15-лекция
Жазық фигуралардың аудандары

Жоспары:
1. Жазық фигуралардың ауданы ұғымы
2. Квадраттың ауданы
3. Тіктөртбұрыштың ауданы
4. Параллелограмның ауданы

Әдебиеттер:
1. Рахымбек Д., Кенеш Ә.С.Мектеп геометрия (планиметрия) курсын оқыту әдістемесі: Оқу құралы. / Д. Рахымбек, Ә.С.Кенеш –Алматы: Эверо,2015. – 320 б.
2. Мектеп оқулықтары
3. Мұғалімге арналған оқу-әдістемелік құралдар

1 Жазық фигуралардың ауданы ұғымы

Алғаш рет аудан ұғымымен мектеп оқушылары төменгі сыныптарда кездеседі. Олар тіктөртбұрыштың, шаршының, үшбұрыштың, дөңгелектің аудандары және кубтың, тікпараллелепипед пен тікцилиндр беттерінің аудандарымен таныс.

Жалпы, фигуралар ауданы ұғымын біз күнделікті іс-тәжірибемізде жиі қолданамыз. Мысалы, біздің отырған сынып бөлмесінің ауданы, саяжайға бөлінген жердің ауданы, футбол алаңының және т.с.с.

Оқушыларға практикалық мазмұндағы бірнеше есептер береді.

1-есеп. Сынып терезесінің қабырғалары 95 см және 42 см. Ауданын тап.

2-есеп. Алдын-ала өлшеу жұмыстарын атқару арқылы, сынып тақтасының, сынып столының, сынып журналы мұқабасының аудандарын тап.

Келесі әңгімені былай өрбітуге болады.

1. Біз геометриялық фигура – тіктөртбұрыштың ауданын есептедік, нәтижесінде оң сан шықты. Байқағанымыздай, тіктөртбұрыш ауданын табу дегеніміз – тіктөртбұрыш қабырғаларымен шектелген жазықтық бөлігінің өлшемін анықтайтын оң санды табу.

2. Тіктөртбұрыштың ауданының өлшем бірлігі үшін қабырғасы бірге тең квадрат алынған.

3. Тіктөртбұрышты сипаттайтын сандардың төмендегідей қасиеттері бар: оларды бір–бірімен салыстыруға (сынып тақтасы ауданы стол беті ауданынан үлкен т.с.с.), қосуға және азайтуға (екі столды қосуға, стол бетінің бір бөлігін жауып қоюға т.с.с.) болады.

4 Тіктөртбұрыш ауданы оның кеңістікте қалай орналасқанына тәуелсіз.

5 Тіктөртбұрыш ауданы төмендегідей талаптарды қанағаттандырады:

1) Тең тіктөртбұрыштар аудандары тең болады (кітаптың екі бетінің ауданы тең т.с.с.).

2) Егер тіктөртбұрыш бірнеше тұйық фигурадан тұратын болса, оның ауданы оның бөліктерінің аудандарының қосындысына тең (стол беті бірнеше бөліктен тұрса ауданы сол бөлік аудандарының қосындысына тең).

Бұл әңгіме, бір жағынан оқушылардың тіктөртбұрыш ауданы туралы мағлұматтарды есіне түсіріп, қайталауға мүмкіндік берсе, екінші жағынан, оларды жаңа ұғымдармен таныстырып өтеді.

Мұғалім кесіндінің ұзындығы мен жазық фигура ауданы ұғымдарын салыстырады. Кесіндінің ұзындығы дегеніміз белгілі бір масштабтық кесіндімен салыстырғандағы осы кесіндінің өлшемі болатын сан екені белгілі. Жазық фигура ауданы дегеніміз де осы сияқты түсінік.

Енді жазық фигуралардың ауданы ұғымын анықтамастан бұрын, бұл ұғымның кесінді ұзындығы ұғымымен салыстырғандағы кейбір ерекшеліктерін атап өтелік.

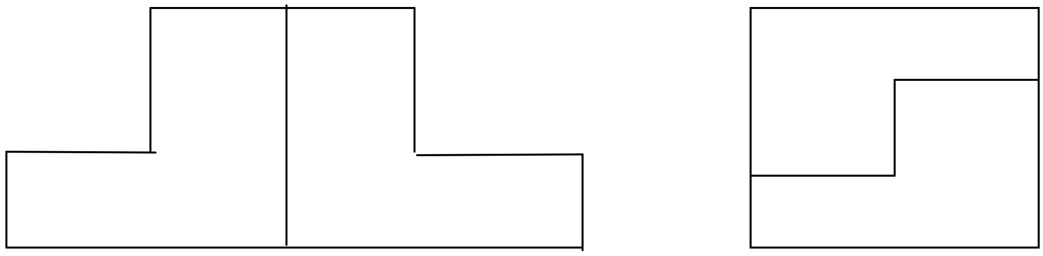
Екі кесіндінің ұзындықтары тең болса, онда бұл кесінділер тең болады; екі бұрыштың градустық (немесе радиандық) өлшемдері тең болса, онда бұл бұрыштар да тең болатынын жақсы білеміз. Ал фигуралардың аудандарын өлшеу үдерісінде бұл қасиеттер орындала бермейді. Яғни әр түрлі, өзара ұқсас емес фигуралардың аудандары бірдей бола беруі мүмкін. Мысалы қабырғалары 6 және 4, 3 және 8, 12 және 2 болатын тік төртбұрыштардың аудандары тең, бірақ олар өзара тең емес.

Аудандары тең көпбұрыштарды ***теңшамалы*** көпбұрыш дейді. Егер көпбұрыштар тең болса, онда олар теңшамалы болады. Бірақ теңшамалы фигуралар өзара тең бола бермейді.

Егер екі тең тіктөртбұрыш екі–үш тең және тең емес әртүрлі үшбұрыштар, тіктөртбұрыштар алып, оларды біріктіріп жаңа фигура бейнелеуге болады. Пайда болған жаңа фигураға қарап отырып, оның ұзындығы немесе еніне емес, әлгіндей жеке фигуралар бір жаңа фигура құрап тұрғанына мән беру керек.

Теңшамалы фигура мен теңқұрамды фигура арасында байланыс бар.

Егер екі фигураны қос–қостан өзара тең бөліктерге бөлу мүмкін болса, онда бұл фигураларды теңқұрамды деп атаймыз. 10.1-суретте тең құрамды фигуралар бейнеленген.

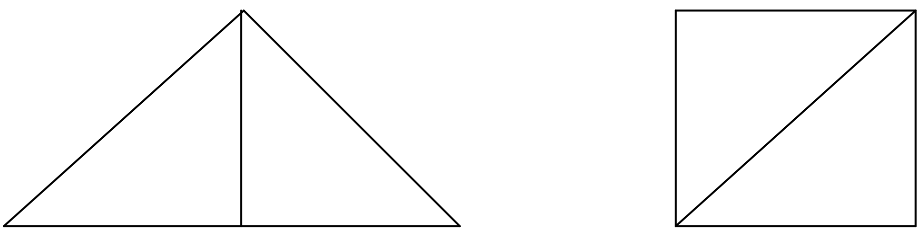


10.1-сурет

Екі көпбұрыш тең құрамды делінеді, егерде олар саны бірдей өзара қос-қостан тең болатын көпбұрыштарға бөлуге болатын болса.

Егер екі көпбұрыш теңқұрамды болса, онда олар теңшамалы болады.

Мысалы, 10.2-суретте бейнеленген үшбұрыш пен квадрат теңқұрамды сондықтан олар теңшамалы.



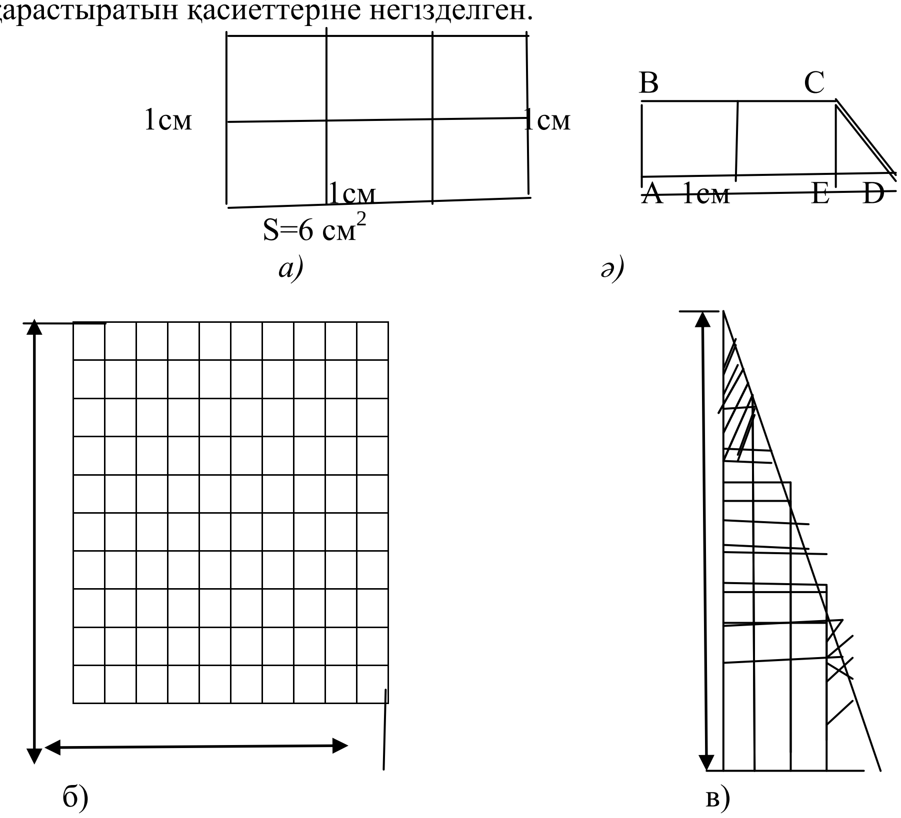
10.2-сурет

Көпбұрыштың ауданын жазықтықтың сол көпбұрыш алатын бөлігінің шамасы деп ұғамыз. Ауданды өлшеу, кесінділердің ұзындығын өлшеуге ұқсас, таңдап алынған өлшем бірлігі арқылы жүзеге асырылады. Ауданның өлшем бірлігіне қабырғасының өлшем бірлігіне тең квадрат алынады. Айталық кесінділердің өлшем бірлігіне сантиметр алынса, ал ауданның өлшем бірлігіне қабырғасы 1 см-ге тең квадрат алынады. Мұндай квадрат *квадрат сантиметр* деп аталып, $см^2$ деп белгіленеді. Осыған ұқсас квадрат метр ($м^2$), квадрат милиметр ($мм^2$) және т.с.с. анықталады.

Ауданның таңдап алынған өлшем бірлігіне сәйкес әрбір көпбұрыштың ауданы оң санмен өрнектеледі. Бұл сан берілген көпбұрышқа өлшем бірлігін және оның бөліктерінің неше рет салынғанын көрсетеді.

Мысалдар қарастырайық. 3, *а*-суретте тіктөрбұрыш кескінделген, оған квадрат сантимерт дәл 6 рет салынады. Бұл тіктөртбұрыштың ауданы 6 $см^2$ –ге тең екнінін білдіреді. 3, ә-суреттегі *АВСД* трапециясына квадрат сантиметр 2 рет салынып, трапецияның бөлігі *СДЕ* үшбұрышы қалады, оған квадрат сантиметр тұтас сыймайды. Осы үшбұрыштың ауданын өлшеу үшін квадрат сантиметрдің үлестерін, мысалы квадрат милиметрді қолдану керек. Ол - квадрат сантиметрдің 0,01 бөлігі. 3,б-суретте көрсетілгендей, квадрат сантиметр 100 квадрат милиметрге бөлінген (бұл сурет және 3, *в*-

сурет көрнекілік үшін үлкейтілген масштабпен берілген). 3, *в* –суретте квадрат милиметр *СДЕ* үшбұрышына 14 рет салынып, бұл үшбұрыштың квадрат милиметр толық салынбайтындай тағы да бөлігі (ол суретте штрихталған) қалған. Сол себепті АВСД трапециясының ауданы жуықтап алғанда 2,14 см^2-ге тең деуге болады. СДЕ үшбұрышының қалған бөлігін квадрат сантиметрдің тіпті ұсақ үлестерімен өлшеп, трапеция ауданының барынша дәл мәнін табуға болады. Өлшеудің осы процесін одан ары жалғастыруға болғанымен, іс жүзінде онша ыңғайлы емес. Әдетте көпбұрышқа қатысты тек кейбір кесінділерді ғана өлшеп алып, содан кейін белгілі формулалар бойынша ауданды есептейді. Бұл формулаларды қорытып шығару аудандардың қазір біз қарастыратын қасиеттеріне негізделген.



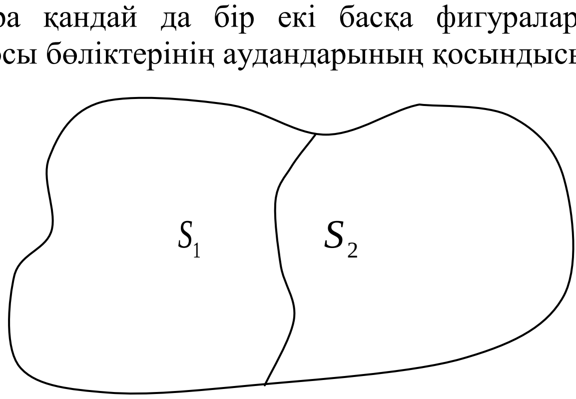
10.3-сурет

Бәрінен бұрын, егер екі көпбұрыш тең болса, онда аудандардың өлшем бірлігі мен оның бөліктері мұндай көпбұрыштарда бірдей сан рет салынатынын, яғни келесі қасиеттердің орындалатынын айта кетейік:

Жалпы, фигура ауданы ұғымын (кесінді ұзындығы ұғымына ұқсас) қатаң математикалық түрде төмендегі аксиомалардан алуға болады:

1. Тең фигуралардың аудандары тең.

2. Егер фигура қандай да бір екі басқа фигураларға бөлінсе, онда берілген фигураның ауданы осы бөліктерінің аудандарының қосындысына тең.



$$S = S_1 + S_2$$

3. Қабырғасы бір өлшем бірлігіне тең квадрат ауданы 1-ге тең.

Әрине, бұл аксиомалар аудан ұғымының көрнекілігінен шығатын қарапайым қасиеттер және олар фигура ауданын өлшеу үдерісінде анықталады. Осы аксиомалардан мынадай салдарлар шығады.

Салдар 1. Егер бір фигура екінші фигураның бөлігі болса, онда бұл фигураның ауданы екінші фигураның ауданынан кем болады.

Салдар 2. Теңқұрамды фигуралардың аудандары да тең болады.

Бұған кері тұжырым орындала бермейді, яғни аудандары тең (тең шамалы) фигуралар тең құрамды бола бермейді. Мысалы, дөңгелек пен квадраттың аудандары тең болуы мүмкін, ал бұл фигуралар тең құрамды бола алмайы.

Квадраттың ауданы. ***Квадраттың ауданы оның қабырғасының квадратына тең.***

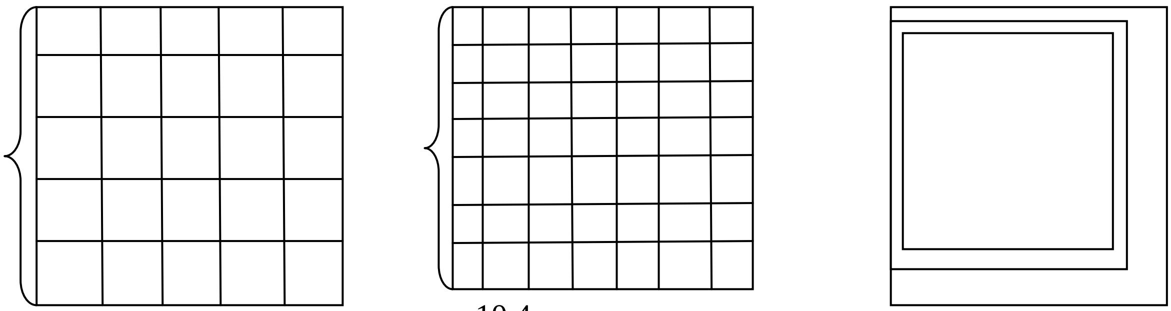
Қабырғасы a-ға тең квадраттың S ауданы a^2-қа тең болатынын дәлелдейік.

$a=\frac{1}{n}$ болатын жағдайдан бастайық, мұндағы n –бүтін сан. Қабырғасы 1 болатын квадратты, 180. а-суретте көрсетілгендей n^2 тең бөлейік (суретте n=5). Ал үлкен квадраттың ауданы 1-ге тең болғандықтан, әр кіші квадраттың ауданы $\frac{1}{n^2}$-ге тең. Әр кіші квадраттың қабырғасы $\frac{1}{n}$, яғни a-ға тең. Сөйтіп,

$$S=\frac{1}{n^2}=\left(\frac{1}{n}\right)^2=a^2. \qquad (1)$$

Енді a саны үтірден соң n таңбасы бар ақырлы ондық бөлшектерінде болсын (дербес жағдайда, a бүтін сан болуы мүмкін, сонда $n=0$).Сонда $m=a\cdot 10^n$ бүтін сан. Қабырғасы a-ға тең берілген квадратты, 180, б-суретте көрсетілгендей, m^2 тең квадраттарға бөлейік (суретте $m=7$) .Бұл жағдайда берілген квадраттың әр қабырғасы тең m бөлікке бөлінеді, олай болса, кез келген кіші квадраттың қабырғасы $\frac{a}{m}=\frac{a}{a\cdot 10^n}=\frac{1}{10^n}$. (1) формула бойынша әр кіші квадраттың ауданы $\left(\frac{1}{10^n}\right)^2$. Демек, берілген квадраттың S ауданы мынаған тең:

$$m^2\cdot\left(\frac{1}{10^n}\right)^2=\left(\frac{m}{10^n}\right)^2=\left(\frac{a\cdot 10^n}{10^n}\right)^2=a^2.$$



10.4-сурет

Енді a саны ақырсыз ондық бөлшек түрінде болсын. a санынан $(n+1)$-ден бастап үтірден кейінгі барлық ондық таңбаларды ескермей, a_n санын алайық. Ал a санының a_n-нан айырмасы $\frac{1}{10^n}$-нен артпайтындықтан, $a_n\le a\le a_n+\frac{1}{10^n}$, осыдан

$$a_n^2\le a^2\le\left(a_n+\frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (2)$$

Берілген квадраттың S ауданы қабырғасы a_n квадраттың ауданы мен қабырғасы $a_n + \frac{1}{10^n}$ квадрат ауданының (180, в-сурет), яғни a_n^2 пен $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$ арасында болатыны түсінікті:

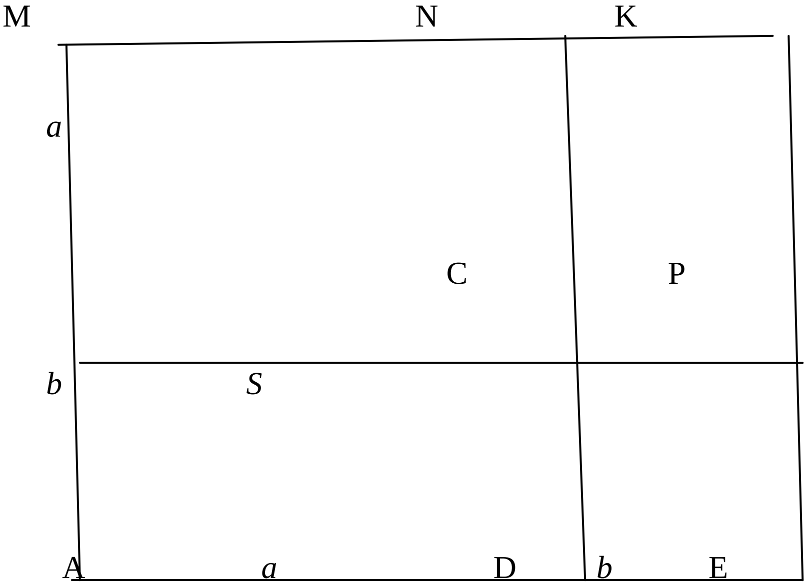
$$a_n^2 \le S \le \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (3)$$

n санын ақырсыз өсірейік. Сонда $\frac{1}{10^n}$ саны ақырсыз азаяды, демек, $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$ саны a_n^2 санына мейлінше жуықтай түседі. Сондықтан (2) және (3) теңсіздіктерден S саны a^2 санына мейлінше жуық болатынын көреміз. Олай болса, олар тең: $S = a^2$.

Тіктөртбұрыштың ауданы. Теорема. Қабырғалары а және в болатын тіктөртбұрыштың ауданы сыбайлас екі қабырғасының көбейтіндісіне тең.

$$S = ab$$

Дәлелдеуі. а) Берілген ABCD тіктөртбұрышын қабырғасы (a+$в$) болатын AMKE квадратына дейін толықтырайық. Сонда $S_{AMKE} = (a+b)^2$



10.6-сурет

ә) $S_{AMKE} = S_{ABCD} + S_{BMNC} + S_{CNKP} + S_{DCPE}$.

в) $ABCD = CNKP \Rightarrow S_{ABCD} = S_{CNKP} = S$.

г) BMNC – қабырғасы a квадрат $\Rightarrow S_{BMNC} = a^2$.

д) DCPE – қабырғасы b квадрат $\Rightarrow S_{DCPE} = b^2$.

е) $S_{AMKE} = (a+b)^2 = S + a^2 + S + b^2$.

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2S + a^2 + b^2.$$

$$2S = 2ab.$$

Бұдан $S = ab$, дәлелдеу керегі осы.

Оқушылар тіктөртбұрыштың периметрін және ауданын табумен бұрыннан таныс болғандықтан, бірденен деңгейлік тапсырмалар беруден бастауға болады. Ол тапсырмалардың бір нұсқадағы үлгісін көрсетейік.

I деңгей

1. Қабырғаларының қатынасы 2:3, ал периметрі 80 см тіктөртбұрыштың ауданын табу керек.

2. Тіктөртбұрыштың бір қабырғасы екіншісінен екі есе артық, ал ауданы 98 см^2 болса, тіктөртбұрыштың периметрін табу керек.

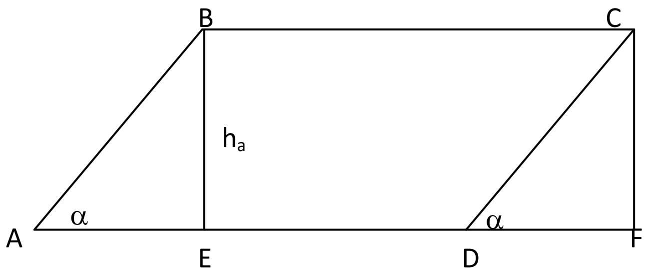
II деңгей

1. ABCD тіктөртбұрышының AD қабырғасы 10 см. Тіктөртбұрыштың диагоналдарының қиылысу нүктесінен осы қабырғаға дейінгі қашықтық 3 см. Тіктөртбұрыштың ауданын табу керек.

2. Қабырғалары 8 м және 18 м тіктөртбұрыштың ауданына тең, квадраттың қабырғасын тап.

3. Параллелограмның ауданы. Параллелограмның ауданы оның табаны мен биіктігінің көбейтіндісіне тең (10.7-сурет)

$$S = ah_a \qquad (1)$$



10.7-сурет

Дәлелдеуі. 1) $ABCD$ параллелограмы берілсін және $AD = a, BE = h_a$ $BE \perp AD$ болсын (6-сурет).

2) С нүктесінен $AD \perp CF$ перпендикулярын түсірелік.

3) тікбұрышты үшбұрыштар $\triangle$ABE = $\triangle DCF$ ($\angle AEB = \angle DFC = 90^o$, AB=DC – гипотенуза, параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары, $\angle BAE = \angle CDF$ - AB және CD паралель түзулері мен AF қиюшысының сәйкес бұрштары) $\Rightarrow$ $S_{ABE} = S_{DCF}$, AE=DF.

4) пар-м.ABCD = тр-я.EBCD + $\triangle$ABE;

тіктөрт. EBCF= тр-я.EBCD + $\triangle$DCF

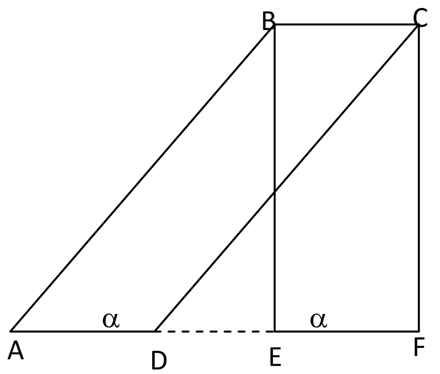
Сондықтан $ABCD$ параллелограмы мен $EBCF$ тіктөртбұрышы теңқұрамды болады.

5) $S_{ABCD} = S_{ABE} + S_{EBCD} = S_{DCF} + S_{EBCD} = S_{EBCF}$.

6) S_{EBCF} = EF$\cdot$BE, EF =ED+DF, бірақ DF=AE болғандықтан, EF =AE + ED = AD.

7) Олай болса, $S_{ABCD} = S_{EBCF} = AD \cdot BE = a \cdot h_a$.

Салдар. Қабырғалары a және b-ға тең, ал сүйір бұрышы α-ға тең параллелограмның ауданы $S = a \cdot b \sin\alpha$ (2) формуласымен есептеледі (10.8-сурет).



10.8-сурет

Дәлелдеуі. Шынында да, (1) формула бойынша $S = ah$, ал ABE тік бұрышты үшбұрышынан $h = BE = AB\sin\alpha = b\cdot\sin\alpha$. Онда $S = a\cdot b\cdot\sin\alpha$ теңдігі орындалады.

Параллелограмның ауданын табумен оқушылар бірінші рет кездесіп отыр. Сондықтан, өтілген материалды тиянақтау үшін, есептер шығару қарапайымнан күрделіге біртіндеп өту қағидасын ұстану керек. Алғашқы кезде қабырғасы және оған түсірілген биіктігі бойынша аудан табу, ауданы белгілі болған жағдайда оның қабырғасы немесе биіктігін табу т. б. берік дағды қалыптасуын ойластырған жөн. Осындай мақсатты жүзеге асыруға мүмкіндік беретін кейбір есептерді келтірейік.

1. S - параллелограмның ауданы, a - табаны, h - табанына түсірілген биіктігі деп алып, кестені толтырыңдар:

a	3		3	$\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$
h	2	2			$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
S		4	6	3	2	

2. Көршілес қабырғалары 2 см және 5 см болатын параллелограмның ауданы 5 см^2. Параллелограмның сүйір бұрышы мен биіктігін анықтаңдар.

3. Параллелограмның ұзындығы 13 см-ге тең диагоналы оның 12 см-ге тең қабырғасына перпендикуляр. Параллелограмның ауданын табыңдар.

4. Қабырғасы $\sqrt{3}$ см ромбының сүйір бұрышы 60^0. Ромбының ауданын табыңдар.

5. Ромбының ауданын оның d_1 және d_2 диагональдары арқылы өрнектеңдер.

6. Диагональдары: 1) 3,2 см және 14 см; 2) 4,6 м және 2 м-ге тең ромбының ауданын табыңдар.

7. Ромб диагональдарының бірі екіншісінен 1,5 есе үлкен, ал оның ауданы 27 см^2. Ромбының диагональдарын табыңдар.

Есептер шығару үлгісін келтірейік.

1-есеп. Параллелограммның қабырғалары $\sqrt{3}$ және 1, ал ауданы $\frac{3}{2}$. Қабырғалары арасындағы доғал бұрышы неге тең?

Берілгені. АВСД-параллелограмм,

$$a = \sqrt{3}, b = 1, S = \frac{3}{2}.$$

Табу керек: $\angle D - ?$

Шешуі. Есептің шарты бойынша:

$$S = ab\sin A, \sin A = \frac{S}{ab} = \frac{3}{2\sqrt{3}\cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

бұдан, $\angle A = 60^0, \angle D = 180^0 - \angle A = 180^0 - 60^0 = 120^0$. Демек, параллелограмның қабырғалар арасындағы доғал бұрышы 120^0-қа тең. Жауабы: 120^0.

2-есеп. Параллелограмның диагоналы оның қабырғасына тең. Егер оның үлкен қабырғасы 8 см-ге тең, ал бұрыштарының бірі 45^o-қа тең болса параллелограмның ауданын табу керек.

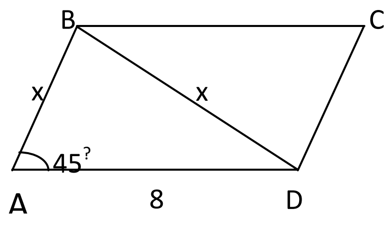
Берілгені. ABCD- параллелограмм. AB=BD, BC=AD=8 см, $\angle$BAD=45^o

Табу керек: S =?

Шешуі. AB=BD=x деп белгілейік. ABD үшбұрышына косинустар теоремасын қолданып мынаны табамыз:

$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle A$;

$x^2=x^2+64-2x\cdot 8\cdot \cos 45^o$,



10.9-сурет

$16x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 64$, $8\sqrt{2} \cdot x = 64$,бұдан

$x= \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$, олай болса, AB= CD=$4\sqrt{2}$.

Демек, параллелограмның ауданы мынаған тең:

$S=absin\alpha = 8 \cdot 4\sqrt{2}sin45° = 32\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 32$ см^2. Жауабы: 32см^2.

4-есеп. АВСД-тік төртбұрыш берілген. М, К, Р және Т нүктелері қабырғаларының ортасы. $AB = 6см, АД = 20см$ болса, онда МКРТ төртбұрышының ауданын табыңыз.

Берілгені. АВСД-тіктөртбұрыш. М,К,Р,Т сәйкес АВ, ВС, СД, АД қабырғаларының ортасы.

$СД = AB = 6см, АД = BC = 20см$.

Табу керек: $S_{МКРТ}$.

Шешуі. МКРТ төртбұрышының ауданын табу үшін, оның қандай төртбұрыш екенін анықтайық.

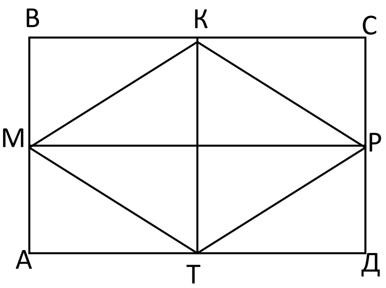
1) Есептің шарты бойынша АВСД – тіктөртбұрыш $\Rightarrow$ МР$\perp$ТК.

2) Екі катеті бойынша $\triangle MBK = \triangle KCP = \triangle РДТ = \triangle MAT \Rightarrow$ МК = КР = РТ = МТ.

3) МКРТ – ромб.

4) Ромбының ауданын $S_p = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2}MP \cdot KT$ формуласын пайдаланып табамыз.

Сонда $KT = AB = 6, MP = AD = 20$ болатындықтан,



10.10-сурет

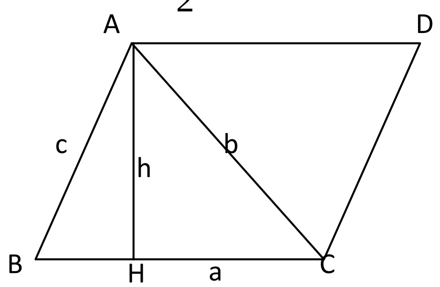
$S_p = \frac{1}{2}MP \cdot KT = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 20 = 60см^2$ болады. Демек, ромбының ауданы 60 см^2 – қа тең.

Үшбұрыштың ауданы. Үшбұрыштың ауданы оның табаны мен биіктігінің жарым көбейтіндісіне тең: $S = \frac{1}{2}a \cdot h$ (3)

Дәлелдеуі. АВС үшбұрышында $BC = a, AH = h, AH \perp BC$ болсын. Онда -суретте көрсетілгендей, АВС үшбұрышын $ABCD$ параллелограмына толықтырайық. $AD = BC, AB = CD$ және АС қабырғасы ортақ болғандықтан, үшбұрыштар теңдігінің үшінші белгісі бойынша $\triangle ABC = \triangle ACD$. Сонда $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 2 \cdot S_{ABC}$. Екінші жағынан, $S_{ABCD} = BC \cdot AH = a \cdot h$ болғандықтан, $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h$.

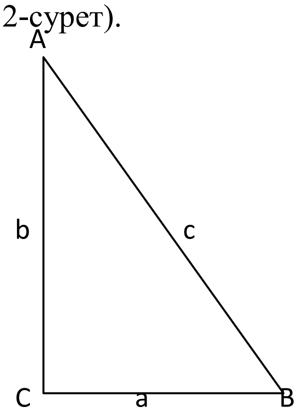
Салдар 2. Тікбұрышты үшбұырыштың ауданы оның катеттерінің жарым көбейтіндісіне тең:

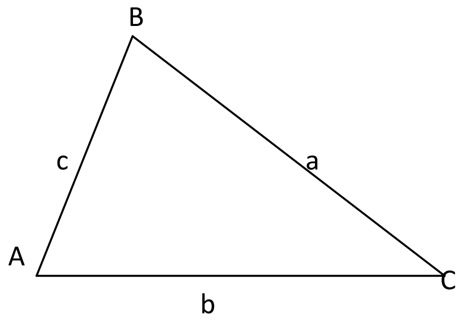
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot b \qquad (4)$$



10.11-сурет

Дәлелдеуі. (3) формуладан шығады. Өйткені, егер тік бұрышты үшбұрыштың бір катетін оның табаны ретінде алсақ, онда екінші катеті осы табанға түсірілген биіктік болады (10.12-сурет).





10.13-сурет

10.12- сурет

Салдар 3. a және b-ға тең қабырғаларының арасындағы бұрышы γ-ға тең үшбұрыштың ауданы $S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma$ (5) формуласымен есептеледі.

Дәлелдеуі. (3) формуланың дәлелдеуінен және 1-салдардан шығады (10.13-сурет).

Салдар 4. (Герон формуласы). Қабырғалары a,b және c-ға тең үшбұрыштың ауданы

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (6)$$

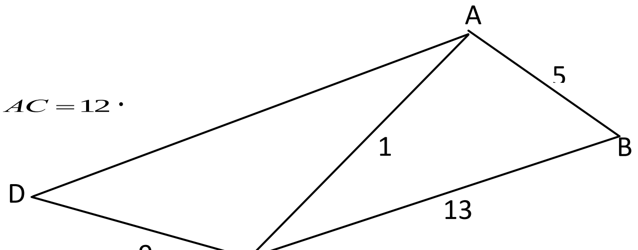
формуласымен анықталады. Мұндағы $p=\frac{a+b+c}{2}$ үшбұрыштың жарты периметрі.

1-есеп. Егер $AB=5,\ BC=13,\ CD=9,\ AD=15,\ AC=12$ болса, онда ABCD – төртбұрышының ауданын табыңыз.

Берілгені. ABCD-төртбұрыш:

$AB=5,\ BC=13,\ CD=9,\ AD=15,\ AC=12$.

Табу керек: S_{ABCD}.



10.14-сурет

Шешуі. $S_{ABCD}=S_{\Delta ACD}+S_{\Delta ABC}$;

Герон формуласын қолданып табатынымыз:

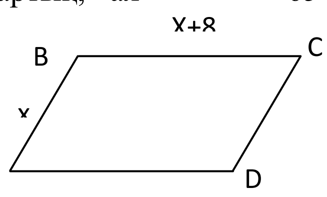
$$S_{\Delta ABCD}=\sqrt{18\cdot(18-15)\cdot(18-9)\cdot(18-12)}=\sqrt{18\cdot 3\cdot 9\cdot 6}=54$$

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{15\cdot(15-12)\cdot(15-13)\cdot(15-5)}=\sqrt{15\cdot 3\cdot 2\cdot 10}=30;$$

Демек, $S_{ABCD}=54+30=84$.

Жауабы: 84.

2-есеп. Тіктөртбұрыштың ені ұзындығынан 8 см артық, ал ауданы 65 см^2. Қабырғаларын табыңыз.



10.15-сурет

Берілгені. ABCD - тік төртбұрыш.

AD=AB+8 см, S=65 см^2.

Табу керек: AB,AD.

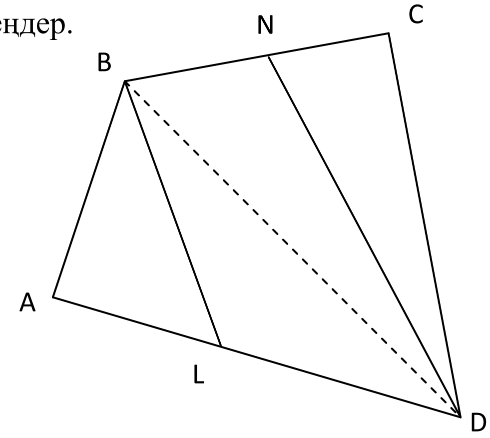
Шешуі. Тіктөртбұрыштың ені *x* см болса, онда ұзындығы (*x*+8)см болады.

Есептің шарты бойынша: S=*x*(*x*+8)=65, $x^2+x-65=0$, бұдан

x+8=5+8=13см.

Жауабы: 5см, 13см.

3-**есеп.** ABCD төртбұрышындағы N және L нүктелері BC және AD қабырғаларанның орталары. $S_{BNDL} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ болатынын дәлелдеңдер.



10.16-сурет

Шешуі. BD диагоналін жүргіземіз.

1. $\triangle ABD$ қарастырамыз: BL медиана.

Демек,

$$S_{ABL} = S_{BND} = \frac{1}{2} S_{ABD}$$

2. $\triangle BDC$ қарастырамыз:

DN - медиана, сонда

$$S_{NCD} = S_{BND} = \frac{1}{2} S_{ABD}.$$

3. $S_{BLD} + S_{BND} = \frac{1}{2} S_{ABD} + \frac{1}{2} S_{BDC} = \frac{1}{2}(S_{ABD} + S_{BDC}) = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$

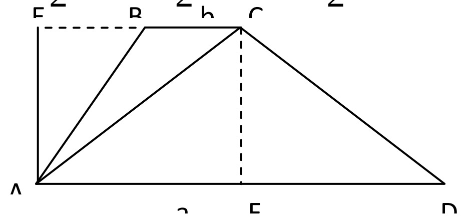
4. Демек, $S_{BNDL} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Трапецияның ауданы. Трапецияның ауданы табандарының жарым қосындысы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ (7)

Дәлелдеуі. $ABCD$ трапециясының табандары $AD = a, BC = b$ және биіктіктері $AE = CF = h$ болсын (11-сурет). AC диагоналы трапецияны екі үшбұрышқа бөледі: $\triangle ABC$ және $\triangle ACD$. Онда $S_{тр} = S_{ABC} + S_{ACD}$ (3) формула бойынша

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} h \cdot b \text{ және } S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CF = \frac{1}{2} a \cdot h.$$

Сонда $S_{тр} = \frac{1}{2} a \cdot h + \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{a+b}{2} h$. Формула дәлелденді.



10.19-сурет

1-есеп. Тең бүйірлі трапецияның диагональдары өзара перпендикуляр. Трапецияның диагоналінің ұзындығы 10см-ге тең болса, оның ауданы неге тең.

Берілгені ABCD- трапеция , BC//AD, AB=CD, AC$\perp$BD, O-AC және DB диагональдарының қиылысу нүктесі, AC=10 см.

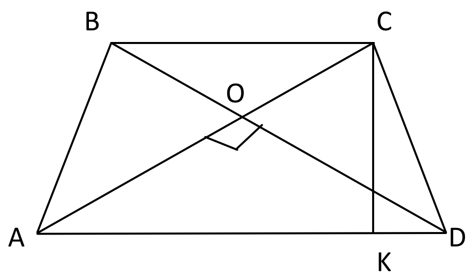
Табу керек $S_{тр}$-?

Шешуі Трапеция тең бүйірлі болғандықтан,

AK=$\frac{AD+BC}{2}$. AO=DO,<AOD=90^o.

AKC-да AK=CK. ΔAKC-нан:

AK^2+KC^2=AC. 2AK^2=AC^2, AK^2 =$\frac{100}{2} = 50.$



10.20-сурет

Демек трапецияның ауданы мынаған тең:$S_{тр}==\frac{AD+BC}{2}\cdot CK=AK\cdot CK^2$=50 см ^{2}

Жауабы 50 см ^{2}

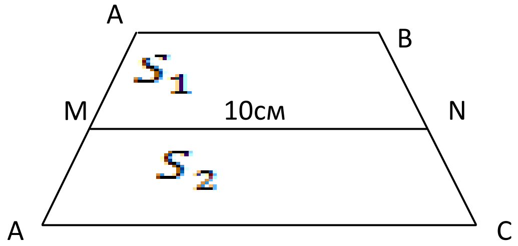
2-есеп. Трапецияның орта сызығы 10 ге тең және ол трапецияның ауданын 3:5 қатынасындай бөліктерге бөледі. Трапецияның

Табан қабырғаларының ұзындығын табыңыз.

Берілгені ABCD - трапеция ,BC//AD.

MN=$\frac{a+b}{2}$=10, $\frac{S1}{S2}=\frac{3}{5}$.

Табу керек a-?, b-?



10.21-сурет

Шешуі BC=b, AD=a деп белгілейік.

Сонда $S_1=S_{MBCN}=\left(\frac{b+10}{2}\right)\cdot\frac{h}{2}$

$S_2=S_{AMNB}=\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{h}{2}$.

Есептің шарты бойынша:

$$\begin{cases}\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{5},\\ \frac{a+b}{2}=10.\end{cases} => \begin{cases}\frac{\frac{b+10}{2}\cdot 3}{\frac{a+10}{2}\cdot 3}=\frac{3}{5},\\ a+b=20.\end{cases} => \begin{cases}50+5a=30+3b,\\ a+b=20.\end{cases} => \begin{cases}3b-5a=20,\\ a+b=20.\end{cases}$$

$$=> \begin{cases}a=15,\\ b=5.\end{cases}$$

Демек, трапецияның табан қабырғалары 5см және 15см-ге тең. Жауабы 5см,15см.

4-есеп. Трапеция диагональдарымен 4 үшбұрышқа бөлінеді. Трапецияның табандарына іргелес үшбұрыштардың аудандары 4 см^2 және 9 см^2. Трапецияның ауданын табыңыз.

Берілгені: АВСД-трапеция, $BC\parallel AД$. $S_{\Delta BOO}=4$ см^2, $S_{\Delta AOД}=9$ см^2.

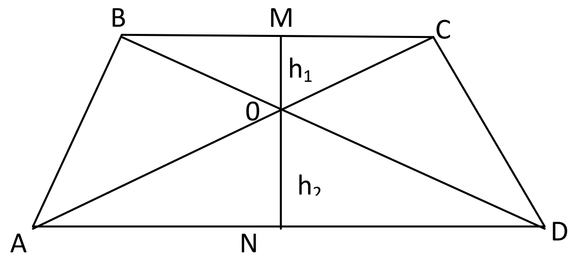
Табу керек $S_{тр}-?$

Шешуі

$$\Delta BOC\infty\Delta AOД.\ \frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta AOD}}=\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2;$$

$$\frac{h_1^2}{h_2^2}=\frac{4}{9};\quad \frac{h_1}{h_2}=\frac{2}{3},\quad h_1=\frac{2}{3}h_2;$$

Айталық $BC=b, AD=a$ болсын.



10.22-сурет

Сонда
$$\begin{cases}S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}b\cdot h_1=4,\\ S_{\Delta AOD}=\frac{1}{2}b\cdot h_2=9.\end{cases}$$

$$S_{ACD}=\frac{1}{2}a\cdot(h_1+h_2)=\frac{a\cdot\left(\frac{2}{3}h_2+h_2\right)}{2}=\frac{a\cdot 5h_2}{6}=\frac{5a\cdot h_2}{6}=\frac{5}{3}\cdot\frac{a\cdot h_2}{2}=\frac{5}{3}\cdot 9=15;$$

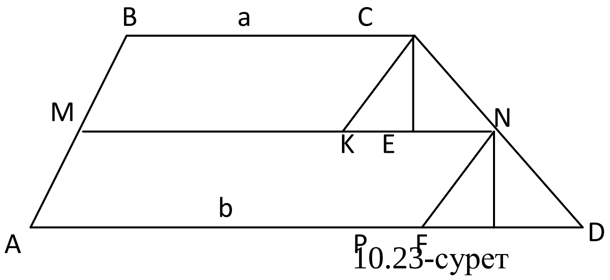
$$S_{\Delta COO}=S_{\Delta AOO}=S_{\Delta ACD}-S_{\Delta AOO}=15-9=6.$$

Демек, трапецияның ауданы мынаған тең: $S_{тр}=9+4+6+6=25$ см^2. Жауабы: 25 см^2.

5-**есеп.** Трапецияның табандарының ұзындықтары a және b-ға тең. Трапецияның табандары параллель болатын және оны екі тең шамалы фигураға бөлетін кесіндінің ұзындығын табыңыз.

Берілгені АВСД-трапеция, $BC \| AД, BC = a, AД = b. \quad S_{MBCN} = S_{AMND}$.

Табу керек $MN = ?$



10.23-сурет

Шешуі. Есептің шарты бойынша: $S_{MBCN} = S_{AMND}$. Көмекші элемент енгізейік: $MN = x$.

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{NF}{CE}; \qquad (1)$$

$CK \| MB, NP \| MA$ жүргізейік, сонда: $\Delta CKN \infty \Delta NPD$. Бұл үшбұрыштардың ұқсастығын табатынымыз:

$$\frac{KN}{PD} = \frac{CE}{NF}; \frac{x-a}{b-x} = \frac{CE}{NF}; \frac{NF}{CE} = \frac{b-x}{x-a} \qquad (2)$$

(1) мен (2)-ні теңестіріп табатынымыз:

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{b-x}{x-a}; x^2 - a^2 = b^2 - x^2; 2x^2 = a^2 + b^2; x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Демек, ізделінді кесіндінің ұзындығы $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ - ге тең.

Жауабы: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$