғни бір ортадан екінші

1) *Максвелл теңдеуіне енетін* $\div$ *белгісінің астындағы* $\vec{D}$ *және* $\vec{B}$ *векторлары үшін* шекаралық шарттарды анықтайық. Ол үшін екі ортаны бөліп тұрған шекараның маңынан биіктігі аз ғана h шамасына тең цилиндрді бөліп алайық;

Цилиндрдің көлемі бойынша (11.24) –ші теңдіктің соңғы теңдеуін интегралдайық;

div$\vec{D}$ = ρ , $\int_V^{\square} di\vartheta\,dV=\int_V^{\square}\rho\,dV$, $\int_V^{\square} di\vartheta\,\vec{D}\,dV=Q$

Соңғы теңдеудің сол жағына Гаусс теоремасын қолдансақ; $\oint_S^{\square}\vec{D}\,d\vec{S}=Q$

Цилиндрдің толық беті $3-$ *беттен тұрады*

1) Табаны
2) Төбесі
3) Бүйір беті

$D_{2n}S_2+D_{б.б}-D_{1n}S_1=Q$, $S_1=S_2=S\, цилиндр\, табанының\, ауданы$, $S_{б.б}=2\,ПR*h\, бүйір\, бетінің\, ауданы\,.\, Сонда$,$\left(D_{2n}-D_{1n}\right)S+D_{б.б}*2\,ПRh=Q$
Егер цилиндрдің биіктігін біртіндепкішірейте берсек, яғни h —> 0 . Онда , $S_{б.б}=2\,П\,Rh\longrightarrow 0.\, Сонда$, $D_{2n}-D_{1n}=\left(\frac{Q}{S}\right)$

$D_{2n}-D_{1n}=\sigma$ (11.30) Сонымен өріс бір ортадан екінші ортаға өткенде электр өрісінің ығысу векторының нормаль құраушылары шекара зарядталған болған жағдайда шекара бетінің зарядының беттік тығыздығына тең шамаға өззгереді.

2) $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$екендігін ескерсек (11.30) –шы теңдеуден $\varepsilon_2\varepsilon_0 E_{2n}-\varepsilon_1\varepsilon_0 E=\sigma,\ \varepsilon_2 E_{2n}-\varepsilon_1 E_{1n}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (11.31)

*Егер*бет зарядталмаған болса , $\sigma=0.\,\varepsilon_2 E_{2n}=\varepsilon_1 E_{1n},\ \frac{E_{2n}}{E_{1n}}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ (11.32)

$\left(11.32\right)$-өрістің зарядталмаған бет арқылы өткенде электр өрісі векторы үшін шекаралық шарт болып табылады.

*Қ*орытынды.

а) (11.33) – өрнектен : Өріс зарядталған бет арқылы бір ортадан екінші ортаға өткенде электр өрісінің индукция векторының нормаль беттік заряд (σ) тығыздығына тең шамаға өзгеріске ұшырайды.

ə) өріс зарядталмаған бет арқылы (нормаль) құраушысы беттік бір ортадан екінші ортаға өткенде электр өрісінің кернеулік векторы нормаль құраушысы екі ортаның дтэлектрик өтімділігінің қатынасындай шамаға өзгереді.

3) Магнит өрісінің құраушылары үшін шекаралық шарттарды қарастырайық:

di$\vartheta\vec{B}=0$екі жағында(V)-көлем бойынша интегралдайық

$\int_V di\vartheta\vec{B}$dV=0, *Гаусс теоремасына сәйкес*, $\oint_S \vec{B}\,d\vec{S}=0,$

Цилиндр формалы кеңістіктің толық беті бойынша интегралдасақ,

$B_{2n}S+B_{б.б}*S_{б.б}-B_{1n}S=0,\quad (B_{2n}-B_{1n})S+B_{б.б}*2\,П\,Rh=0$, h—>0 Сонда 2ПRh—>0,

$B_{2n}-B_{1n}=\frac{0}{S}=0\,,B_{2n}-B_{1n}=0$

$B_{2n}=B_{1n}$ (11.33)

$\left(11.33\right)-¿$индукция векторының нормаль құраушылары үшін шекаралық шарт болып табылады. Бұл өрнектен мынадай қорытынды жасауға болады. Бір ортадан екінші ортаға өткенде магнит өрісінің индукция векторларының нормаль құраушылары өзгеріске ұшырамайды.

4) Магнит өрiісінің кернеулік векторының нормаль құраушылары үшін шекаралық шартты қарастырайық.

$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}$ =>$\vec{B}=\mu\mu_0\vec{H},\quad \mu_2\mu_0\vec{H}_{2n}=\mu_1\mu_0\vec{H}_{1n},\ \ Сонда,\ \frac{H_{2n}}{H_{1n}}=\frac{\mu_1}{\mu_2}$ (11.34)

$\left(11.34\right)$магнит өрісінің кернеулік векторының нормаль құраушысы үшін шекаралық шарт болып табылады. Одан мынадай қорытынды жасалады. Өріс бір ортадан екінші ортаға өткенде шекарадан магнит өрісінің кернеулік векторының нормаль құраушылары екі ортаның магнит өтімділіктерінің қатынасына тең шамаға өзгереді.

5) Енді өріс векторының ($\vec{E},\vec{B},\vec{D},\vec{H}$,)тангенциал құраушылары үшін шекаралық шарттарды қарастырайық. Ол үшін Максвелл теңдеулеріне енетін rot белгісінің астындағы шамаларды бөліп қарастырайық. Түсінікті болу үшін екі ортаның шекарасының маңынан кішкене контурды бөліп алайық.

(11..24)-ші теңдеулер жүйесінің 3-ші өрнегі , rot$\vec{H}$=$\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$+$\vec{J}$

Екі жағынанда ($\vec{S}$) аудан бойынша интеграл алайық , $\int_S rot\,\vec{H}\,d\vec{S}=\varepsilon_0\int\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}d\vec{S}+\int_S\vec{J}\,d\vec{S}$

*Сол*жағындағы өрнекке С токс теоремасын қолдансақ , $\oint_L \vec{H}\, d\vec{l} = \varepsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} + \int_S \vec{J}\, d\vec{S}$, *Мұндағы*, $\int_S \vec{J}\, dS = I\, \vec{S}$- арқылы өтетін толық ток. Сонда , $H_{2\tau} l - H_{1\tau} l + 2 H_{б.б} l_{б.б} = \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} + \vec{J}$ немесе, $\varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} = ¿ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} > \vec{S}$

Енді контурдың бүйір қабырғасын 0-ге ұмтылдырайық, $l_{б.б} \longrightarrow 0\; 2 H_{б.б} l_{б.б} = 0\, ал$, $< \frac{\overrightarrow{\partial D}}{\partial t} > \vec{S} + ¿$J= $J_{беттік}$, Олай болса, $H_{2\tau} - H_{1\tau} = J_{беттік}$ ¿ ¿

$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{J_{беттік}}{l}$ (11.35) магнит өрісінің кернеулік векторының тангенциал құраушысы үшін шекаралық шартболып табылады. Одан мынадай қорытынды жасалады. Бір ортадан екінші ортаға өткенде магнит өрісінің кернеулік векторының тангенциал құраушылары $\frac{J_{бет}}{l}$қатынасындай шамаға өзгереді. $\vec{H} = \frac{B}{\mu \mu_0} \frac{B_{2\tau}}{\mu_2 \mu_0} = \frac{B_{1\tau}}{\mu_1 \mu_0} \frac{B_{2\tau}}{\mu_2 \mu_0} - \frac{B_{1\tau}}{\mu_1 \mu_0} = \frac{J_{бет}}{l} \frac{B_{2\tau}}{B_{1\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ (11.36)

(11.36) магнит өрісінің индукция векторының тангенциал құраушысы үшін шекаралық шарт болып табылады. Бұдан мынадай қорытынды жасалады: бір ортадан екінші ортаға өткенде магнит өрісінің индукция векторының тангенциал құраушылары екі ортаның магнит өтімділіктерінің қатынасындай шамаға өзгереді.

7)Электр өрісінің кернеулік векторының тангенциал құраушылары бір ортадан екінші ортаға өткенде өзгермейді, ол Максвеллдің төртінші теңдеуінен көрініп тұр. Яғни $E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$немесе $E_{2\tau} = E_{1\tau}$ (11.37) өрнек электр өрісінің кернеулік векторының тангенциал құраушысы үшін шекаралық шарт болып табылады. Одан келесәдеей қорытынды жасауға болады: бір ортадан екінші ортаға өткенде электр өрісінің кернеулік векторының тангенциал құраушысы өзгеріссіз қалады.

8) (11.37) ші өрнектің көмегімен элнетр өрісінің (ығысу) векторының тангенциал құраушылары үшін шекаралық шартты қорытып алуға болады. $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ екендігін ескерсек $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon \varepsilon_0}$сонда $\frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2} = \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1}$;

$\frac{D_{2\tau}}{D_{1\tau}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$;

(11.38)–өрнек электр өрісі индукция векторының тангенциал құраушысы үшін шекаралық шарт болып табылады. Одан мынадай қорытынды жасалады:

Электр қрісі индкуция векторының тангенциал құраушысы екі ортаның электрлік қатынасындай шамаға өзгереді.Ток тығыздығының нормаль және тангенциал құраушылары үшін шекаралық шарттарды жазайық.

*Ом*заңының дифференциалдық түрде жазылуы, $\vec{J} = \gamma \vec{E}$

Тангенциал құраушысы үшін жазсақ, $\frac{J_{1\tau}}{J_{2\tau}} = \frac{\gamma_1 E_{1\tau}}{\gamma_2 E_{2\tau}}\; E_{1\tau} = E_{2\tau}$; $\frac{J_{1\tau}}{J_{2\tau}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ (11.39)

*Ток*тығыздықтары үшін шекаралық шарт. Бұдан мынадай қорытынды жасалады. Бір ортадан екінші ортаға өткенде ток тығыздықтарының тангенциал

11.8

Зат іщіндегі өрістің энергиясымен импульсын қарастырайық. Ол үшін 3 лекциядағы вакуумдағы электромагниттік өріс үшін энергиямен импульстың өрнектеріне 11.25 және 11.26 өрнектерді қолданып алуға болады.

3 лекцияның 3.8 өрнегін

$\frac{-d}{dt} \frac{1}{2}(Ɛ_{\circ}E^2 + \frac{B^2}{\mu_{\circ}}) = \frac{1}{\mu_{\circ}} \mathrm{div}[\vec{E}\vec{B} + \vec{j}\vec{E}$

Осы өрнекті заттық орта үшін жазсақ,

$-\frac{d}{dt} \frac{1}{2}(ƐƐ_{\circ}E^2 + \frac{B^2}{\mu\mu_{\circ}}) = \frac{1}{\mu\mu_{\circ}} \mathrm{div}[\vec{E}\vec{B}] + \vec{j}\vec{E}$

$\vec{E}=\frac{D}{\varepsilon\varepsilon_\circ}\vec{B}$=μμ$_\circ\vec{H}$қойсақ,

$\frac{-d}{dt}\frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}+\vec{B}\vec{H})$=div[$\vec{E}\vec{H}$]+$\vec{j}\vec{E}$ (11.41)

11.41 өрнек заттық орта үшін электромагниттік өрістің энергиясының заңы.
Мұндағы [$\vec{E}\vec{H}$]=ϭ-энергия ағынының тығыздығы
$\frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}+\vec{B}\vec{H})$=ω-энергия тығыздығы деп аталады.

Енді заттық ортадағы электромагниттік өрістің импульсының тығыздығының өрнегіне келейік. g=Ɛ$_\circ$[$\vec{E}\vec{B}$¿¿; Заттық орта үшін бұл өрнек, g=Ɛ$_\circ$[$\vec{E}\vec{B}$]=[ƐƐ$_\circ\vec{E}\vec{B}$] ; g=[$\vec{E}\vec{B}$¿¿ (11.42 ; заттық ортадағы импульс тығыздығының өрнегі. g=Ɛ$_\circ$[$\vec{E}\vec{B}$¿¿=[ƐƐ$_\circ\vec{E}\vec{B}$¿¿; g=[$\vec{E}\vec{B}$¿¿ (11.42). Заттық ортадағы импульс тығыздығының өрнегі.

12.1

Біртекті диэлектрик орта кеңістікті толтырсын. Мысалы ауа. Диелектріктерде тыныштық жағдайында $\vec{E}$ және $\vec{B}$ векторлары уақытқа тәуелді болмайды ал зарядтар қозғалмайды. Себебі диэлектрік ішіндегі зарядтар байланысқан. Бұл жағдай үшін Максвелл теңдеулері былай жазылады:

$\begin{cases} rot\,\vec{E}=0 \\ ¿\vec{D}=p \\ \vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \end{cases}$ (12.1) $\begin{cases} rot\,\vec{H}=0 \\ ¿\vec{B}=0 \\ \vec{B}=\mu\mu_0\vec{H} \end{cases}$ (12.2) Электростатикалық өрістегі диэлектриктер үшін Максвелл теңдеулері.Бұл жағдайда электростатикалық өріс те қана бір теңдеумен негізгі теңдеу болып табылатын div$\vec{D}=\rho$ өрнекпен сипатталады.Бұл теңдеудің интегралдық түрі $\int_v^{\square} ¿\vec{D}\,dv=\int_v^{\square}\rho dv$.

$\oint\vec{D}\,d\vec{S}=Q$ (12.3)

Осы өрнектен $\vec{E}$ векторын табайық ол үшін $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\to(12.3)\,қойсақ$, $\varepsilon\varepsilon_0\oint\vec{E}\,d\vec{S}=Q$, $\vec{S}=4\pi r^2$ туынды алсақ. $dS=8\pi rdr\,\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\oint 8\pi rdr=Q$, $8\pi\varepsilon\varepsilon_0\frac{\vec{E}*r^2}{2}=Q$, $E=\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}*Q}{r^2}$ Векторлық түрде

$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}*¿Q\vee\frac{\frac{¿}{\varepsilon r^2}*\vec{r}}{r}¿$. Дәл осы сияқты электростатикалық өрістің вакуумдегі жағдайына жазылған кернеулік векторының қрнегімен салыстырсақ айырмашылық ε-деғана. Олай болса электростатикалық өрістің потенциалының өрнегін дәл 6-лекциядағыдай жазуға болады. Тек ε-ді ескермейміз. $\varphi(\vec{r})=\frac{k}{q}\int_v^{\square}\frac{\rho(r)}{r'}dv_0+\frac{k}{\varepsilon}\int_{s_0}^{\square}\frac{\sigma(r_0)}{r'}dS_0+\frac{k}{\varepsilon}\int_{l_0}^{\square}\frac{\tau(r_0)}{r'}dl_0$, (12.5) Диэлектрік ортадағы екі зарядтың өзара әсерлесуін сипаттайтын Кулон заңы мына түрде жазылуы қажет:

$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}*|Q_1|*¿Q_2\vee\frac{\frac{¿}{\varepsilon r^2}*\vec{r}}{r}¿$; Олай болса электростатикалық өріс өрнектерідиэлектрик орта үшін және вакуумдың орта үшін жазылуында тек қана ε мен ерекшеленетініне көз жеткіздік.

12.2.

Электростатиканың негізгі есептерінің бірі зарядталған және электр жағынан бейтарап денелер жүйесі үшін өрістің $\vec{E}$ векторын анықтау болып табылады.
Электромагниттік өрістің негізгі теңдеуі болып $¿\vec{0}=\rho$теңдеуі саналады. Бұл теңдеуді потенциалдар арқылы жазсақ:$\Delta\varphi_\partial=-\rho(12.16)\vec{E}=-grad\varphi$екендігін ескерсек 12.6-Пуассон өрнегінің шешімі

$\Delta\varphi=\frac{-\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}(12.7)$

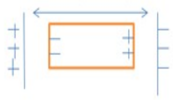
(12.6) теңдеу кез келген аймақ үшін шешімі табылатын теңдеу. Ол шешімдерді шекаралық шарттардың көмегімен реттейді.
Потенциал кеңістікте үздіксіз және 2-ортаның шекарасында да өзгеріске ұшырамайды.

(12.6) теңдеуден заттардағы өрістің потенциалын табу үшін еркін зарядтардың орналасуын білумен қатар диэлектриктердегі байланысқан зарядтардың таралуын да анықтау қажеттілігі туындайды. Ол үшін мына өрнектерді пайдаланамыз:

$$\rho_{байл}=-¿\vec{P}\,(11.9),\ \vec{P}=(\varepsilon-1)\,\varepsilon_0\vec{E}\,(11.10)$$

12.3

Орта мектептегі физика курсынан белгілі электростатикалық өріске өткізгішті енгізгенде ,зарядтар оның бетіне жинақталатындығы белгілі. Өріс болмаған жағдайда өткізгіштегі еркін зарядтардың тығыздығы 0-ге тең , кез келген макраскопиялық көлемде оң заряд пен теріс зарядтың



саны бірдей болады.

Сыртқы өрістің әсерінен зарядтар өткізгіштің бетіне дейін қозғалады және өткізгіштің бетінде σ зарядтың беттік тығыздығын туғызады ол өз кезегінде $\vec{E}_\sigma$ кернеулігін тудырады . зарядтардың өткізгіш бетіне дейінгі қозғалысы өткізгіш ішінде еркін заряд қалмағанға дейін жалғасады, яғни $\vec{E}=\vec{E}_i+\vec{E}_\sigma=0$

Бұл жағдайда өткізгіш ішіндегі зарядтардың көлемдік тығыздығы 0-ге тең болады ал $\vec{E}_\sigma=-\vec{E}_i$ болады (12,8)

12,8 өрнек статикалық жағдай үшін де , зарядталған өткізгіш үшін де орынды. Шекаралық шартты ескерген жағдайда(11,31)$E_n=\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$

Векторлық түрде жазсақ:$\vec{E}_n=\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\vec{n}$

Өткізгіштердің бойына қанша заряд жинақтай алатындығын сипаттайтын жаңа шама енгізейік. Ол үшін патенциялдың өрнегін (12.5) II- құраушысы$\varphi=\frac{k}{\varepsilon}\int_{S_0}\frac{\sigma(r_0)}{r'}dS_0$

Осы өрнекті интегралдасақ: $\varphi=\frac{k}{\varepsilon<r>¿\int_{S_0}\sigma(r_0)\,dS_0¿}$, $\varphi=\frac{k}{\varepsilon<r>¿*Q\frac{k}{\varepsilon<r>¿=C¿}}¿$ Өткізгіштің пропациянал каефиценті

$C=\frac{\varepsilon}{k}<r>¿$ (12.11) Өткізгіштің сиымдылығы.

12.4

Заттардағы электростаткалық өріс энергиясының өрнегінен 11-лекциядағы (11.41) –өрнекті алуға болады. $W=\frac{-d}{dt}\frac{1}{2}\int_v\vec{D}\vec{E}\,dv$ (12.12) Осы өрнекті түрлендірейік. Ол үшін 2-қосымшадағы 15-өрнекті пайдаланайық. $-Dgad\,\varphi=\varphi\div\vec{D}-¿(\varphi\vec{D}),\ -grad\,\varphi=\vec{E},\ D\vec{E}=\varphi div\,\vec{D}-¿(\varphi\overrightarrow{D})$

(**), $W=\frac{1}{2}\int_v\rho dv-\frac{1}{2}\int_v¿(\varphi\overrightarrow{D})dv$ (12.13) Бұл өрнектің бірінші құраушысы 0-ге тең болады,өйткені электростатикалық өрістегі өткізгіштің ішінде көлемдік тығыздық $\rho=0$ болады.Ал 3 және 4ші құраушыларды Стокс теоремасын пайдалансақ:-2 $\frac{1}{2}\int_{v_1}¿\left(\varphi\vec{D}\right)dv=\frac{1}{2}\int_{s_1}\varphi\vec{D}_n ds-\frac{1}{2\sum_{i=2}}\int_{s_1}\varphi\vec{D}_n ds$.

Сыртқы шекара бойынша беттік интеграл шексіздікке 0-ге тең болатынын ескерсек $\frac{1}{2}\oint_{s1}\varphi\overrightarrow{D}_n dS=0$.

Олай болса $\overrightarrow{D_n} = \sigma$ екендігін ескерсек. $W = \frac{1}{2}\int_{v1} \left(div\varphi \vec{D} \right) dv + \frac{1}{2}\sum_{i=2} \oint_{S1} \varphi\sigma d\vec{S}$ (12.15) Өзара әсерлесетін денелер жүйесі үшін электростатикалық өрістің энергиясы.