10-Лекция

КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІН ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ

Жоспары

1 Мектеп математика курсында комбинаторика элементтерін оқыту әдістемесіне жалпы шолу. Мектепте комбинаторика элементтерін оқыту әдістемесі
2 Комбинаторика туралы түсінік. Орналастырулар. Алмастырулар.Терулер
3 Комбинаторика формулаларын ықтималдықтарды есептеуге қолдану

«Комбинаторика» (латын тілінен аударғанда «combino» – «байланыстырамын» дегенді білдіреді) ұғымы XVI ғасырда пайда болған.

Комбинаторика - берілген жиындағы элементтерден қандай да бір шартқа бағынатын әртүрлі бірнеше комбинация құрастыру мүмкіндігін қарастыратын математиканың саласы.

Алғашында ықтималдықтар теориясы, негізінен, құмар ойындардың (ойын сүйегін тастау, карта ойындары және т.с.с) мұқтаждығынан туындаған.

Шешуі: «нешеу», «неше тәсілмен» деген сұрауларға жауап беруді қажет ететін есептер комбинаторлық есептер делінеді. Мұндай есептерді шығарумен айналысатын математика саласы *комбинаторика* деп аталады.

Орта мектептерде «Комбинаторика элементтері» тақырыбын оқыту 1973-1975 жылдарда факультативтік жұмыстарда жүзеге асты, ал 1975-1976 оқу жылынан бастап бұл тақырып жалпыға міндетті жаңа бағдарлама бойынша оқытылды. Кейінірек, 1980 жылдан матеманиканың бұл бөлімі мектеп бағдарламасынан алынып тасталды. Сөйтіп, ширек ғасырға жуық уақыт бойы орта мектепте де, педагогикалық жоғары оқу орындарында да комбинаторлық талдау есептерін шығару және оларды оқыту әдістемесі оқылмай қойды .

Қазіргі таңда комбинаторика, кездейсоқ жағдайлар алгебрасы және статистика теориясы элементтері бастамалары республикамыздағы бірқатар авторлардың алгебра оқулықтарынан, сондай-ақ, жалпы орта білім беретін мектебінің 5-6 сыныптарына арналған математиканың жаңа стандарттық бағдарламаларының мазмұнынан нақты орын алды.

Соңғы жылдары комбинаторикалық әдістердің рөлі математиканың өзінде ғана емес, оның физика, химия, биология, лингвистика, техника, экономика сияқты қолдануларында да ерекше арта түсті. Ықтималдықтарды есептеу көп жағдайларда комбинаторлық есептерге келіп саяды. Сондықтан комбинаторлық әдістермен және комбинаторлық тәсілмен оқушыларды алдан-ала таныстыруды ертерек бастаған жөн. Бұл тақырыпты оқып үйрену оқушыларда «комбинаторлық» ойлауды дамытуға, олардың математикалық ой-өрісін кеңейтуге септігін тигізеді. Алдағы уақытта ықтималдықтар теориясының элементтерін меңгеруді жеңілдетеді.

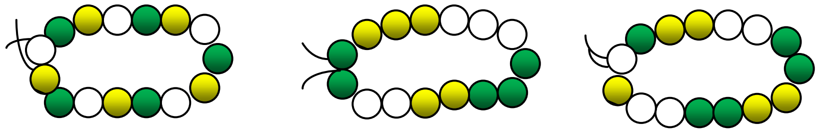
Сабақта комбинаторика элементтерін оқыту тәжірибесі мектеп оқушыларының бұл тақырыпты бірқатар қиындықпен қабылдайтынын көрсетіп отыр. Өйткені мұнда алғашында үйреншікті емес болып көрінетін ойлаудың және пайымдаудың жаңа түрі қолданылады, оның үстіне оқушылардың барлығында бірдей «комбинаторлық» қабілет, ойлаудың «комбинаторлық» типіне икемділік бола бермейді. Бірақ, жаттығулар арқылы әрбір оқушыда «комбинаторлық» ойлауды дамытуға (біреулерінде оңай, кейбіреулерінде қиындау) мүмкіндіктер жетерлік. Ең бастысы, бұл тақырыптарды оқытуда сабақтарды өткізу әдістемесіне ерекше көңіл бөлу керек. Тақырыпты байқап және біртіндеп қарапайымнан күрделіге қарай алға жылжи отырып, комбинаторлық әдісті көптеген нақты мысалдар арқылы демонстрациялауға тура келеді.

Комбинаторикалық ойлау қарастырылып отырған құбылыстың барлық нәтижелерін анықтай білу, толық нәтиже кеңістігінен қандай да бір таңдау жасаудан тұрады. Әрбір оқушыда «комбинаторлық» ойлауды дамытудың негізгі жолы комбинаторлық есептерді шығару, математика сабағында комбинаторлық есептерді шығару.

Мысалы,

1. Комбинаторлық әдісті пайдаланып, мектептегі бес күндік сабақ кестесін жаса.
2. Еңбек пәні сабағында моншақтан білезік тоқу тапсырмасы берілді. Айталық, сенде үш түсті моншақтар бар: жасыл, ақ, сары. Олардың барлығын неше тәсілмен жіпке тізігу болады?

1 – суретке қараңыз.



1 - сурет

Комбинаторларлық есептерді шығару барысында мынандай қарапайым тұжырым жиі қолданылады: егер бірінші топта m элемент, екінші топта n элемент болса, онда бір элементі бірінші топтан және бір элементі екінші топтан алып жасалған түрлі жұптар саны mn, көбейтіндісіне тең болады.

Шынында да, бірінші топтың бір элементін m түрлі тәсілмен, екінші топтың бір элементін n түрлі тәсілмен алуға болады. Бірінші топтан әрбір элемент алу тәсілін екінші топтан әрбір элемент алу тәсілімен біріктіре отырып, мүмкін болатын барлық әртүрлі mn жұптарын жасап шығамыз.

Мысалы, 0,1,2,3,4,5 цифрларынан жасалатын барлық үш орынды сандардың нешеу екенін есептеу үшін былай талқылаймыз: үш орынды санның бірінші цифры 0-ден өзгеше, ендеше, оны тек төрт тәсілмен алуға болады; екінші цифрды бес тәсілмен алуға болады (екінші цифр нөл де болады). Мүмкін болатын бірінші цифрдың әрқайсысымен мүмкін болатын екінші цифрды біріктіріп, $4 \cdot 5 = 20$ әртүрлі екі орынды сандарды жасаймыз. Осы екі орынды сандардың әрбіреуін мүмкін болатын үшінші цифрмен (бұларды да бес тәсілмен алуға болады) біріктіріп $20 \cdot 5 = 100$ әртүрлі үш орынды сандарды табамыз.

Комбинаторлық есептерді көбейту тәсілімен шығаруда көп жағдайларда «бұтақтар» әдісі (граф) пайдаланылады. «Бұтақтар» әдісі: алдымен «бұтақтың» төбелерін саламыз, кейін нүктелер жиынын түзулермен байланыстырамыз, яғни бұтақтармен. Алынған суретті «бұтақ» деп атаймыз.

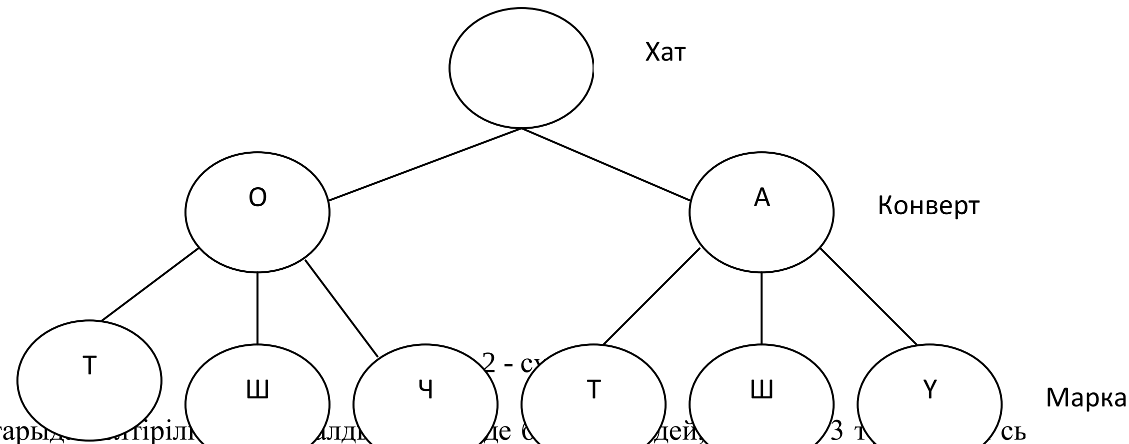
1-мысал. Асқардың жай және авиа түрлі екі конверті мен тіктөртбұрышты, шаршы тәрізді және үшбұрышты үш маркасы бар. Хат жазып жіберу үшін конверт пен марканы неше түрлі тәсілмен таңдауға болады.

Оқушылар 6 варианттың болатынын тез байқайды. Бірақ басқаша пайымдауға болады: конвертті екі тәсілмен алуға болады; марканы үш тәсілмен таңдап алуға болады, демек көбейткенде 2 х 3 = 6 шығады, бұл кездейсоқтық емес, біз алдымен, екі конверттің ішінен бір конвертті таңдап аламыз ғой, ал сонан соң үш марканың біреуін таңдап аламыз. Конвертті таңдап алудың кез келген тәсілін, марканы таңдап алудың үш тәсілімен біріктіріп, маркалар санына сәйкес $2 \cdot 3 = 6$ түрлі тәсілді шығарып аламыз.

Мұғалім мұндай есептерді шығарудың тиімді тәсілі – граф құруды төмендегідей түрде ұсынады:

Граф құру тәсілін қолданғанда барлық жағдай толық ескеріледі, қандай да бір жағдайды ескерусіз қалдыру мүмкін емес. Берілген есепке арналып құрылған граф 2-суретте келтірілген. Ол екі сатыдан тұрады:

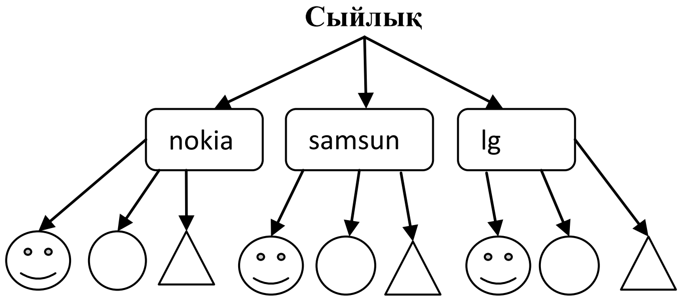
1-саты: конвертті таңдау; 2-саты: марканы таңдау.



2 - су

Жоғарыд … лтірілі … алды … де б … дей, … 3 т … сь nokia, samsung, lg, сонымен қатар 3 түрлі стикер: смайлик, дөңгелек, үшбұрыш бар. Дүкеннен сыйлық сатып алмақ болған Әсет ұялы сымтетік пен стикерді неше тәсілмен таңдай алады?) шығарылуы:

Шешуі. Бұл есептің шешімін «бұтақтар» әдісі арқылы көрсетеміз. Мұнда таңдау екі қадамнан тұрады. Бірінші қадамда ұялы сымтетік үш түрлі әдіспен (nokia, samsung, lg) таңдалады, яғни үш тармақ шығады. Келесі қадамда бірінші қадамда таңдап алған әрбір ұялы сымтетік үшін үш түрлі (смайлик, дөңгелек, үшбұрыш) стикердің бірін таңдаймыз. Сонда бірінші қадамның әрбір нүктесінен үш тармақ шығады. Соңғы қадамда тоғыз жағдай пайда болады, яғни сыйлықты тоғыз түрлі тәсілмен таңдап алуға болады (3-сурет).



3 - сурет

Комбинацияларды таңдау мен оларды көбейту және қосу ережелерінің көмегімен олардың санын табу – оқушының комбинаторлық мәдениетінің негізі және көптеген комбинаторлық есептерді шешудің алғы шарты. Бұл біліктер негізгі мектепте қалыптасуы керек. Жоғары мектепте оқушыларды комбинацияның негізгі типтерімен таныстыру қарастырылады.

Мектепте комбинаторика элементтерін оқыту әдістемесі

Комбинаторика туралы түсінік. Классикалық анықтамаға негізделген ықтималдықтарды, $p(A)=\frac{m}{n}$, есептеу - А оқиғасының пайда болуына қолайлы жағдайлар саны m-ді және сынаудың барлық жағдайлар саны n-ді табуға келіп тіреледі. Ықтималдықтар теориясында m мен n мәндері ілгеріде көрсетілгендей оп-оңай анықтала бермейді. Бұларды табу үшін қайсыбір жиын элементтерін түрліше алу тісілдерін қарастыруға тура келеді [1].

Мысал келтірейік. Жәшіктегі әріптер жиыны а,в,с элементтерінен құралған десек, онда бұл жиын әріптерді:

1) Бір-бірден 3 тәсілмен аламыз, олар: а,в,с;
2) Екі-екіден 6 тәсілмен аламыз, олар: ав, ва, са, ас, вс, св;
3) Үш-үштен 6 тәсілмен аламыз, олар: авс, вас, сав, асв, вса, сва.

Мұндағы алынған әріп тіркестерінің бір-бірінен айырмасы не элементтерінде, не элементтерінің орналасу ретінде болып отыр. Мұндай тіркестер - жиын элементтерінің комбинациясы болады.

Сонымен, комбинаторика есептерін екі әдіспен шешуге болады. Біріншісінде, шешудің барлық варианттарын бір-бірден есептейді, екіншісінде – қорытылған формуланы пайдаланып шешеді. Әрине, бірінші әдіс түсінуге жеңіл болғанымен, күрделі математикалық есептерді шеуге келгенде пәрменсіз. Сондықтан, екінші әдісті, яғни комбинаториканың карапайым формулаларын негіздеп, оларды ықтималдықтарды есептеуге пайдаланатын боламыз. Бұл айтылғандарды мысалдармен түсіндірейік.

1-мысал. Жаздыгүні автоматтан газды су (сиропсыз немесе сиропты) ішу үшін он тиындық немесе елу тиындық монет керек. Ал автомат телефонды пайдалану үшін жиырма тиындық монет керек. 100 тиыны бар адам су ішіп, автомат телефон арқылы сөйлесу үшін оны 10,20,50 тиындықтарға майдалаудың бірнеше тәсілін ойластырды. Сонымен, 100 тиынды 10,20,50 тиындықтарға неше тәсілмен майдалауға болады?

Шешуі. 100 тиынды майдалаудың барлық тәсілін келтірейік: 100 тиынды екі 50 тиындыққа майдалауға болады. 20 тиындық және 10 тиындықтарға да майдалауға болады. Бұл айтылғандар ықшам болу үшін 100 тиынды майдалаудың барлық мүмкін варианттары төмендегі 1 - кестеде келтірілді

1-кесте

Рет саны	50 тиындық монет саны	20 тиындық монет саны	10 тиындық монет саны
1	2	0	0
2	1	2	1

3	1	0	5
4	1	1	3
5	0	5	0
6	0	4	2
7	0	3	4
8	0	2	6
9	0	1	8
10	0	0	10

Бұл кестеде көрсетілген тиынды майдалау тәсілі әр түрлі және бұдан басқа тәсіл де жоқ. Сондықтан 100 тиынды 10,20,50 тиындықтарға 10 тәсілмен ғана майдалауға болады екен. Сөйтіп, бұл есептің шешуін табу үшін мүмкін жағдайлардың бәрін бір-бірлеп есептедік.

2-мысал. Қазақ тілі алфавитіндегі 42 әріптің ішінен үш әріптен құралатын комбинацияларды неше тәсілмен жасауға болады?

Шешуі. Әріптер жиынынан үш әріптің комбинациясын екі түрлі жолмен іріктеп алуға болады.

Біріншісі (қайталанбайтын іріктеу). Бірінші алынатын әріп барлық әріптер жиынының, яғни 42 әріптің бірі болады, демек оны 42 тәсілмен алуға болады. Ал, екінші әріп қалған 41 әріптің ішінен алынады. Сонда шығатын әр түрлі екі әріпті тіркестер (комбинациялар) саны $42\cdot41=1722$ болады. Бұл екі әріпті тіркестердің әрқайсысы үшінші алынатын әріппен тіркесіп, үш әріпті тіркес құрайды, сонда олар $42\cdot41\cdot40=68880$ тәсілмен алынады. Бұл жағдайда әрбір үш әріпті тіркестегі әріптер түрліше болып кездеседі.

Екіншісі (қайталанатын іріктеу). Бірінші алынған әріп белгіленген соң, 42 әріптер жиынына қайта салынады. Сонда екінші алынатын әріп те 42 әріптің бірі болады. Олай болса, екі әріпті тіркестерді

$$42\cdot42=42^2=1764$$

тәсілмен алуға болады. Осы сияқты үш әріпті тіркес

$$42\cdot42\cdot42=42^2\cdot42=74088$$

тәсілмен жасалады .Бұл жағдайда үш әріпті тіркестердің жасалуына ешқандай шек қойылмайды, яғни мұнда әрбір әріп бір тіркестің ішінде екі, үш рет қайталанып келуі мүмкін.

Сонымен, 42 әріптен үштен алуды *іріктеу немесе таңдама* дейміз. Бірінші жолы әріптер жиынынан қандай әріп алынғаны белгіленгеннен кейін, ол жиынға қайта салынған жоқ. Сондықтан мұндай іріктеуді *қайталанбайтын іріктеу* деп атаймыз. к=3 саны *іріктеу көлемі* болады.

Екінші жолы жиыннан алынған әріп белгіленген соң, ол қайтадан жиынға салынды. Сонда екінші әріп жиындағы 42 әріптің ішінен алынды. Үшінші әріп те сол жиыннан алынды. Сондықтан бұлайша іріктеуді *қайталанатын іріктеу* деп атайды. Мұнда да іріктеу көлемі к=3. Ал, элементтері алынып отырған жиын, яғни 42 әріптер жиыны - *бас жиын* элементтері болады. Әдетте, бас жиындағы әріптер сол *жиын элементтері* болады.

Бұл мысалдардың екеуіне де комбинация санын анықтағанда көбейту амалын пайдаландық. Енді көбейтудің мынадай ережесін байқау қиын емес.

Көбейту ережесі. Егер А жиыны $a_1, a_2, ..., a_m$, яғни m элементтен, ал В жиыны $b_1, b_2, ..., b_k$, яғни к элементтен құралатын болса (бұл екі жиын бір жиыннан алынуы да мүмкін), онда әрқайсысынан бір-бір элементтен алынған әр түрлі (a_i, b_j) комбинация саны $m\cdot k$ болады $(i=1,2,..,m; j=1,2,…k)$.

Шынында, бұларды (a_i, b_j) түрінде m горизонталь және k верикаль жолдардан тұратын мына кестеге орналастыруға болады:

2- кесте

B A	b_1	b_2	…….	b_k
a_1	(a_1,b_1)	(a_1, b_2)	…….	(a_1,b_k)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2,b_2)	…….	(a_2,b_2)
…..	…….	…….	…….	…….
…..	…….	…….	…….	…….
a_m	(a_m, b_1)	(a_m,b_2)	…….	(a_m,b_k)

Бұл кестедегі әрбір $(a_i,\ b_j)$ $((i=1,2,..,m;\ j=1,2,\ldots k)$. тек бір реттен ғана кездеседі. Барлық ұялардың саны - $m\cdot k$. Бұл ереже жиын саны екіден артық болғанда да орындалады. Мысалы, элементтер саны сәйкес m,k,h сандарына тең болатын $A\{ a_1, a_2,\ldots a_m \}$, $B\{ b_1, b_2, \ldots b_k \}$, $C\{c_1, c_2, \ldots c_h\}$ үш жиын берілсін. Әр жиыннан тек бір элементтен ғана алынған әр түрлі (a_i, b_j, c_l) үш элемент комбинациясын жасауға болады, мұндағы $(i=1,2,..,m;\ j=1,2,\ldots k,\ l=1,2,\ldots h)$. Олардың саны $m\cdot k\cdot h$, өйткені А және В жиындарынан алынған әрбір $(a_i,\ b_j)$ жұбы үшінші жиынның әрбір элементімен комбинацияланады. Бұл комбинация саны, әрине, $(m\cdot k)\cdot h=mkh$ санына тең. Енді комбинаторика және ықтималдық теориясының есептерін шешуге қажетті бірнеше формулаларды қорытып, оларды қолдануға, ойда бекітуге арналған мысалдарды келтірейік. Мұны қайталанбайтын іріктеуге тиісті формулаларды қорытудан бастайық.

Орналастырулар. Алдыңғы бөлімде берілген қазақ тілі алфавитінен үш әріптен тұратын комбинацияларды құрастыру есебін жалпылайық.

Алфавит N әріптен тұрса, онда әрқайсысы үш әріптен тұратын комбинациялар саны $42\cdot41\cdot40=68880$ орнына $N(N-1)(N-2)$ болар еді. Ал енді 3 әріп орнына k әріптен тұратын комбинацияны құрсақ, онда:

$$N(N-1)(N-2)\ldots [N-(k-1)]$$

тәсілмен табылады. Бұл өрнек N элементтен әрқайсысы k-дан жасалған *орналастырулар* делінеді. Бұл орналастырулардың әрқайсысына N элементтің ішінен k элемент еніп, олардың айырмашылықтары не элементтерінде (мысалы, ав, ас т.т.) , не орналастыру ретінде (мысалы, ав және ва, вс және св т.т.) болады. Мұны A_N^k символымен белгілейік. Сонда

$$A_N^k = N(N-1)(N-2)\ldots[N-(k-1)] \tag{1}$$

Өрнекті ықшамдаған қолайлы. Ол үшін (1) өрнектің алымын да бөлімін де 1,2,3…(N-k) сандарына көбейтеміз. Сонда

$$A_N^k = \frac{N(N-1)(N-2)\ldots[N-(k-1)]\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(N-K)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(N-k)} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(N-k)[N-(k-1)]\ldots(N-1)N}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(N-k)} = \frac{N!}{(N-k)!}$$

яғни

$$A_N^k = \frac{N!}{(N-k)!} \tag{2}$$

мұнда N!- факториал деп оқылады, ол 1-ден бастап N-ге дейінгі натурал сандардың көбейтіндісіне тең, яғни

$$N! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot N,$$

немесе

$$N!=N(N-1)(N-2)\ldots3\cdot2\cdot1.$$

1-мысал. а,в,с,д әріптерінен екі әріптен алынған орналастырулар жасап және олардың комбинацияларын жазу керек.

Шешуі. Бір әріпті 4 тәсілмен аламыз. Екінші әріпті қалған әріптерден 3 тәсілмен аламыз. Бірінші алынған әріп екінші алынған әрбір әріппен комбинация құрайды, сондықтан екі-екіден алынатын әріптер комбинациясы $4\cdot3=12$ тәсілмен жасалады, (1) формула бойынша

$$A_4^2 = 4\cdot3 = 12.$$

Алынған әріптер тіркестері мынадай:

ав, ва, са, да
ас, вс, св, дв
ад, вд, сд, дс.

2-мысал. А,В,К,М,О,С әріптері берілсін. Олардың ішінен бір-бірден төрт әріп аламыз. Сонда: а) 6 әріптің ішінен әріптерді төрт-төрттен неше тәсілмен алуға болады; ә) алынған төрт әріпті қатарынан тізіп қойғанда «КВАС» сөзінің пайда болу ықтималдығын есептеу керек.

Шешуі: а) А,В,К,М,О,С әріптерінен алынған бірінші әріп сондағы 6 әріптің бірі, яғни бірінші әріпті 6 тәсілмен алуға болады. Екі әріпті 6·5 тәсілмен алуға болады, өйткені бірінші әріп алынғаннан кейін екіншісін жиындағы қалған 5 әріптің ішінен алады. Оның үстіне, әрбір бірінші әріп әрбір екінші әріппен комбинацияланады. Осы сияқты, 3 әріп алынатын комбинация 6·5·4 тәсілмен, 4 әріптен алынатын комбинация 6·5·4·3 тәсілмен құралады. Есептің шарты бойынша N=6, k=4 , енді (1) формуланы пайдалансақ

$$A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360$$

ә) Алдымен n-ді анықтайық. Берілген 6 әріптен әрқайсысы 4 әріптен тұратын комбинация $A_6^4 = 360$ тәсілмен табылады. Мұнымыз барлық тең мүмкіндікті нәтижелер саны. Бұл нәтижелер қос-қостан үйлесімсіз және олар оқиғалардың толық тобын құрайды. Демек, n=360 . Енді «КВАС» сөзінің пайда болуына қолайлы жағдайлар саны m-ді табамыз.

4 әріпті тіркес ішіндегі бізге қолайлысы тек бірінші орында «К» әрпі, екінші орында «В» әрпі, үшінші орында «А» әрпі, ақырында, төртінші орында «С» әрпі тұратын «КВАС» сөзі ғана болмақ. Бұл сөз тек бір-ақ рет кездеседі. Сондықтан іздеген ықтималдық мынаған тең:

$$p(A) = p_{(\text{КВАС})} = \frac{1}{360} \approx 0.003,$$

3.2.3 Алмастырулар

N элементтен N-нен алынған орналастыруларды *алмастырулар* деп атайды.

Алмастырулардың бір-бірінен айырмашылығы тек элементтерінің орналасу ретінде ғана, өйткені әрбір алмастырудағы элементтердің саны бірдей. Сонда (1) формулада N=k десек,

$$P_N = A_N^N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot N = N! \qquad (1)$$

Мысал. Ш,Т,К,М,Е,Ы,Н әріптерінен: а) неше алмастырулар жасауға болады? ә) «ШЫМКЕНТ» сөзінің шығу ықтималдығын анықтау керек.

Шешуі: а) Айырмасы тек элементтерінің орналасу ретінде ғана болатын 7! алмастырулар жасауға болады.

ә) Бұл алмастырулардың әрқайсысының шығу мүмкіндігі бірдей. Сонда тең мүмкіндікті, қос-қостан үйлесімсіз оқиғалардығ толық тобын құрайтын элементар нәтижелердің барлық саны N=7! болады. Бұлардың ішінде «ШЫМКЕНТ» сөзінің шығу мүмкіндігі біреу-ақ демек, оның ықтималдығы

$$p(A) = P_{(\text{ШЫМКЕНТ})} = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}.$$

Элементтері қайталанатын алмастырулар

Жоғарыда қарастырылған алмастыруда жиын элементтерінің барлығы да әр түрлі еді. Бірақ алмастырулар жасалатын N элементтің кейбіреуі қайталанып отыруы да мүмкін. Сондықтан келесі мысалды қарастырамыз.

1-мысал. А,А,А,Б,Р,С,Т әріптерінен тұратын: а) неше алмастырулар жасауға болады? ә) «АТБАСАР» сөзінің шығу ықтималдығын анықтау керек.

Шешуі: А,А,А,Б,Р,С,Т әріптерінен жазылатын сөздер саны 7! болар еді. Ал біздің мысалымызда үш әріп бірдей. Сондықтан 7 әріпті әр түрлі сөздер саны 7!-дан кемиді. Өйткені «А» әріптері өзара орындарын ауыстырғанда жаңа сөз шықпайды. Сондықтан есепті шешу үшін алдымен бірдей сөз құрайтын алмастырулар санын анықтап аламыз. «А» әрпінің өзара орын ауыстырулар саны - 3!. Бұл әр типтегі сөздердің қайталану саны болмақ. Бұл жағдайды 7 әріпті сөздердің бір типі «АТБАСАР» деген сөзбен көрсетейік. Түсіну оңай болу үшін алдымен әріптерді 1-ден 7-ге дейінгі цифрлармен нөмірлейік. Осы сөз құралатын алмастырулардың түрлері төменде цифрлармен келтірілді:

1	2	3	4	5	6	7
А	А	А	Б	Р	С	Т
А	Т	Б	А	С	А	Р
1	7	4	2	6	3	5
1	7	4	3	6	2	5
2	7	4	1	6	3	5
2	7	4	3	6	1	5
3	7	4	2	6	1	5
3	7	4	1	6	2	5

Сонда 7 әріптен тұратын әр түрлі «сөздер» бұл жағдайда

$$\frac{7!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$$

тәсілмен шығады екен.

а) Бұл алмастырулардың әрқайысының шығу мүмкіндігі бірдей. Сонда тең мүмкіндікті, қос-қостан үйлесімсіз оқиғалардың толық тобын құрайтын жағдайдың саны n=840. Бұлардың ішінде «АТБАСАР» сөзінің шығу мүмкіндігі біреу-ақ: олай болса,

$$p(A) = P_{(\text{АТБАСАР})} = \frac{1}{840}.$$

Осы ықтималдықты басқа тәсілмен табайық . Әріптер әртүрлі болғанда, тең мүмкіндікті нәтижелер саны n=7! болады.

Бұлардың ішінде «АТБАСАР» сөзінің пайда болуына қолайлы жағдайлар саны m=3! Демек, оның ықтималдығы

$$p(A) = P_{(\text{АТБАСАР})} = \frac{3!}{7!} = \frac{1}{840}.$$

Тағы да мысал келтірейік.

2-мысал. А, А, А, Е, И, К. М. М. Т. Т әріптері берілген. а) олардан 10 әріптен құралатын сөздерді неше тәсілмен құрастыруға болады? ә) «МАТЕМАТИКА» сөзінің шығу ықтималдығын анықтау керек.

Шешуі. а) Алмастыруларға енетін әріптер саны N=10. Бұл әріптердің барлығы да әртүрлі десек, онда небары $P_{10} = 10!$ алмастыру жасауға болады. Бірақ біздің мысалымызда А әрпі үш рет қайталанып отыр. Егер А-дан өзге қалған әріптер әртүрлі десек, онда, өткен мысалға сәйкес, алмастырулар саны

$$\frac{10!}{3!}$$

болар еді. Бірақ А-дан басқа М әрпі екі рет және Т әрпі де екі рет қайталанып отыр. Сондықтан алмастырулардың жалпы саны мынаған тең болады:

$$\frac{10!}{3!\,2!\,2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 151200.$$

ә) 10 әріпті тіркестер тең мүмкіндікті, қос-қостан үйлесімсіз, оқиғалардың толық тобын құрайтын элементар нәтижелердің саны - 151200. Бұлардың ішінде аталған сөзіміздің шығуына қолайлы жағдайлар саны біреу-ақ. Олай болса, мұның ықтималдығы $P(A) = \frac{1}{151200}.$

Мұны бірден $P(A) = \frac{3!\,2!\,2!}{10!} = \frac{1}{151200}$ деп жазуға болады. Сонымен, барлық тең мүмкіндікті жағдайлар саны 10!. Ал аталған сөздің пайда болуына қолайлысы m=3!·2!·2! болады.

Бұл мысалдардан шыққан нәтижелерді пайдаланып қорытынды жасайық:

М жиыны a_1, a_2,….a_k элементтерінен құралсын. Мұндағы a_1 элементі n_1 рет, a_2 элементі n_2 рет, ... , a_k элементі n_k рет қайталанатын болсын ($n_1+n_2+….+n_k=N$). Сонда N элементтен берілген n_1, n_2,….n_k -дан алынған алмастырулар саны мына формуламен анықталады:

$$P_N^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_{k!}}. \qquad (1)$$

3-мысал. Алдыңғы мысалдағы «Математика» сөзінің әріптерінен неше алмастыру жасауға болады?

Шешуі. Бұған жауап беру үшін (1) формуланы пайдаланамыз, сонда N=10, М әрпінің қайталану саны n_1 = 2!, А әрпінің қайталану саны n_2 = 3!, Т әрпінің қайталану саны n_3 = 2!, қалған әріптер бір реттен енеді. Демек, $P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!} = 151200.$

Қайталанатын орналастырулар

Осы уақытқа дейін элементтер жиынынан орналастырулар жасағанда одан алынған элемент жиынға енбейтін еді, ондай орналастырулар қайталанбайтын орналастырулар деп аталады. Біз енді қайталанатын орналастыруларды, яғни жиыннан алынған элемент сол жиынға қайыра енетінін қарастырамыз, мысалдар келтірейік.

1-мысал. 1,2,3 цифрларынан екі таңбалы неше сан жазуға болады?

Шешуі. Бұл есепті екі тәсілмен шешуге болады.

Бірінші тәсіл: цифрлары қайталанбайтын әр түрлі екі таңбалы сандарды $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ тәсілмен жасаймыз, олар:

12 21 31
13 23 32

Екінші тәсіл: цифрлары қайталанып отыратын әр түрлі екі таңбалы сандарды біртіндеп жазсақ, мыналар шығады:

11 21 31
12 22 32
13 23 33

яғни олардың барлық саны 3·3=9 болады, басқаша айтқанда цифрдың әрқайсысы 3 тәсілмен алынады, сонда бірінші алынған цифр әр жолы екінші цифрмен комбинацияланады, сөйтіп, екі цифр комбинациясын

$$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$$

тәсілмен аламыз. Бұл мысалды әрі қарай кеңейте беруге болады.

2-мысал. Осы 1,2,3 цифрларынан қайталамалы орналастырулар тәсілімен үш таңбалы, төрт таңбалы, к таңбалы неше сан құрастыруға болады?

Шешуі. Үш таңбалы санның бірінші цифрын 3 тәсілмен, екіншісін де 3 тәсілмен алуға болады. Сонда алдыңғы екі цифрлы санды $3 \cdot 3=3^2$ тәсілмен аламыз. Бұлардың әрқайсысы үшінші цифрмен комбинацияланады. Сонда үш цифрлы санды $3^2 \cdot 3=3^3=27$ тәсілмен құрастыруға болады. Осылайша талқыласақ, осы үш цифрдан 4 цифрлы сандарды $3^4=81$ тәсілмен, ал k цифрлы сандарды $3^к$ тәсілмен құрастыруға болады.

Енді есептің шартын өзгертіп, яғни берілген 1,2,3 орнына 1,2,3,....N цифрларды алайық.

Сонда N цифрдан әр түрлі екі цифрлы сандарды $N \cdot N=N^2$ тәсілмен, әр түрлі үш цифрлы сандарды $N^2 \cdot N=N^3$ тәсілмен, ал к цифрлы сандарды N^k тәсілмен құруға болады. Сонымен мынадай қорытындыға келеміз:

Элементтері қайталанып келетін N элементтен k-дан алынған орналастырулар

$$P_N^k = N^k \qquad (1)$$

формуласымен өрнектеледі. Мұны *қайталанатын орналастыру* немесе *қайталанатын іріктеу* формуласы деп атайды.

Қайталанбайтын орналастырулар мен алмастыруларды айтқанда іріктеу көлемі $k \leq N$ болатын. Ал элементтері қайталанатын орналастырулар мен алмастырулар үшін $k < N,\ k = N$ және $k > N$ болуы мүмкін. Бұл факт жоғарыда келтірілген мысалдардан айқын көрініп тұр.