Лекция 9

Затухающие и вынужденные механические колебания

1. Свободные затухающие механические колебания. Коэффициент затухания
2. Логарифмический декремент затухания. Добротность.
3. Вынужденные механические колебания. Резонанс механических колебаний.

1. Свободные затухающие механические колебания. Коэффициент затухания

Колебания, амплитуды которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшаются, называются свободными *затухающими колебаниями.* Уменьшение энергии колебаний происходит из-за трения в механических колебательных системах, когда часть ее энергии превращается в теплоту.

Закон затухания колебаний определяется свойствами колебательных систем. Обычно рассматривают линейные системы - идеализированные реальные системы, в которых параметры, определяющие физические свойства системы, в ходе процесса не изменяются. Линейными системами являются, например, пружинный маятник при малых растяжениях пружины (когда справедлив закон Гука).

Различные по своей природе линейные системы описываются идентичными линейными дифференциальными уравнениями, что позволяет подходить к изучению колебаний различной физической природы с единой точки зрения, а также проводить их моделирование, в том числе и на ЭВМ.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы задается в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0 \qquad (1)$$

где x - колеблющаяся величина, описывающая тот или иной физический процесс; $\beta = const$ - коэффициент затухания; ω_0 - циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы, и при $\beta = 0$ (при отсутствии потерь энергии), называется *собственной частотой колебательной системы*.

Решение уравнения (1) рассмотрим в виде

$$x=e^{-\beta t}y(t) \qquad (2)$$

Найдем первую и вторую производные выражения (2) и подставим их в (1) :

$$\dot{x}=-\beta e^{-\beta t}y(t)+e^{-\beta t}\dot{y}(t)$$

$$\ddot{x}=\beta^2e^{-\beta t}y(t)-\beta e^{-\beta t}\dot{y}(t)-\beta e^{-\beta t}\dot{y}(t)+e^{-\beta t}\ddot{y}(t)$$

$$\beta^2e^{-\beta t}y(t)-\beta e^{-\beta t}\dot{y}(t)-\beta e^{-\beta t}\dot{y}(t)+e^{-\beta t}\ddot{y}(t)+2\beta\left(-\beta e^{-\beta t}y(t)+e^{-\beta t}\dot{y}(t)\right)+\omega_0^2e^{-\beta t}y(t)=0$$

$$\beta^2y(t)-\beta\dot{y}(t)-\beta\dot{y}(t)+\ddot{y}(t)+2\beta\left(-\beta y(t)+\dot{y}(t)\right)+\omega_0^2y(t)=0$$

$$\ddot{y}(t)+\left(\omega_0^2-\beta^2\right)y(t)=0 \qquad (3)$$

Решение уравнения (3) зависит от знака коэффициента перед искомой величиной. Когда этот коэффициент положителен:

$$\omega^2=\omega_0^2-\beta^2>0 \qquad (4)$$

то получим уравнение типа (1)

$$\ddot{y}(t)+\omega^2y(t)=0$$

решением которого является функция

$$y=A_0\cos\left(\omega t+\varphi_0\right) \qquad (5)$$

Во многих системах коэффициент затухания мал по сравнению с собственной частотой колебаний ($\beta << \omega_0$), и условие (4) для них выполняется. Тогда движение системы можно рассматривать как почти гармоническое колебание, описываемое уравнением, полученным подстановкой (5) в уравнение (2):

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos\left(\omega t + \varphi_0\right) \tag{6}$$

где $A_0 e^{-\beta t}$ - *амплитуда затухающих колебаний*; A_0 - начальная амплитуда. ***Коэффициент затухания*** β ***определяет скорость уменьшения амплитуды колебаний: он обратен по величине промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в*** **е** ***раз.***

Зависимость (6) показана на рис.1 сплошной линией, а амплитуда затухающих колебаний показана штриховыми линиями.

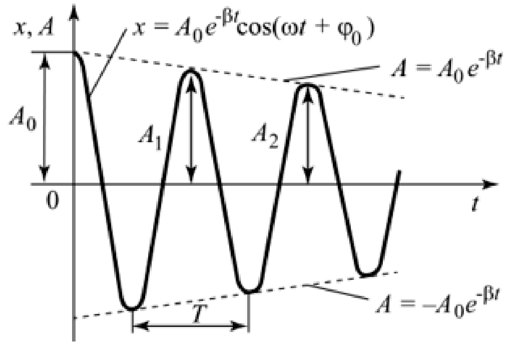

рис.1

Промежуток времени $\tau = \dfrac{1}{\beta}$, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз, называется *временем релаксации.*

Затухание нарушает периодичность колебаний, поэтому затухающие колебания не являются периодическими и, строго говоря, к ним неприменимо понятие периода или частоты. Однако если затухание мало, то можно условно пользоваться понятием периода как промежутка времени между двумя последующими максимумами (или минимумами) колеблющейся физической величины (рис.1). Тогда период затухающих колебаний с учетом формулы (4) равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \tag{7}$$

Примером затухающих механических колебаний является пружинный маятник, помещенный в вязкую среду. Помимо силы упругости на тело будет действовать сила сопротивления, пропорциональная скорости:

$$F_x = -r\frac{dx}{dt}$$

где r - соответствующий коэффициент, зависящий от вязкости среды, размеров и формы тела. Поэтому уравнение движения примет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} \tag{8}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \;\; \beta = \frac{r}{2m} \tag{9}$$

2. Логарифмический декремент затухания. Добротность.

Из рисунка (1) видно, что если *A(t)* – амплитуда колебания в момент времени t , то *A(t+T)* будет следующей амплитудой в момент времени $t+T$. Отношение амплитуд двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период равно:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T} \tag{10}$$

и называется *декрементом затухания*, а его логарифм

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e} \tag{11}$$

называется *логарифмическим декрементом затухания*; N_e - ***число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в е раз. Логарифмический декремент затухания является постоянной величиной для данной колебательной системы***.

Для характеристики колебательной системы часто пользуются понятием *добротности Q*, которая при малых значениях логарифмического декремента определяется как:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e = \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} \tag{12}$$

(так как затухание мало ($\beta << \omega_0$), то период колебаний T принимают равным периоду свободных незатухающих колебаний T_0).

Из формулы (12) следует, что ***добротность пропорциональна числу колебаний N_e, совершаемых системой за время релаксации.***

В частности, для свободных затухающих колебаний пружинного маятника, подставляя формулу частоты $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ и коэффициента затухания $\beta = \frac{r}{2m}$ в уравнение (12), получим добротность пружинного маятника:

$$Q = \frac{\sqrt{km}}{r} \tag{13}$$

Известно, что полная энергия системы, совершающей гармонические колебания, пропорциональна квадрату амплитуды ($E = kA^2/2$). Тогда энергия в момент времени t определится по формуле:

$$E = E_0 e^{-2\beta t} \tag{14}$$

где $E_0 = kA_0^2/2$ - начальная энергия. Количество энергии, которое система теряет за период, равна:

$$\Delta E = E(t) - E(t+T) = E(t)\left(1 - e^{-2\beta T}\right) = E(t)\left(1 - e^{-2\lambda}\right) \tag{15}$$

Считая затухание слабым $\beta << \omega_0$, тогда λ будет малой величиной, можно экспоненту $e^{-2\lambda}$ разложить в ряд Тейлора, и учитывая малость λ, ограничиться первыми двумя членами ряда:

$$e^{-2\lambda} = 1 + (-2\lambda) + \frac{(-2\lambda)^2}{2!} + \frac{(-2\lambda)^3}{3!} + \ldots \approx 1 - 2\lambda \tag{16}$$

Тогда (15) можно записать в следующем виде:

$$\Delta E = E(t)(1 - 1 + 2\lambda) = 2\lambda E(t) \tag{17}$$

Теперь найдем отношение энергии, теряемой системой за период $(t+T)$, к энергии, запасенной системой к моменту времени t:

$$\frac{\Delta E}{E(t)} = \frac{2\lambda E(t)}{E(t)} = 2\lambda = \frac{2\pi}{Q} \tag{18}$$

Из выражения (18) следует, что отношение энергии, теряемой системой за период, к общей запасенной энергии, называемое ***интенсивностью энергетических потерь***, тем меньше, чем больше добротность Q системы, совершающей затухающие колебания. Из выражения (18) также следует, что потери энергии при затухании колебаний пропорциональны энергии колебаний, т.е. пропорциональны квадрату амплитуды. Это значит чем больше амплитуда колебаний, тем больше потери энергии.

Выводы, полученные для свободных затухающих колебаний линейных систем, применимы для колебаний различной физической природы (и механических, и электромагнитных).

3. Вынужденные механические колебания. Резонанс механических колебаний.

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие механические колебания, надо компенсировать потери энергии. Такая компенсация возможна с помощью периодически внешней вынуждающей силы *F(t),* изменяющейся по гармоническому закону:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \tag{19}$$

Тогда закон движения для пружинного маятника (8) запишется в виде:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t \tag{20}$$

Используя (9) приведем уравнение (20) к виду:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \tag{21}$$

Колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы, называются ***вынужденными механическими колебаниями***. Через некоторое время после начала действия вынуждающей силы колебания системы будут совершаться с частотой вынуждающей силы ω. Для нахождения уравнения установившихся колебаний необходимо найти решение дифференциального уравнения (21) при $t \to \infty$.

Общее решение этого неоднородного дифференциального уравнения (21) представляет собой, как известно из теории дифференциальных уравнений, сумму общего решения однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения нам известно, это - уравнение затухающих колебаний. Оно нас не интересует, так как при $t \to \propto$ оно исчезает. Частным решением неоднородного уравнения будут *вынужденные установившиеся колебания,* совершаемые с частотой вынуждающей силы ω. Поэтому нашим искомым решением будет:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{22}$$

где *A*- амплитуда вынужденных колебаний, φ- сдвиг фаз между смещением вынужденных колебаний и приложенной силой.

Получившиеся колебания подчиняются закону синуса (или косинуса), то есть являются синусоидальными или гармоническими. Но это не свободные колебания в системе без трения; здесь вынуждающая сила постоянно поставляет энергию в систему, в точности компенсирующую потери на преодоление сил трения.

Необходимо теперь найти амплитуду вынужденных колебаний и сдвиг фаз. Для этого необходимо подставить выражение для x в дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Очевидно, что необходимо найти два неизвестных из одного уравнения (22).

Как видно из формулы (21) нужно найти первую и вторую производные для выражения *x* (22) и подставить их в (21), далее провести преобразования полученного выражения. В итоге получаем следующие выражения для амплитуды и сдвига фаз:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}; \quad \tan\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{23}$$

Из (23) следует, что амплитуда вынужденных колебаний зависит от соотношения частоты вынуждающей силы и собственной частоты маятника. Максимальное значение амплитуды получим при условии минимума подкоренного выражения. Продифференцировав подкоренное выражение по ω, и приравняв его нулю, получим условие, определяющее $\omega_{рез}$:

$$\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2\right)'=0$$

$$-2\omega\cdot 2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+8\beta^2\omega=0$$

$$\omega\left[-\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+2\beta^2\right]=0$$

Последнее равенство выполняется при $\omega=0,\ и\ \omega=\pm\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$. Из этих решений только лишь положительное значение ω имеет физический смысл. Следовательно, амплитуда достигает максимального значения, если $\omega=\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$.

Частота $\omega_{рез}$ называется **резонансной частотой**

$$\omega=\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} \tag{24}$$

а достижение максимума амплитуды колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к $\omega_{рез}$ называется явлением **резонанса**. График зависимости $A(\omega)$ носит название **резонансной кривой** (рис.2).

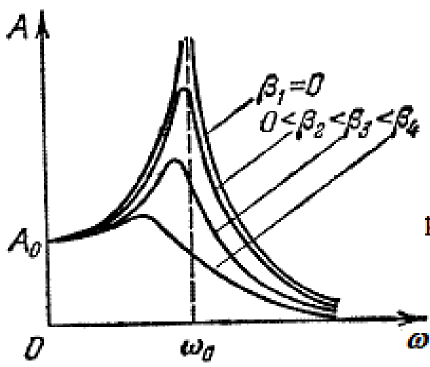

рис.2

Рисунок (2) и выражение (24) показывают, что резонансная частота механических колебаний зависит от коэффициента затухания β (а с ним и от коэффициента силы трения). Если силы трения отсутствуют, амплитуда колебаний стремится к бесконечности.

Если ω = 0, то из (23): $A=\dfrac{F_0}{m\omega_0^2}=\dfrac{F_0}{k}$, т.е. маятник смещается под действием постоянной силы F_0 (статическое смещение пружины).

Из рисунка (2), а также из формулы резонансной частоты (24), видно, что для консервативной системы, т.е. β = 0, $\omega_{рез}=\omega_0$; а для диссипативной силы $\omega_{рез}$ несколько меньше собственной круговой частоты ω_0 .

Вопросы
1. Запишите дифференциальное уравнение затухающих механических колебаний и его решение.
2. По какому закону изменяется амплитуда затухающих колебаний? Являются ли затухающие колебания периодическими?
3. Почему частота затухающих колебаний должна быть меньше частоты собственных колебаний системы?
4. Что такое коэффициент затухания? декремент затухания? логарифмический декремент затухания? В чем заключается физический смысл этих величин?
5. Что такое вынужденные колебания? Запишите дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний и его решение.
6. Отчего зависит амплитуда вынужденных колебаний? Запишите выражение для амплитуды и фазы при резонансе.
7. Что называется резонансом? Какова его роль?