12-лекция
«Үшбұрыш» тақытрыбын оқып-үйрену.

Жоппары:

1. Үшбұрыш ұғымын енгізу
2. Үшбұрыштардың теңдігі туралы
3. Үшбұрыштардың теңдік белгілері
4. Үшбұрыштың биіктігі, биссектрисасы және медианасы
5. Теңбүйірлі үшбұрыштың анықтамсы
6. Теңбүйірлі үшбұрыштың қасиеттері

Әдебиеттер:

1. Рахымбек Д., Кенеш Ә.С.Мектеп геометрия (планиметрия) курсын оқыту әдістемесі: Оқу құралы. / Д. Рахымбек, Ә.С.Кенеш –Алматы: Эверо,2015. – 320 б.
2. Мектеп оқулықтары
3. Мұғалімге арналған оқу-әдістемелік құралда

1 Үшбұрыш ұғымын енгізу

«Үшбұрыш» тақырыбы элементарлық геометрия курсының негізгі тақырыптарының бірі болып табылады. Бұл тақырыптың бүкіл геометрия курсын оқып-үйренудегі орны ерекше.

Біріншіден, тақырыпты оқып үйрену барысында оқушылар көп қадамды дәлелдеулер жүргізумен танысады, ал ол **оқушылардың лоикалық ойлау қабілетін дамытуға игі ықпал етеді**.

Екіншіден, үшбұрыштар тақырыбын оқып-үйрену нәтижесінде геометриялық дәлелдеудің маңызды әдістерінің бірі – **үшбұрыштар теңдігінің белгілерін пайдалану әдісімен танысуға негіз қаланады.**

Элементарлық геометрияның көптеген оқулықтарында үшбұрыш көпбұрыштың дербес жағдайы ретінде қарастырылады.

Ал кейбір оқулықтарда алдымен үшбұрыш ұғымы анықталып, кейін төртбұрыштар, ал соңында көпбұрыштар оқытылады.

Үшбұрышты фигурамен оқушылар бұрыннан таныс: үш төбесі, үш қабырғасы, үш бұрышы бар фигураны үшбұрыш деп танып, басқа жазық геометриялық фигуралардан ажыратып ала алады.

Сондықтан сабақты оқушылардың білімдерін қайта жаңғыртудан бастаған орынды. Ол үшін:

көптеген геометриялық фигуралардың ішінен үшбұрышты тани алу;

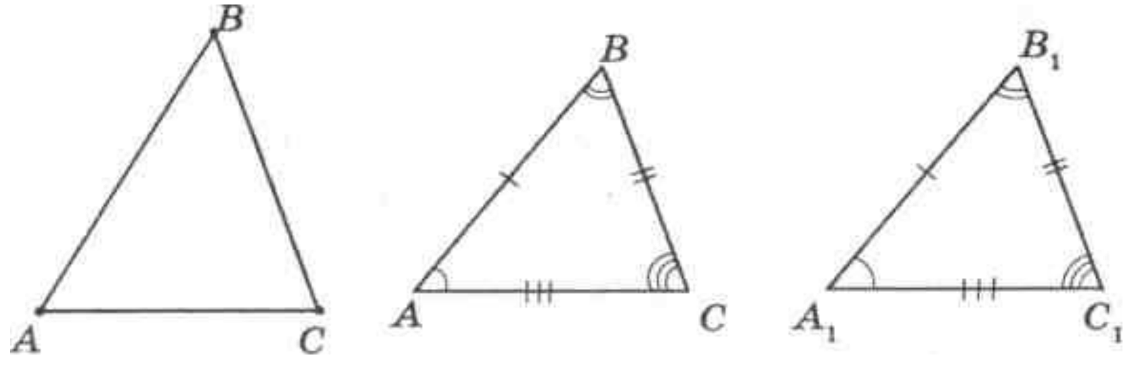
әр түрлі үшбұрытар сызып, оны әріптермен белгілеу;

оның қабырғаларын, төбелерін, бұрыштарын көрсету т.б. жаттығулар орындалады.

Ендігі жерде оқушылардың назары үшбұрыштың кез келген екі төбесінен өтетін түзу жүргізілсе, үшінші төбе ол түзу бойында жатпайтындығына аударылады, яғни үшбұрыштың төбелері бір түзудің бойында жатпайды.

Осыдан кейін үшбұрыштың анықтамасын тұжырымдауға көшеді.

Бір түзу бойында жатпайтын үш нүкте белгілеп, оларды кесінділермен қосқанда (4.1-сурет), пайда болған геометриялық фигураны *үшбұрыш* деп аталады. Берілген үш нүкте *үшбұрыштың төбелері,* ал оларды қосатын кесінділер — *үшбұрыаітың қабырғалары* деп аталады. Мысалы, 4.1-суреттегі *A, B, C* нүктелері үшбұрыштың төбелері, ал *AB, AC, BC* кесінділері — оның қабырғалары болады. Бұл үшбұрышты былай белгілейді: ΔABC. $\angle BAC$, $\angle CBA$ және $\angle ACB$ — үшбұрыштың *бұрыштары* деп аталады. *ABC* үшбұрышының бұрыштарын бір әріппен де белгілейді: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.



4.1-сурет 4.2-сурет

Өтілген тақырыпты бекіту үшін төмендегідей ауызша жаттығулар ұсынылады.

- ΔABC сыз.

- Ол үшбұрышты басқаша тағы қалай белгілеуге болады? (ΔBCA, ΔCAB, ΔACB, ΔBAC, ΔCBA)

- А бұрыштарына қарсы жатқан қабырға қандай? (А бұрышына қарсы жатқан қабырға BC). В және С бұрыштарына қарсы жатқан қабырға ше?

- АВ қабырғасына қандай бұрыш қарсы жатыр? (АВ қабырғасына қарсы жатқан бұрыш С). BC және AC қабырғаларына қарсы жатқан бұрыштарды ата.

- АВ қабырғасына іргелес бұрыштарды көрсет (АВ қабырғасына іргелес бұрыштар А және В бұрыштары) Қандай бұрыштар BC, AC қабырғаларына іргелес?;

- $\angle A$ қандай қабырғалардың арасында жатыр? (А бұрышы АВ және АС қабырғаларының арасында). $\angle B, \angle C$ ше?

Мұндай жаттығулар үшбұрыш ұғымын және оның элементтерін білумен бір мезгілде үшбұрыштың теңдік белгілерінің тұжырымдамаларын саналы түсінуге алғы шарттар жасайды.

Үшбұрыштың үш қабырғасы ұзындықтарының қосындысын оның *периметрі* деп атайды яғни $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC.$

2. Үшбұрыштардың теңдігі туралы

Кесінділер мен бұрыштардың теңдігі беттестіру (геметриялық теңдік) арқылы немесе сандық мәндерін салыстру (арифметикалық теңдік) жолымен анықталды. Екі тең кесіндіге теңдей кесінділерді қосса (немесе теңдей кесінділерді олардан алып тастаса), онда кесінділерді қосудың (немесе оларды айырудың) нәтижесінде өзара тең болатын жаңа екі кесінді алынады. Бұл пайым екі тең бұрышты қосу мен азайтқанда да тура болады.

Екі үшбұрыштың «теңдігі» термині тек геометриялық мәнге ғана ие: ΔABC = ΔDEF теңдігінің екі бөлігіне де бірдей *KLM* үшбұрышын қосуға бола ма деген сұрақ қойылмайды.

Сондықтан да берілген үшбұрыштардың геометриялық түрде тең екендігін мақұлдауға мүмкіндік беретін белгілерді анықтау қажеттігі шығады.

Үшбұрыштардың теңдік белгілерін элементар геометрия курсында әр түрлі енгізіледі.

1. Мысалы, Э.Э. Моиз, Ф.Л.Даунстың «Геометрия» оқулығында үшбұрыштың теңдік (конгруэнттік) белгілері аксиома ретінде қабылдынған [16]:

1) ҚБҚ аксиомасы (Қ – қабырға , Б – бұрыш). Бізше екі қабырғасы және арасындағы бұрышы бойынша үшбұрыштардың теңдік белгісі;

2) БҚБ аксиомасы (бір қабырғасы оған іргелес екі бұрышы бойынша үшбұрыштардың теңдік белгісі);

3) ҚҚҚ аксиомасы (үш қабырғасы бойынша үшбұрыштардың теңдік белгісі). Материалды былай құру нәтижесінде үшбұрыштардың теңдік белгілерін пайдаланып оқушылар есепті өзбетінше көп шығаруға мүмкіндік туады.

2. Үшбұрыштар теңдік белгілері теорема түрінде тұжырмдалып дәлелденеді.

Оларды үйрету реті жайлы мәселе де түрліше:

1) алдымен екі қабырға мен олардың арасындағы бұрышы тең болған жағдайы қарастырылып, содан соң бір қабырға мен оған іргелес екі бұрышы тең, одан кейін барлық үш қабырғасы тең болатын жағдайы беріледі;

2) алдымен бір қабырғасы мен оған іргелес екі бұрышы тең болатын жағдай, содан соң екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы тең, соңында, үш қабырғасы тең болатын жағдай қарастырылады [8].

Қазіргі мектеп оқулықтарында тақырыпты үйретудің бірінші тәсілі қабылданған [3], [4], [5], [6],т.б.

Үшбұрыштардың теңдігі ұғымы екі үшбұрышты өзара беттестіру арқылы енгізіледі. Мұғалім қатты қағаздан қырқып алынған екі өзара тең болатын үшбұрыш және өзара тең емес екі үшбұрыштардың модельдрін беттестіріп көрсетеді. Беттестіру кезінде екі үшбұрыштың төбелері төбелерімен, қабырғалары қабырғаларымен, бұрыштары бұрыштарымен қос-қостан дәл келсе ондай үшбұрыштар тең деп, ал үшбұрыштар бір-бірімен дәл беттеспесе олар тең емес деп аталатындығы айтылады.

Тең үшбұрыштардың қос-қостан дәл келетін бұрыштары *сәйкес бұрыштар,* ал қабырғалары *сәйкес қабырғалар* делінеді.

Егер екі үшбұрыштың сәйкес қабырғалары мен сәйкес бұрыштары өзара тең болса, онда мұндай үшбұрыштарды *тең үшбұрыштар* деп атайды. Мұнда тең бұрыштар сәйкес тең қабырғаларға қарсы, керісінше тең қабырғалар тең бұрыштарға қарсы жататындығы айтылады. Оқушыларға сәйкес қабырғалар мен сәйкес бұрыштар 4.2-суреттегідей белгілер арқылы көрсетілетіні ескертіледі. Өзара тең ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$,болса, онда сәйкес оларға қарсы жатқан $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$ болатындығы шығады, және керісінше, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$ болса, онда оларға қарсы жатқан қабырғалар $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$ болады.

ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының теңдігі $\Delta ABC=\Delta B_1A_1C_1$ деп белгіленеді. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$ болса, онда $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ болады. Керісінше, $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C$ теңдігінің слдары $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$ болады.

Үшбұрыштар теңдігінде төбелерінің жазылу тәртібі маңызды. Мысалы, $\Delta ABC=\Delta MET$ жазылуынан $\angle A=\angle M$, $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle T$, $AB=ME$, $AC=MT$, $BC=ET$ болатындығы шығады.

1-есеп. Егер $\Delta ABC=\Delta PQR$, $AB = 10$ м және $\angle C = 90°$ болса, онда PQ мен $\angle R$-ды анықтайық.

Шешуі. $\Delta ABC=\Delta PQR$, болғандықтан, бұл үшбұрыштадың сәйкес қабырғалыры да, сәйкес бұрыштары да тең: $AB = PQ$ және $\angle C=\angle R$ болады. Олай болса, $PQ = 10$ м, $\angle R = 90°$.

3. Үшбұрыштардың теңдік белгілері

Үшбұрыштардың теңдік белгілерін оқып-үйрену үдерісі:

- теореманың қажеттігін көрсету (мотивациялау);
- теоремада айтылатын деректермен таныстыру немесе теореманы ашу;
- теорема мазмұнын меңгеру;
- теорема тұжырымдамасын есте сақтау;
-теореманы дәлелдеу тәсілмен таныстыру;
- теореманы дәлелдеу;
- теореманы қолдану;
-теореманың бұрын дәлелденген теоремалармен байланысын тағайындау т.б. сәйкес жүргізіледі.

Оқу үдерісінде бұл кезеңдердің барлығы оқушылар үшін айқын түрде көрініп тұрмағанмен, мұғалім теореманы оқып үйрену барысында ол кезеңдердің реті әр түрлі болғанымен, олардың міндетті түрде орындалуын ескеру керек.

Үшбұрыштың теңдік белгілерін оқытуда оқушылар бірнеше қадамдардан тұратын күрделі дәлелдемемен бірінші рет кездеседі. Сондықтан үшбұрыштардың теңдік белгілерін дәлелдеуді мұғалім өзі жүргізеді. Оқушыларды теореманы өз бетінше дәлелдеуге тартуға асығудың қажеті жоқ. Оқушылар дайын дәлелдеменің құрылымымен танысуы және олармен жұмыс істеуге үйренуі қажет.

Теореманы оқып үйренудың қажеттігі

$\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ екендігін білу үшін үшбұрыштарды біріне бірін беттестіре салу әр уақытта мүмкін бола бермейді немесе $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$ алты теңдіктің орындалатынын тексеріп шығу да қиын. Оның орнына үш элементтен тұратын үшбұрыштың теңдік белгілерінің орындалуын тексеру жеткілікті. Сондықтан екі үшбұрыштың тең екендігін білу үшін үшбұрыштардың теңдік белгілері қолданылатындығы айтылады.

Теореманы ашу туралы жпалпы мәселе

Үшбұрыштардың теңдік белгілерінің мазмұны үшбұрыштардың белгілеріне сйкес элементтерді тікелей өлшеу немесе берілген элементтері бойынша үшбұрыштарды салу арқылы ашылады.

Белгілі болғандай, үшбұрыштар теңдігінің төрт белгісі бар. Орта мектеп бағдарламасында тек үш белгі ғана қамтылған. Оқушылардың дүниетанымын кеңейту мақсатында жоғары сыныптарда немесе сыныптан тыс сабақтар кезінде үшбұрыштар теңдігінің төртінші белгісін оқыту өте пайдалы.

Үшбұрыштар теңдігі белгілерін үйрету реті жайлы мәселені түрліше шешуге болады:

а) негізінен, алдымен екі қабырға мен олардың арасындағы бұрышы тең болған жағдайы қарастырылып, содан соң бір қабырға мен оған іргелес екі бұрышы тең, одан кейін барлық үш қабырғасы тең болатын жағдайы беріледі;

ә) алдымен бір қабырғасы мен оған іргелес екі бұрышы тең болатын жағдай, содан соң екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы тең, соңында, үш қабырғасы тең болатын жағдай қарастырылады.

Осы тақырыпты үйретудің бірінші тәсілі қабылданған.

4. Үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі

Үшбұрыштар теңдігі белгілерін анықтауды үшбұрыштарды салу есептерін шығарудан бастаған пайдалы. Осыған байланысты екі үшбұрыш тең болатын жеткілікті шарттар жайлы ұғым біртіндеп айқындалады.

Берілген үшбұрышқа тең үшбұрыш салу үшін үшбұрыштың қанша элементін және қайсысын беру керек деген сұрақ туады.

Осы жағдайларды анықтауды мұғалім мына түрде жүргізуі мүмкін.

Үшбұрыштардың қандай элементтері тең болғанда үшбұрыштар тең екенін оқушылардың өздері ашатындай жағдай жасау үшін мұғалім мынадай тәжірибе жұмысын жүргізеді.

Бір бұрышы ғана тең болатын екі үшбұрыштың моделін демонстрациялайды: олардың тең бұрыштары дәл келетіндей етіп беттестіргенде бұрыштар беттескенімен, үшбұрыштар дәл беттеспейтіндігі көрсетіледі, бұл үшбұрыштар тең емес.

Содан соң бір бұрыш оған іргелес бір қабырғасы тең үшбұрыштарды беттестіріп көрсетеді: үшбұрыштардың екі төбесі дәл беттеседі де, үшінші төбесі дәл келмейді. Мұндай үшбұрыштар да тең емес.

Енді үшбұрыштардың тең бұрыштарына іргелес екі қабырғасы тең болатын үшбұрыштар моделінің жұбын демонстрациялайды: беттестіру кезінде бұл үшбұрыштардың барлық элементтері беттеседі. Демек, бұл үшбұрыштар тең.

Соңғы тұжырым жасалады: *егер екі үшбұрыштың бір бұрышы, оған іргелес екі қабырғасы тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.* Мұны басқаша да тұжырымдауға да болады: *Егер үшбұрыштардың екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрыштары тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.*

Бұл белгіні үшбұрыштың бір бұрышы; бір бұрышы және бір қабырғасы; бір бұрышы, екі қабырғасы бойынша үшбұрыштар салу тапсырмаларын орындау арқылы басқаша әдіспен анықтауға да болады.

Мұғалім қандайда бір үшбұрыш моделін көрсетіп, үшбұрыштың бір бұрышын транспортирмен өлшейді. Тақтаға бір бұрышы сол бұрышқа тең үшбұрыш салады. Ондай көптеген үшбұрыштар салуға болады. Салынған үшбұрыштарды бастапқы үшбұрыш моделімен салыстыра отырып, олардың тең еместігіне оқушылардың көздері жетеді.

Енді үшбұрыштың сол бұрышы мен оған іргелес бір қабырғасы бойынша үшбұрыш салу тапсырылады. Оқушыларға осы берілгендер бойынша бірнеше үшбұрыш салады. Ол да берілген үшбұрышқа тең болмайды.

Мұғалім сынып тақтасына үшінші тапсырманы береді, яғни сол бұрыш пен оған іргелес екі қабырғасына тең тең болатындай үшбұрыштар салады. Салынған үшбұрыштарды берілген үшбұрышпен беттестіре салу арқылы, тең екендігін көреді. Осы жүргізілген бақылаулар негізінде оқушылар берілген үшбұрышқа тең үшбұрыш салу үшін оның үш негізгі элементін – бір бұрышы және оған іргелес екі қабырғасы берілудің жеткілікті екендігі жөнінде қорытынды жасайды.

Орындалған тапсырмалардағы үшбұрыштың элементтерін салыстыра отырып оқушылар қорытынды тұжырымды түрлендіреді: егер үшбұрыштың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы бойынша оған тең екінші үшбұрыш салуға болады.

Бірақ мұғалім тек тәжірибеге негізделген қорытындының бізді қанағаттандырмайтындығын оқушылардың есіне салады.

Сондықтан қатаң логикалық пайымдаулар жолымен жасалған қорытында ғана дұрыс деп есептелнеді.

Осыдан соң теореманы тұжырымдап, оны дәлелдеуге көшеді.

Теорема. *Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы екінші үшбұрыштың сәйкес екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.*

Берілгені: $\triangle ABC$ және $\Delta A_1B_1C_1$,

$AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$,

$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$.

Дәлелдеу керегі: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

Дәлелдеуі. 1) $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$ болғандықтан, A_1 төбесі A төбесімен (4.3-сурет)., ал A_1B_1 және A_1C_1 қабырғалары сәйкес AB және AC сәулелерінде жататындай етіп, $C_1A_1B_1$ бұрышын CAB бұрышына беттестіруге болады.

2) $AB=A_1B_1$ болғандықтан [illegible] мен беттеседі, яғни B_1 және B нүктелері беттеседі.

4.3-сурет

3) $AC=A_1C_1$ болғандықтан A_1C_1 қабырғасы AC қабырғасымен беттеседі, яғни C_1 және C нүктелері беттеседі.

Демек, BC қабырғасы B_1C_1 қабырғасымен дәл беттеседі.

Олай болса, $A_1B_1C_1$ және ABC үшбұрыштары толық беттеседі. Онда бұл үшбұрыштар өзара тең. *Теорема дәлелденді.*

Дәлелденген теорема үшбұрыштардың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы бойынша теңдік белгісі деп аталады.

Оқушылар назарын мынадай маңызды мәселеге аудару керек: үшбұрыштардың теңдік белгісі бойынша екі үшбұрыштың тең болатындығы белгілі болса, онда ол үшбұрыштардың сәйкес басқа қабырғалары да, сәйкес бұрыштары да тең болады. Сондықтан теореманы дәлелдегеннен кейін $\triangle ABC$ және $\Delta A_1B_1C_1$ екі қабырғасы $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ мен олардың арасындағы бұрышы $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$ бойынша $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ екендігінен $BC=B_1C_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$ болатындығы шығады.

Бірінші белгіні есте сақтауы және есптер шығаруда қолдана білуі үшін үшбұрыштар тең болатындай үш элементін, өзара тең екі қабырғасын және олардың арасындағы бұрышын анықтай алуы, егер үшбұрыштар тең болса, одан салдар шығарып алу біліктіліктерін қалыптастыратын ауызша жаттығулар орындалуы керек.

1. АВС үшбұрышының АВ=8 см, АС = 12 см, $\angle A = 67^0$, және МТК үшбұрышының МТ = 8 см, МК=12 см, $\angle M = 67^o$ екендігі белгілі. Үшбұрыштар тең бе? Бұл үшбұрыштырдың сәйкес бұрыштары, сәйкес қабырғалары қайсы? Олардың басқа қандай бұрыштары мен қабырғалары тең?

2. АВС үшбұрышының АВ=8 см, АС = 12 см, $\angle A = 67^0$, және МТК үшбұрышының МТ = 8 см, МК=12 см, $\angle M = 65^o$ екендігі белгілі. Үшбұрыштар тең бе? Олардың басқа бұрыштары мен қабырғалары туралы не айтуға болады?

3. АВС үшбұрышының АВ=8 см, АС = 12 см, $\angle A = 67^0$, және МТК үшбұрышының МТ = 8 см, МК=11 см, $\angle M = 67^o$ екендігі белгілі. Үшбұрыштар тең бе?

4. Тақтаға немесе плкатқа сызылған немесе интерактивті тақта арқылы көрсетілетін дайын сызбалар ақылы (4.4-сурет) тапсырмалар орындау:

а) Тең үшбұрыштарды ата.

ә) Қандай белгі бойынша ол үшбұрыштар тең?

б) Тең үшбұрыштардың басқа қандай элменттері тең?

в) Не себепті үшбұрыштар тең емес?

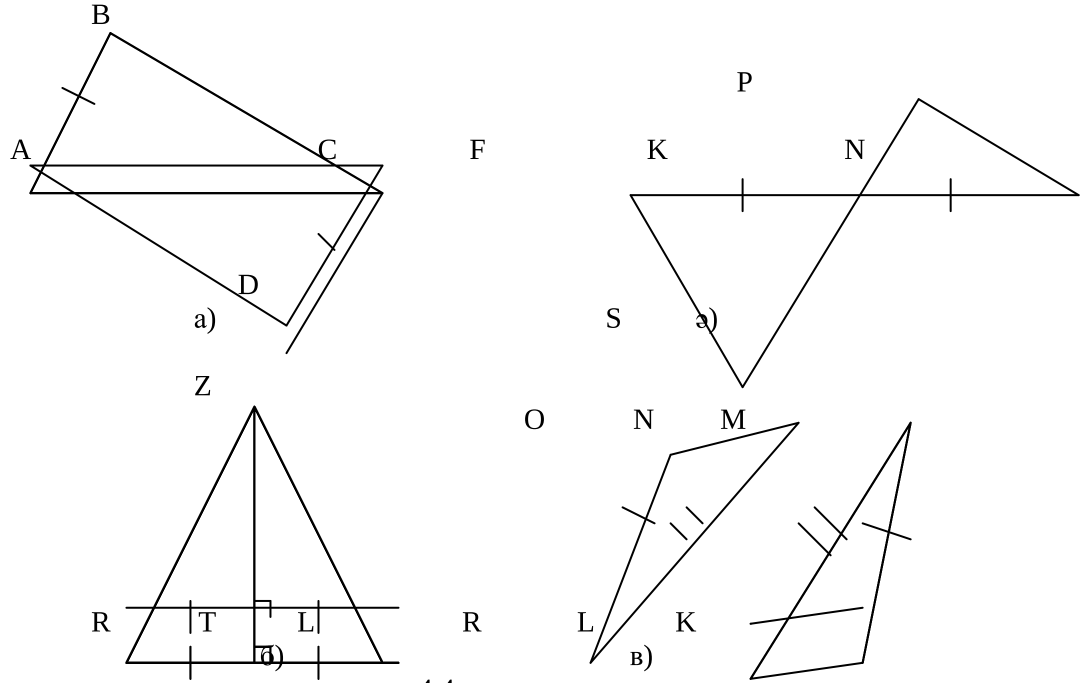
5.Берілгені $\Delta MPC = \Delta DAB, MP = 12$ см, $CP = 8$ см, $\angle A = 73^o$. Мына пікірлердің қайсысы дұрыс?

а) DB=8 см, AB=12см;

ә) $\angle M = 73^{\circ}$, AB= 8 см;

б) AD=12 см, $\angle P = 73^{\circ}$ см.

Осындай жаттығулар орындағаннан кейін теореманы қолданып есептер шығарылады.



4.4 сурет

Жаңа ұғым енгізіліп, жаңа теорема дәлелденгеннен кейін, оқушыларға бірден саралап тапсырма беріп, саралап оқыту принципін жүзеге асыруға асықпау керек. Оқушылар жаңадан игерілген білімдерін тиянақты меңгеріп алуын ойластырған абзал. Жаңа материалды меңгеріп, оны тиянақтап, бекітуге арналған тапсырмалар мен есептер біртіндеп күрделене түсіп, оларды шығаруға оқушылар белсенді түрде түгел қатысатындай жағадай жасау керек.

2-есеп. ΔAOC және ΔBOD үшбұрыштарының AB және CD кесінділері әрқайсысының ортасы болатын О нүктесінде қиылысады. Егер AC = 10 м болса, онда BD-ны тап.

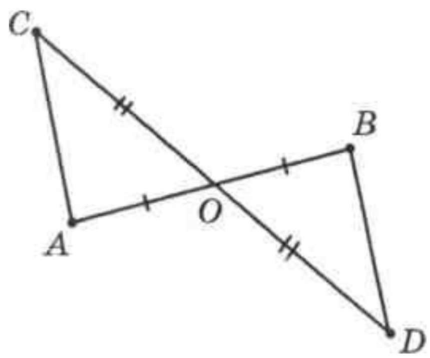
Берілгені: ΔAOC және ΔBOD,

$AO=BO$, $CO=DO$,

$AC=10$ *м.*

Табу керегі: BD.

Шешуі. ΔAOC және ΔBOD үшбұрыштарын қарастырайық. Есептің шарты бойынша $AO=BO$, $CO=DO$, вертикаль бұрыштар болғандықтан $\angle AOC = \angle BOD$ (4.5-сурет). Екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы бойынша үшбұрыштар теңдігінің белгісіне сәйкес $\Delta AOC = \Delta BOD$. Үшбұрыштар тең болса, олардан сәйкес қабырғалары мен сәйкес бұрыштары тең болады. Сондықтан $BD=AC=10$ *м*.



4.5-сурет

Үшбұраштың теңдігіне сілтеме жасағанда «екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы бойынша теңдік белгісіне сейкес» деп айтылу керек. Немесе үшбұрыштар теңдігінің белгісінің нөмірі аталып, теореманы толық айтуға да болады.

Есептің шығарылуы төмендегідей өрнектелеуі мүмкін.

3-есеп. *Берілгені:* ΔABC. $AB = CB,$

$\angle ABH = \angle CBH$ (4.6-сурет).

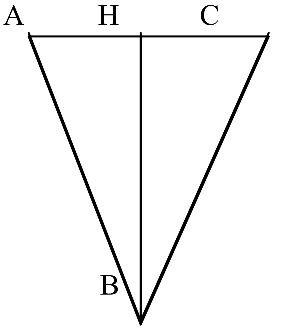
Дәлелдеу керегі: $\angle AHB = 90^0$.

Дәлелдеуі: 1. ΔAHB және ΔCBH қарастырамыз. Есептің шаты бойынша(е.ш.б.) $AB = CB, \angle ABH = \angle CBH$, BH – ортақ қабырға. Екі қабырға және олардың арасындағы бұрыш бойынша $\Delta ABH = \Delta CHB$.

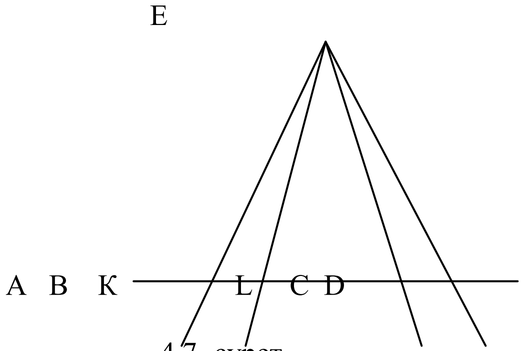
2. $\Delta ABH = \Delta CHB$ болғандықтан, $\angle AHB = \angle CHB$.

3. $\angle AHB$ және $\angle CHB$ – сыбайлас бұрыштар болғандықтан, $\angle AHB + \angle CHB = 180^0$, яғни $2\angle AHB = 180^0$.

4.Демек, $\angle AHB = 90^0$.



4.6.-сурет



4.7 -сурет

4-есеп. *Берілгені:* $\angle ABE = \angle ECD$, *BE=CE, BK=LC,* $\angle BKE = 110^0$ (4.7-сурет).

Табу керегі: $\angle ELC$.

Шешуі: Талдау. $\angle ELC$ бұрышының шамасын табу үшін ΔELC = ΔEKB екенін, ал ол үшбұрыштардың теңдігі $\angle EBK = \angle ECL$ болатындығын көрсетуге байланысты.

1. $\angle ABE,$ $\angle KBE$ – сыбайлас бұрыштар болғандықтан $\angle ABE + \angle KBE = 180^0$, демек $\angle KBE = 180^0 - \angle ABE$.

2. $\angle DCE, \angle LCE -$ сыбайлас бұрыштар болғандықтан $\angle DCE + \angle LCE = 180^0$, демек, $\angle LCE = 180^0 - \angle DCE$.

3. Е.ш.б. $\angle ABE = \angle ECD$,

дәлелдеуіміз бойынша(д.б.):

$\angle KBE = 180^0 - \angle ABE,$

$\angle LCE = 180^0 - \angle DCE$.

Олай болса, $\angle KBE = \angle LCE$.

4. ΔBEK және ΔCEL:

Е.ш.б.: *BE=CE, BK=LC;*

Д.б.: $\angle KBE = \angle LCE$.

Екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы бойынша $\Delta BEK = \Delta CEL$. Тең үшбұрыштардың сәйкес бұрыштары тең: $\angle ELC = \angle BKE = 110^0$.

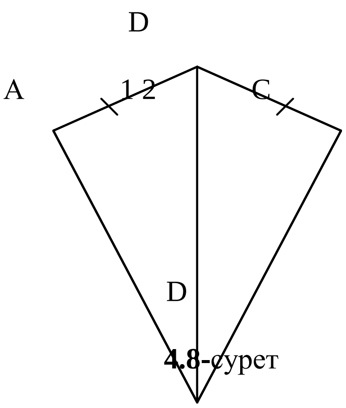
Жауабы: $\angle ELC = 110^0$.

Осыған ұқсас тапсырмалар үйге беріледі.

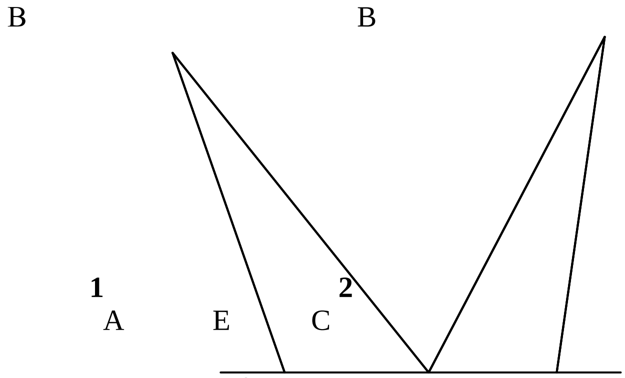
Келесі сабақта оқушылар өтілген материалады толық игергені белгілі болған жағдайда ғана, деңгейлер бойынша өзбетінше жұмысты ұйымдастыруға болады.

Деңгейлер бойынша өзбетінше жұмысқа ұсынылатын тапсырмалардың бір нұсқасы төмендегідей.

I деңгей



4.8-сурет



4.9-сурет

1-нұсқа

1. Берілгені: $\triangle ABD, \triangle CBD$ (4.8-сурет),

$\angle 1 = \angle 2, AB = BC.$

Дәлелдеу керек: $\triangle ABD = \triangle CBD$.

II деңгей

1-нұсқа

1. Берілгені: AB=CD(4.9-сурет), $\angle 1 = \angle 2$,

E –AC ортасы, BE=10 см.

Табу керек: DE.

III деңгей

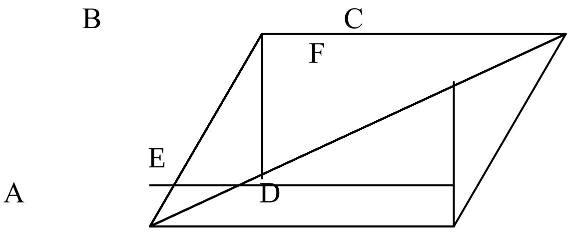
1-нұсқа

Берілгені: $\triangle BEC = \triangle DFA$ (4.10-сурет).

Дәлелдеу керек:

1) $\triangle ABC = \triangle CDA$;

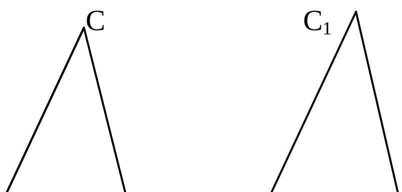
2) $\triangle AEB = \triangle CFD$.



4.10-сурет

4. Үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісі

Теорема. *Егер бір үшбұрыштың бір қабырғасы мен оған іргелес екі бұрышы екінші үшбұрыштың сәйкес қабырғасы мен оған іргелес екі бұрышына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.*



Берелгені: ΔABC және $\Delta A_1B_1C_1$,

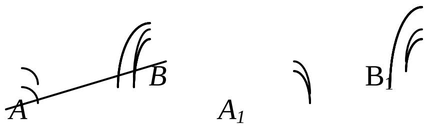
$AB = A_1B_1$,

$\angle A = \angle A_1$,

$\angle B = \angle B_1$.

Дәлелдеу керек:

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.



4.11-сурет

Дәлелдеуі. 1. $\angle A = \angle A_1$ болғандықтан, A_1 төбесі A төбесімен беттесетіндей етіп, AB қабырғасы A_1B_1 жататындай етіп ABC үшбұрышын $A_1B_1C_1$ үшбұрышымен беттестіре салуға болады (4.11-сурет).

2. $AB = A_1B_1$ болғандықтан AB қабырғасы A_1B_1 қабырғасымен беттеседі де, B нүктесі B_1 нүктесімен дәл беттеседі.

3. AC қабырғасы A_1C_1 сәулесінде жататындықтан C және C_1 нүктелері AB түзуіне қатысты алғанда бір жарты жазықтықта жатады.

4. $\angle B = \angle B_1$ болғандықтан, B және B_1 нүктелері дәл беттеседі де, BC қабырғасы B_1C_1 сәулесінің бойында жатады.

5. Сондықтан AC және BC қабырғаларының ортақ төбесі болатын C нүктесі, ол қабырғалар жататын A_1C_1 және B_1C_1 сәулелерінің ортақ нүктесі C_1 төбесімен дәл беттеседі.

6. Демек, AC және A_1C_1, BC және B_1C_1 қабырғаларымен дәл беттеседі. Сонымен, ABC үшбұрышын $A_1B_1C_1$ үшбұрышымен беттескендіктен, олар өзара тең.

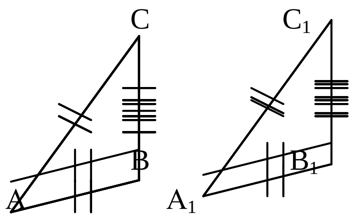
Теорема дәлеледенді.

Бұл белгі үшбұрыштардың бір қабырғасы және оған іргелес екі бұрышы бойынша теңдік белгісі деп аталады.

Үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісі бойынша $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ ($AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ және $\angle B = \angle B_1$) болса, оның слдары $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$ болады.

5. Үшбұрыштар тендігінің үшінші белгісі

Теорема. *Егер бір үшбұрыштың үш қабырғасы екінші үшбұрыштың сәйкес үш қабырғасына тең болса, онда бұл үшбұрыштар тең болады.*



4.12- сурет

Берілгені: ΔABC және $\Delta A_1B_1C_1$;

$AB = A_1B_1$;

$AC = A_1C_1$;

$BC = B_1C_1$.

Дәлелдеу керегі:

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Дәлелдеуі. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының A төбесін A_1 төбесімен, B төбесін B_1 төбесімен беттесетіріп, ал C және C_1 төбелерін $AB(A_1B_1)$ түзуінің екі жағында жататындай етіп қояйық (4.12-сурет).

Мұнда үшбұрыштар өзара үш түрлі жағдайда орналасуы мүмкін: 1^0. C_1C сәулесі $A_1C_1B_1$ бұрышының ішінен өтеді (4.13,а-сурет); 2^0. C_1C сәулесі $A_1C_1B_1$ бұрышының қабығаларының бірімен дәл келеді (4.13,ә-сурет); 3^0. C_1C сәулесі $A_1C_1B_1$ бұрышынан тыс өтеді (4.13,б-сурет).

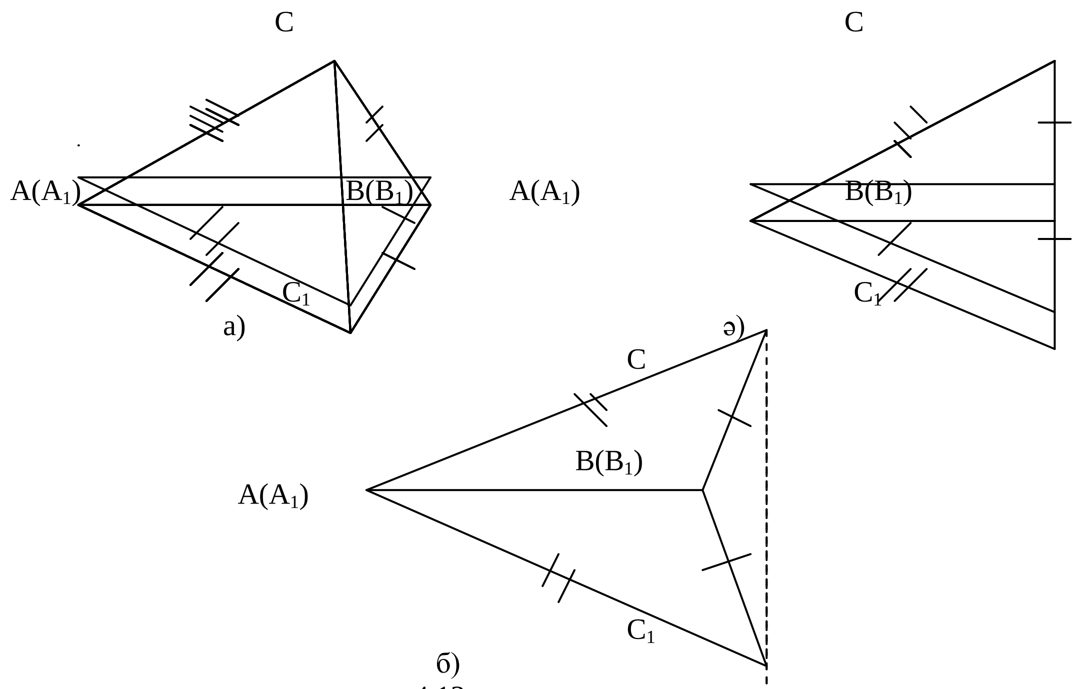
1^0 C_1C сәулесі $A_1C_1B_1$ бұрышының ішінен өтетін жағдайын қарастырайық (4.13,а-сурет).

1) Теореманың шарты бойынша $AC = A_1C_1$ болғандықтан, ΔA_1C_1C - теңбүйірлі. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштарының қасиеті бойынша $\angle A_1C_1C = \angle A_1CC_1$.

2) Теореманың шарты бойынша $BC = B_1C_1$ болғандықтан, C_1B_1C үшбұрышы да теңбүйірлі. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштарының қасиеті бойынша $\angle B_1C_1C = \angle B_1CC_1$.

3) $\angle A_1C_1B_1 = \angle B_1C_1C + \angle A_1C_1C$, ал $\angle A_1CB_1$ = $\angle B_1CC_1 + \angle A_1CC_1$ болғандықтан, $\angle A_1C_1B_1$ = $\angle A_1CB_1$ болады.

4) Сонымен ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында: теореманың шарты бойынша $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ және $\angle C = \angle C_1$ екен. Екі қабырғасы мен олрдың арасындағы бұрышы бойынша $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.



4.13-сурет

2^0 C_1C сәулесі $A_1C_1B_1$ бұрышының қабығасы болатын жағдайды қарастырамыз (4.13,ә-сурет).

1) Теореманың шарты бойынша $A_1C_1 = AC$ болғандықтан ΔC_1A_1C - теңбүйірлі. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштарының қасиеті бойынша $\angle A_1C_1C = \angle A_1CC_1$.

2) ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында: теореманың шарты бойынша $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$ және $\angle C_1 = \angle C$ екен. Демек, екі қабырғасы мен олрдың арасындағы бұрышы бойынша $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

3^0 C_1C сәулесі $A_1C_1B_1$ бұрышынан тыс өтетін жағдайды қарастырайық (4.13,б-сурет).

1) Теореманың шарты бойынша $A_1C_1 = AC$ болғандықтан, ΔC_1A_1C - теңбүйірлі. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштарының қасиеті бойынша $\angle A_1C_1C = \angle A_1CC_1$.

2) Теореманың шарты бойынша $B_1C_1 = BC$ болғандықтан, C_1B_1C үшбұрышы да теңбүйірлі. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштарының қасиеті бойынша $\angle B_1C_1C = \angle B_1CC_1$.

3) $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1C_1C - \angle B_1C_1C$, ал $\angle A_1CB_1 = \angle A_1CC_1 - \angle B_1CC_1$ болғандықтан, $\angle A_1C_1B_1$ = $\angle A_1CB_1$ болады.

4) ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарында: теореманың шарты бойынша $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ және $\angle C = \angle C_1$ екен. Екі қабырғасы мен олрдың арасындағы бұрышы бойынша $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Бұл теорема үшбұрыштардың үш қабырғасы бойынша теңдік белгісі деп аталады.

Теңбүйірлі үшбұрыштар

Оқушылыр үшбұрыштың бұрыштарының шамасына қарай жіктемелеумен таныс: сүйірбұрышты үшбұрыш, доғалбұрышты үшбұрыш, тікбұрышты үшбұрыш.

Ал үшбұрыштардың қабырғалары бойынша жіктемесімен таныс емес.

Сондықтан мұғалім қатты қағаздан қырқып алынған қабырғалары әр түрлі үшбұрыштардың қабырғаларын өлшейді. Нәтижеде оқушылар үшбұрыштардың үш қабырғасының ұзындықтары үш түрлі, екі қабырғасы тең, үш қабырғасы да тең болатындығын көреді.

Мұғалім екі қабырғасы тең үшбұрышты теңбүйірлі үшбұрыш деп атау келісілгенін айтады. Одан кейін анықтама тұжырымдалады.

Үшбұрыштың екі қабырғасы тең болса, ол ***теңбүйірлі үшбұрыш*** *деп атадады.* Теңқабырғалар теңбүйірлі үшбұрыштың *бүйір қабырғалары,* ал үшінші қабырғасы – *табаны,* табанына қарсы жатқан бұрыш *төбесі* деп аталады.

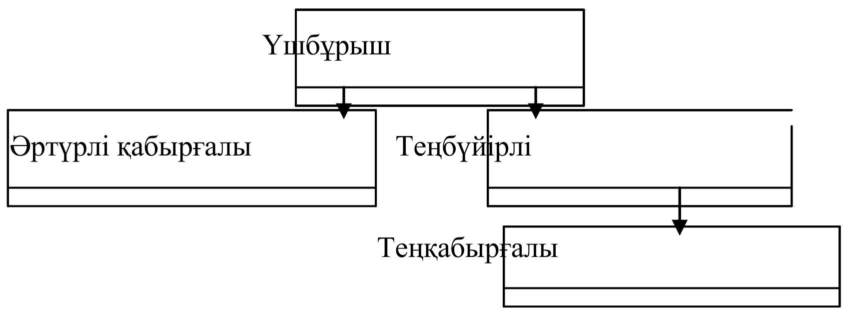
Теңбүйірлі *ABC* үшбұрышының *AC=BC* – бүйір қабырғалары*, AB* –табаны*, C* –табанына қарсы жатқан *төбесі* немесе $\angle C$ – табанына қарсы жетқан бұрышы, $\angle A$ және $\angle B$ - табанына іргелес бұрыштар делінеді (4.19,а-сурет).

Барлық қабырғалары тең үшбұрыштың екі қабырғасы тең болғандықтан, ол да теңбүйірлі үшбұрыш. Бірақ оның ерекше аталымы бар. Барлық қабырғалары тең үшбұрышты *теңқабырғалы үшбұрыш* деп атайды. 4.19,ә-суретте теңқабырғалы KHE үшбұрышы бейнеленген: *KH=HE=KE*.

Теңбүйірлі үшбұрыш а) *Теңқабырғалы үшбұрыш* ә)

4.19-сурет

Осыдан кейін үшбұрыштың қабырғалары бойынша жіктемесін келтіруге болады.



Сонымен қабырғаларына қарай үшбұрыштар қабырғаларының ұзындықтары әртүрлі және теңбүйірлі болып екіге бөлінеді. Теңбүйірлі үшбұрыштың құрамына оның ішкі жиыны болып теңқабырғалы үшбұрыш енеді.

Тең бүйірлі үшбұрыштың анықтамасын оқып үйренуде оқушылар анықтаманың тұжырымдамасын жатқа біліп қана қоймай, оны түсінуіне көбірек көңіл аудару керек.

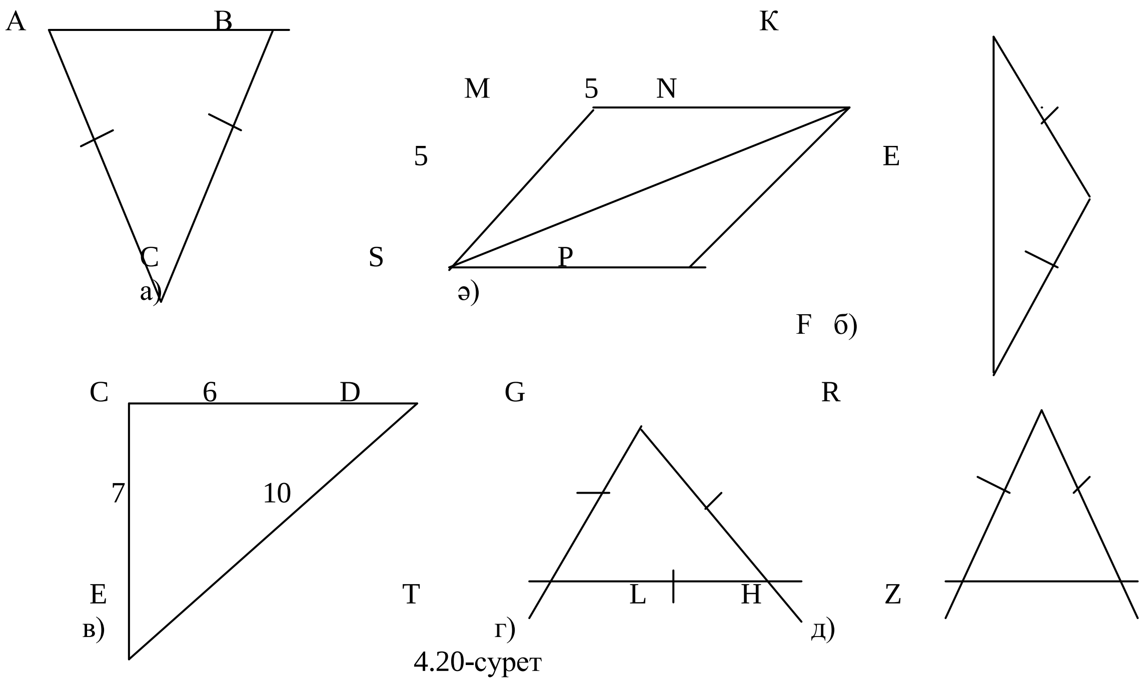
Ол үшін ұғымға келтіру және ұғымнан салдар шығару жұмыстары жүргізіледі. Біріншісінде анықтамасына сәйкес келетін теңбүйірлі үшбұрышты танып, анықтай алуға, ал ұғымнан салдар шығару - егер үшбұрыш теңбүйірлі екендігі белгілі болса, оның бүйір қабырғаларын, табанын, табанына қарсы жатқан төбесін көрсете алуға арналған ауызша жаттығулар орындалады.

Мысалы, - 4.20,а–суретте ΔABC - теңбүйірлі, AC= BC – бүйір қабырғалары, AB – табаны, C - табанына қарсы жатқан төбесі;

- 4.20,ә–суретте SM = MN болғандықтан ΔSMN – теңбүйірлі. SM –табаны, $\angle SMN$ – табанына қарсы жатқан бұрыш, $\angle MSN$ және $\angle MNS$ табанына іргелес бұрыштар;

- 4.20,в–суретте ΔECD теңбүйірлі үшбұрыш емес;

- 4.20,г–сурете ΔTGL – тең қабырғалы үшбұрыш. Тең қабырғалы үшбұрыштың кез келген қабырғасын табаны ретінде алынады.



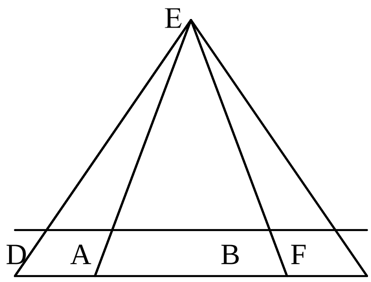
4.20-сурет

Бірінші кезекте үшбұрыштың теңбүйірлі екенін анықтауға, одан соң есеп шартында «АВС үшбұрышы теңбүйірлі, оның табаны АС» деп берілсе оқушылар оның тең қабырғалары АВ=ВС екендігін ажырата алуға арналған есептер шығарылады.

Мынадай есепті қарастырайық.

5-есеп. Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы 6 см, табаны бүйір қабырғасынан 3 есе кіші. Үшбұрыштың периметрін тап.

6-есеп.



4.21-сурет

Берілгені: $\triangle DEA = \triangle FEB$

$\angle D = \angle F$.

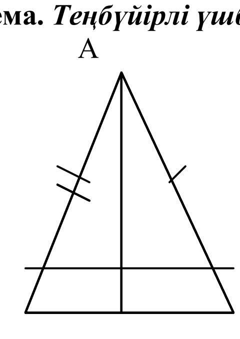
Дәлелдеу керек:

$\triangle AEB$ - теңбүйірлі

Шешуі. 1. Е.ш.б. $\triangle DEA = \triangle FEB$. Тең үшбұрыштардың D және F тең бұрыштарына қарсы тең қабырғалар жатады: ЕА =ЕВ.

2. Анықтама бойынша $\triangle AEB$ - теңбүйірлі үшбұрыш.

Теорема. ***Теңбүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштары тең.***



Берілгені:

$\triangle ABC$ – теңбүйірлі;

BC – үшбұрыштың табаны

Дәлелдеу кркек:

B D C $\angle B = \angle C.$

4.22-сурет

Дәлелдеуі. 1. $\triangle ABC -$ теңбүйірлі (4.22-сурет), *BC* – табаны $\Rightarrow AB = BC.$

2. *A* бұрышының *AD* биссектрисасы болсын $\Rightarrow \angle BAD = \angle CAD.$

3. $\triangle ABD$ және $\triangle ACD$:

AB=*AC*, $\angle BAD = \angle CAD, AD -$ ортақ қабырға $\Rightarrow$ $\triangle ABD$ = $\triangle ACD$.

4. $\triangle ABD$ = $\triangle ACD$ $\Rightarrow \angle B = \angle C.$

Дәлелдеудің бірінші қадамы үшбұрыштың теңбүйірлі екендігінен салдар шығарып алуға негізделген: $\triangle ABC -$ теңбүйірлі, демек теңбүйірлі үшбұрыштың анықтамасы бойынша *AB* =*BC.* ($\Rightarrow$ белгісі салдар ұғымын білдіреді: «демек ... болады», «сондықтан ... болады», «... салдары ...» т.б. орныныа қолданылады).

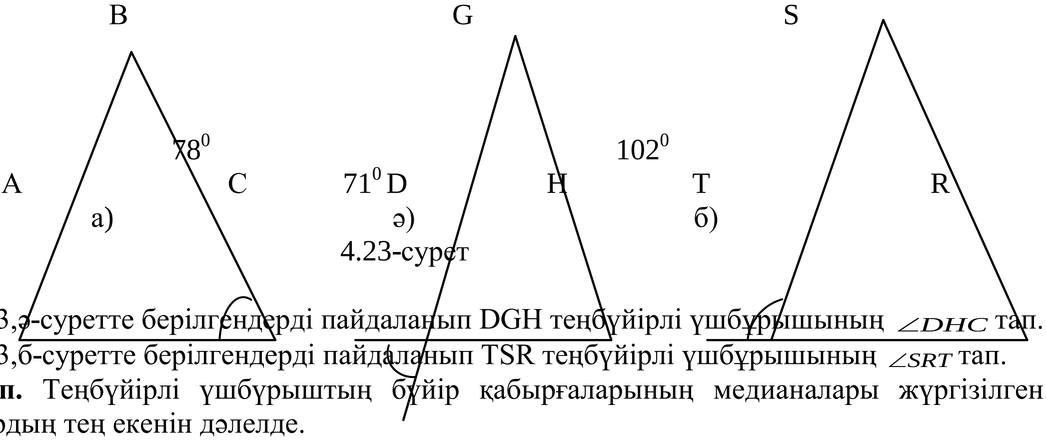
Екінші қадам бұрыштың биссектрисасын салу және одан салдар шығарып алу арқылы жүзеге асады: *A* бұрышының *AD* биссектрисасы болғандықтан, $\angle BAD = \angle CAD$.

Үшінші қадамда $\triangle ABD$ және $\triangle ACD$ қарастырылады: *AB*=*AC*, $\angle BAD = \angle CAD, AD -$ ортақ қабырға, екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы бойынша үшбұрыштардың теңдік белгісіне сәйкес $\triangle ABD$ = $\triangle ACD$.

Төртіші қадамда $\triangle ABD$ және $\triangle ACD$ үшбұрыштардың теңдігінен салдар шығарылады: $\triangle ABD$ = $\triangle ACD$ тең болғандықтан олардың AB=BC қабырғаларына қарсы жатқан бұрыштары тең болады, олай болса $\angle B = \angle C.$

Тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштарының қасиетін қолданып есеп шығаруды дайын сызбалардан бастаған жөн.

1. Теңбүйірлі *ABC* үшбұрышының табаны *AC*, $\angle C = 78^0$. $\angle A$ неге тең (4.23,а- сурет) ?

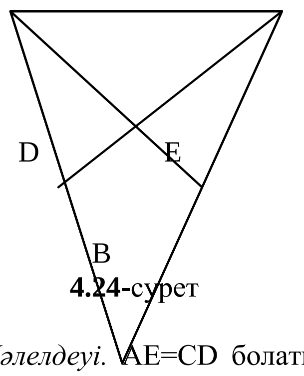


4.23-сурет

2.4.23,ә-суретте берілгендерді пайдаланып DGH теңбүйірлі үшбұрышының $\angle DHC$ тап.

3.4.23,б-суретте берілгендерді пайдаланып TSR теңбүйірлі үшбұрышының $\angle SRT$ тап.

7-е**сеп.** Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғаларының медианалары жүргізілген. Ол медианалардың тең екенін дәлелде.



4.24-сурет

Берілгені: $\triangle ABC -$ теңбүйірлі,
AC – табаны,
CD – медиана,
AE - медиана.

Дәлелдеу керек: AE=CD

Дәлелдеуі. AE=CD болатындығын дәлелдеу үшін $\triangle ACD = \triangle ECA$ болатындығын көрсету жеткілікті.

1. Т.ш.б. $\triangle ABC -$ теңбүйірлі, AC – табаны болғандықтан AB=CB.
2. Теңбүйірлі үшбұрыштардың табанындағы бұрыштар тең: $\angle DAC = \angle ECA.$

3. CD және AE медиана болғандықтан, сәйкесінше $AD = \frac{1}{2}AB, CE = \frac{1}{2}CB$, олай болса AD=CE.

4. AC қабырғасы DAC және ECA үшбұрыштарына ортақ.

5. Екі қабырғасы және олардың арасындағы бұршы бойынша $\triangle DAC = \triangle ECA$.

6. Тең үшбұрыштардың тең бұрыштарына қарсы жатқан қабырғалар тең: CD= AE.

8-есеп. Тең қабырғалы үшбұрыштың барлық бұрыштары тең болатынын көрсетейік.

Шешуі. ΔABC тең қабырғалы үшбұрыш болсын: AB=AC=BC. Осыдан AB=AC теңдігі бойынша ΔABC тең бүйірлі. Онда тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштардың қасиеті бойынша $\angle B$=$\angle C$. Ал AB = BC теңдігінен, осы сияқты, $\angle A$ = $\angle C$ болатыны шығады. Олай болса, $\angle A$=$\angle B$ =$\angle$C.

Теңбүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштардың қасиеттеріне кері теореманы тұжырымдап, дәлелдеген пайдалы.

Теорема. ***Үшбұрыштың екі бұрышы тең болса, ол теңбүйірлі үшбұрыш.***

Теореманың дәлелдеуі оқушыларға ешақандай қиындық туғызбайды.

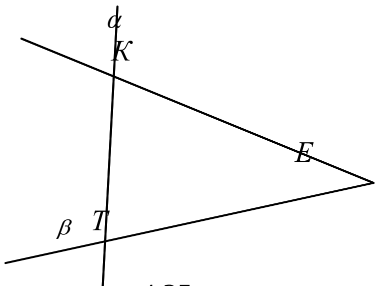
Бұл теорема теңбүйірлі үшбұрыштың белгісі екенін ескерту керек.

Сонымен теңбүйірлі үшбұрышты танып білудің екі белгісін білеміз:

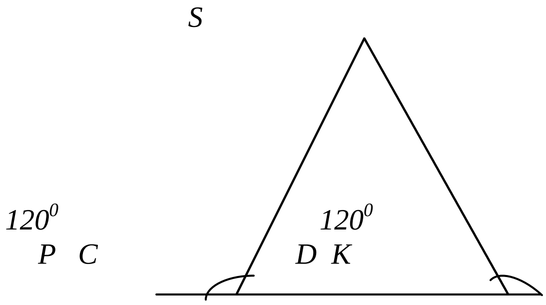
1) Анықтама бойынша: екі қабырғасы тең үшбұрыш теңбүйірлі;

2) Екі бұрышы бойынша белгісі туралы теорема бойынша: екі бұрышы тең үшбұрыш теңбүйірлі.

9-есеп. Егер $\alpha = \beta$, KE= 8 см болса, TE кесіндісі неге тең (4.25-сурет).



4.25-сурет



4.26-сурет

Есеп 8. 4.26-суреттегі $\triangle SCD -$ теңбүйірлі екенін көрсет.

Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына жүргізілген биссектрисасының (*теңбүйірлі үшбұрыштың табанына жүргізілген биссектриса әрі медиана, әрі биіктік болады*) қасиетін оқушылардың өз бетінше дәлелдеуіне ұсынуға болады. Оқушылар теңбүйірлі үшбұрыштың табанына жүргізілген биссектрисасы, медианасы және биіктігі дәл келетінін тағайындайды. Сол себепті мына тұжырымдар да дұрыс:

1. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына жүргізілген медиана биіктігі де биссектрисасы да болады

2. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына жүргізілген биіктігі медианасы да, биссектрисасы да болады.

Бұл тұжырымдар теңбүйірлі үшбұрыштың табанына жүргізілген биссектриса (медиана, биіктік) немесе табанына қарсы жатқан бұрыштың биисектрисасы (медианасы, биіктікгі) үшін ғана дұрыс болатыны ескертілу керек.

Мектеп оқулықтарында тең бүйірлі үшбұрыштың төмендгі белгілері есеп-теорема түрінде беріледі.

Үшбұрыштың бір төбесінен жүргізілген бисектрисасы оның медианасы да болса, онда ол үшбұрыш теңбүйірлі болады.

Үшбұрыштың биссектрисасы биіктігі де болса, онда үшбұрыш теңбүйірлі.

Үшбұрыштың бір төбесінен жүргізілген медианасы оның бисектрисасы да болса, онда ол үшбұрыш теңбүйірлі болады.

Үшбұрыштың медианасы биіктігі де болса, онда үшбұрыш теңбүйірлі.

Үшбұрыштың бір төбесінен жүргізілген биіктігі оның бисектрисасы да болса, онда ол үшбұрыш теңбүйірлі болады.

Үшбұрыштың биіктігі медианасы да болса, онда үшбұрыш теңбүйірлі.