5-лекция

Теңдеулер мен теңсіздіктерді шешуге үйрету.

1.Мектеп математика курсында теңдеулер мен теңсіздіктер тақырыбын оқыту реті. Теңдеу және теңсіздік ұғымдары. Мүмкін мәндер облысы.

2. Мәндес теңдеулер мен теңсіздіктер.Теңдеулер мен теңсіздіктерді шешудің жалпы әдістері.

3.Логарифмдік теңдеулер мен теңсіздіктер

4. Модуль таңбасы астында болатын теңдеулер оларды шешеу мысалдары

5. Модуль таңбасымен берілген теңсіздіктерді шешу.

Әдебиеттер:

1. Рахымбек Д. **А**рифметика, алгебра, анализ бастамаларын оқыту әдістемесі. /Оқулық/ - Шымкент: М. Әуезов атындағы ОҚМУ баспа орталығы 2016. – 432 б

2. Елубаев С. Математиканы оқыту әдістемесі. – Алматы; Эверо, 2016

3. Мектеп оқулықтары

4. Мұғалімге арналған оқу-әдістемелік құралдар

1.Мектеп математика курсында теңдеулер мен теңсіздіктер тақырыбын оқыту реті. Теңдеу және теңсіздік ұғымдары. Мүмкін мәндер облысы. Мектепте теңдеу мен теңсіздікті және олардың жүйелерін ерте бастан жүйелі түрде оқыту дәстүрі қалыптасты. Бұл дәстүр қазіргі бағдарламаларда да көрініс тапқан:

Бастауышта алғашқы дайындық

теңдеу ұғымы, сызықтық теңдеу, екі белгісізі бар сызықтық теңдеулер жүйесі 6-сыныпта,

квадрат теңдеулер мен рационал теңдеулер 7,8-сыныпта,

мәндес теңдеулер 9-сыныпта

тригонометриялық теңдеулер 10-сыныпта,

дифференциалдық теңдеулер туралы ұғым, көрсеткіштік және логарифмдік теңдеулер 11-сыныпта оқытылады.

Орта мектепте теңдеулер мен теңсіздіктерді оқып-үйренудің әртүрлі нұсқаулары бар, кейде теңдеулер мен теңсіздіктерді параллель оқыту туралы ұсыныс та жасалынып жатады.

Әдістемелік әдебиеттерде теңдеудің әр түрлі анықтамалары кездеседі.

Теңдеу ұғымының бұл анықтамаларын бір-біріне қарсы қоюға болмайды. Ол анықтамалардың әрқайсысы теңдеулерді шешудің теориялық және практикалық мәселелерінде қолданылады.

Мектеп оқулықтарында қазіргі кезде теңдеудің анықтау негізінде алынғанда былай тұжырымдалады: «Белгісізі бар теңдікті теңдеу деп атайды. Белгісіздің теңдікті дұрыс сандық теңдікке айналдыратын мәндері теңдеудің түбірі дейді. Теңдеуді шешу дегеніміз оның барлық түбірлерін табу».

Теңдеу ұғымына ең жақын ұғым теңбе-теңдік. Теңбе-теңдік айнымалының кез келген мәнінде дұрыс болатын теңдік деп қарастырылады. Кейінірек рационал бөлшектерді қарастырғанда теңбе-теңдік ұғымы дәлірек анықталады: айнымалының барлық мүмкін мәндерінде орындалатын теңдікті теңбе-теңдік деп атайды.

Мектептегі теңдеулерді шешудің жалпы мәселелері. Орта мектепте теңдеулер тақырыбына байланысты мынадай негізгі мәселелер қарастырылады.

Бір немесе бірнеше белгісізі бар теңдікті **теңдеу** деп атайды. Бір белгісізі және *n* белгісізі бар теңдеу жалпы түрде былайша жазылады:

$$f(x)=0; \quad f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)=0.$$

$f(x)$ немесе $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцияларының анықталу облысын **теңдеудің мүмкін мәндер облысы** дейді.

Мысалы: $\sqrt{x-2}=\sqrt{3-x}$ теңдеуінің мүмкін мәндерінің облысы $x\in[2;3]$ болады.

Орнына апарып қойғанда берілген теңдікті дұрыс санды теңдікке айналдыратын белгісіздің мәндерін **теңдеудің түбірлері** деп атайды.

Мысалы: $x^2–4=0$ теңдеуін шешу деп, оның түбірлері x_1 = -2, x_2 = 2-ні табуды айтады. $x^2+4=0$ теңдеуін шешу деп, оның түбірлерінің жоқ екендігін көрсету.

Кез келген күрделі теңдеу түрлендірулер нәтижесінде не сызықтық, не квадрат теңдеуге, не қарапайым иррационал, тригонометриялық, көрсеткіштік, логарифмдік теңдеулердің біріне келтіріледі.

Рационал, иррационал, көрсеткіштік т.б. теңдеулердің белгілі бір түріне лайықты өзіндік шешу әдістері болғанымен, барлық теңдеулерді шешуге ортақ идея, жалпы әдістер бар. Ондай жалпы әдістер үшеу:

1) Теңдулерді шешудің көбейткіштерге жіктеу әдісі;
2) Теңдулерді шешудің жаңа белгісіз енгізу әдісі;
3) Теңдулерді шешудің функционалды-грфиктік әдісі.

Теңдеулерді шешудің көбейткіштерге жіктеу әдісі. Көбейткіштерге жіктеу әдісінің мәні мынада: *f(x) = 0* теңдеуін шешу керек, мұндағы *f(x)* = $f_1(x)f_2(x)f_3(x)$ болсын. Сонда *f(x)=0* теңдеуін, оған қарағанда қарапайым $f_1(x)=0;\ f_2(x)=0;\ f_3(x)=0$ теңдеулер жиынтығымен (бірлігімен) алмастыруға болады. Осы теңдеулер жиынтығының түбірлерін тауып, олардың ішінен *f(x)= 0* теңдеуінің анықталу облысына тиістілерін таңдап алсақ, онда *f(x) = 0* теңдеуінің түбірлерін табамыз.

Демек *f(x) = 0* теңдеуін шешу үшін теңдіктің сол жағын көбейткіштерге жіктеп алуымыз керек. *f(x)* өрнегін көбейткіштерге жіктеудің мектеп математика курсында мынадай тәсілдері оқып-үйреніледі:

1) топтау және ортақ көбейткішті жақша сыртына шығару;
2) қысқаша көбейту формулаларын пайдалану (мәселен $а^2 – в^2 = (а – в)\ (а + в)$);
3) квадрат үшмүшелікті көбейткіштерге жіктеу: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, мұндағы x_1, x_2 квадрат үшмүшеліктің түбірлері.

1-мысал. $x^3-3x-2=0$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і**.** $-3x=-x-2x$ деп алайық, сонда:

$x^3-x-2x-2=0;$

$x(x^2-1)-2(x+1)=0;$

$(x+1)(x^2-x-2)=0.$

1. x+1=0, x_1= -1.
2. $x^2 – x$ -1 = 0 бұдан x_2= -1, x = 2.

Жауабы: -1; 2.

2-мысал. Теңдеуді шешу керек: $x^3(x^2-7)^2-36x=0.$

Шешуі**:**Теңдеудің сол жағын алдымен қысқаша көбейту формуласын пайдаланып,кейін топтау және ортақ көбейткішті жақша сыртына шығару тәсілімен көбейткіштерге жіктейміз.

$$x^3\left(x^2-7\right)^2-36x=x\left(x^2\left(x^2-7\right)^2-36\right)=x\left(x\left(x^2-7\right)-6\right)\left(x\left(x^2-7\right)+6\right)=$$
$$=x\left(x^3-7x-6\right)\left(x^3-7x+6\right)=x\left(x^3+1-7x-7\right)\left(x^3-1-7x+7\right)=$$
$$=x\left(\left(x^3+1\right)-7(x+1)\right)\left(\left(x^3-1\right)-7(x-1)\right)=x(x+1)(x-1)\left(x^2-x-6\right)\left(x^2+x-6\right)=$$
$$=x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x+3)(x-2).$$

$x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x+3)(x-2)=0$

Бұдан $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 3, x_5 = -2, x_6 = -3, x_7 = 2.$ Жауабы: $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3.$

Бүтін коэффициенті рационал көпмүшелікті көбейткіштерге жіктеуде бос мүшенің бөлгіштерін ескеретін арнайы тәсіл бар.

Теорема. *Егер бүтін коэффициенті p(x) көпмүшелігінің бүтін түбірі* x_1 *болса, онда* x_1 *саны көпмүшеліктің бос мүшесінің бөлінгіші болады.*

Осы теореманың негізінде көпмүшеліктерді көбейткіштерге жіктеу әдісін пайдаланып бүтін коффициентті *p(x)=0* теңдеуі мынадай ретпен шығарылады:

1. *p(x) к*өпмүшелігінің бос мүшесінің барлық бөлгіштері жазылады.

2. Бөлгіштердің арасынан *p(x)* көпмүшелігінің түбірі болатыны x_1саны таңдап алынады.

3. *p(x) к*өпмүшелігі көбейткіштерге *(x -* x_1*)* екімүшелігі болатындай етіп жіктеледі.

4. *p(x)=0* теңдеуін *(x-* x_1*)g(x) = 0* теңдеуіне түрлендіріп алғаннан кейін *g(x) = 0* теңдеуін шешуге көшеді.

4-мысал. $6x^3 + 13x^2 - 9x - 12 = 0$теңдеуін шешу керек.

*Шешуі.*1. Бос мүшенің бөлгіштерін жазып шығамыз, яғни

$-12 : \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12.$

2. x_k мәндерін ретімен қойып *p(*x_k*)* есептейміз;

$p(1) = 6 + 13 - 19 - 12 \neq 0:$

$p(-1) = -6 + 13 + 19 - 12 \neq 0:$

$p(2) = 48 + 52 - 38 - 12 \neq 0:$

$p(-2) = -48 + 52 + 38 - 12 \neq 0:$

$p(3) = 162 + 117 - 57 - 12 \neq 0:$

$p(-3) = -162 + 117 + 57 - 12 = 0.$

Демек, x_1 = - 3.

3. Берілген теңдеудің оң жағындағы көпмүшеліктің көбейткіштерге жіктелуінде (x+3) екімүшелігі болатындай етіп таңдап аламыз.

$$p(x) = 6x^3 + 13x^2 - 19x - 12 = (6x^3 + 18x^2) + (-5x^2 - 15x) + (-4x - 12) =$$

$$= 6x^2(x+3) - 5x(x+3) - 4(x+3) = (x+3)(6x^2 - 5x - 4).$$

4. Берілген теңдеу мына түрге келеді $(x+3)(6x^2 - 5x - 4) = 0$ бұдан, $(x+3) = 0;$ $6x^2 - 5x - 4 = 0.$ Бірінші теңдеуден x_1 = 3, екіншіден $x_2 = -\frac{1}{2}; x_3 = \frac{4}{3}.$

Жауабы: $-3; -\frac{1}{2}; \frac{4}{3}.$

3-жағдайда $6x^3 + 13x^2 - 9x - 12$ көпмүшелігін (x+3) екімүшелігіне бұрыштап бөлу арқылы да көбейткіштерге жіктеуге болады.

Теңдеулерді шешудің жаңа айнымалы енгізу әдісі. *f(x) = 0* теңдеуін *p(g(x)) = 0* түріндегі теңдеуге түрлендіру мүмкін болса, онда *u = g(x)* айнымалысын енгізіп, *p(u) = 0* теңдеуін шешеді. Егер *p(u) = 0* теңдеуінің түбірлері $u_1, u_2, ..., u_n$ болса, онда $g(x) = u_1, g(x) = u_2, ..., g(x) = u_n$ теңдеулер жиынтығының шешімдері берілген теңдеудің түбірлері болады.

Жаңа айнымалыны енгізу теңдеуді шешуді әлдеқайда оңайлатады. Сондықтан теңдеуді шешу үшін жаңа айнымалыны дұрыс таңдай алу, мектеп оқушыларының математикалық мәдениетінің маңызды құрамды бөлігі болып саналады.

Оқушыларды теңдеуді шешу үшін оны бірден түрлендіруге асықпастан, қандай жаңа айнымалы енгізсек есептің шығарылуы оңайлауы мүмкін деп ойлануға үйрету керек. Егер теңдеудің шартынан жаңа айнымалыны енгізу бірден белгілі бола қоймаса, онда қандай түрлендірулер жасасақ жаңа айнымалыны енгізу мүмкіндігі бар деп ойлану керек.

Сондықтан жаңа айнымалыны енгізу бірден теңдеуді шешуге кірісу кезінде, немесе біршама түрлендірулерден кейін көрінуі де мүмкін, кейде бір емес, екі жаңа айнымалы енгізуге тура келетін жағдайлар да кездеседі.

1-мысал.Теңдеуді шешу керек

$$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}.$$

Ш е ш у і. $x^2 - x = y$ де белгілесек берілген теңдеу мынадай түрге келеді:

$$\sqrt{y+2} + \sqrt{y+7} = \sqrt{2y+21}; \qquad y + 2 + 2\sqrt{(y+2)(y+7} + y + 7 = 2y + 21;$$

$$\sqrt{y^2 + 9y + 14} = 6; \qquad y^2 + 9y + 14 = 36; \qquad y^2 + 9y - 22 = 0; \qquad y_1 = 2, y_2 = -11.$$

Енді $x^2 - x = 2; x^2 - x = -11$теңдеулерін шешу қалды. Бірінші теңдеудің түбірлері $x_1 = 2, x_2 = -1$, ал екінші теңдеудің түбірлері жоқ. Жауабы: 2; - 1.

Бұл теңдеуді шешу үшін $x^2 - x + 2 = y$ деп белгілеуге де болады.

2-мысал. $\lg^2 x^3 + \log_{0,1} 10x - 7 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. Теңдеудегі қосылғыштарды жеке-жеке түрлендірейік:

$$\lg^2 x^3 = (\lg x^3)^2 = (3\lg x)^2 = 9\lg^2 x; \qquad \log_{0,1} 10x = -\lg 10x = -(\lg x + \lg 10) = -\lg x - 1.$$

Сонда берілген теңдеу мына түрде жазылады: $9\lg^2 x - \lg x - 8 = 0$.

$\lg x = y$деп белгілесек, $9y^2 - y - 8 = 0$ болады. Бұдан $y_1 = 1; y_2 = -\dfrac{8}{9}$.

Енді мынадай екі теңдеуді шешеміз: $\lg x = 1, \lg = -\dfrac{8}{9}$, бұдан $x_1 = 10; x_2 = 10^{-\frac{8}{9}}$.

Жауабы: $10; 10^{-\frac{8}{9}}$.

Теңдеулерді шешудің функционалды-грфиктік әдісі.

$f(x) = g(x)$ теңдеуін функционалды-графиктік әдісіпен шешу үшін:

1)y= $f(x)$ және $y = g(x)$ функцияларының графиктері салынады;

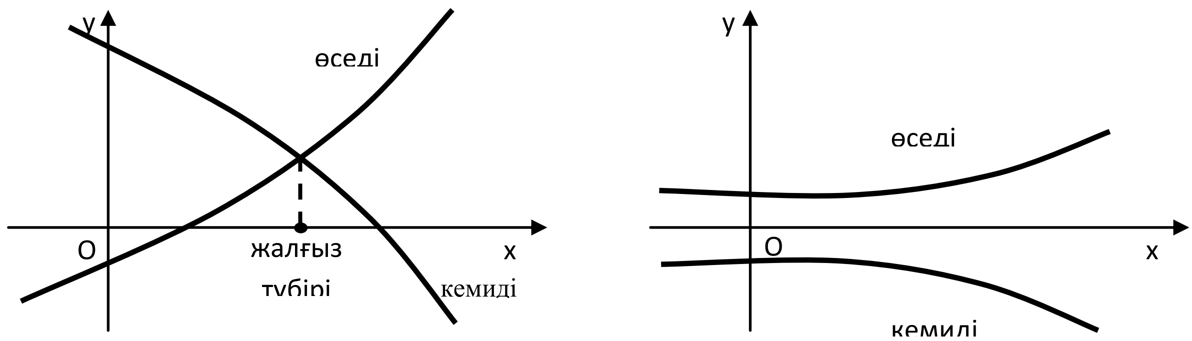
2)графиктер қиылысса, қиылысу нүктесін табады.

Графиктердің қиылысу нүктесінің абсциссасы теңдеудің түбірі болады.

y= $f(x)$ және $y = g(x)$ функцияларының графиктері қиылыспаса теңдеудің шешімі жоқ.

Бұл әдіс теңдеудің түбірлерінің санын және теңдеудің түбірлерін дәл немесе жуықтап анықтауға мүмкіндік береді.

Егер X аралығында $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функцияларының бірі өсетін, ал екіншісі кемитін болса, онда $f(x) = g(x)$ теңдеуінің осы аралықта жалғыз түбірі болады (1,*а*-сурет) немесе ешбір түбірі болмайды (1,ә-сурет).

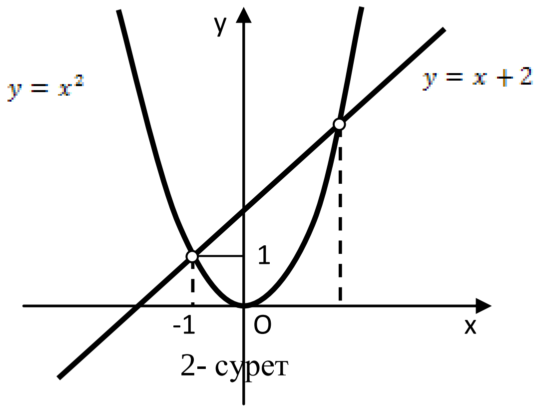


а) 1-сурет ә)

1-мысал. $x^2 - x - 2 = 0$теңдеуін шешу.

Ш е ш у і. Берілген теңдеуді $x^2 = x + 2$ түрінде жазып аламыз.

1. у = x^2 және $y = x + 2$ саламыз;
2. Бұл графиктердің қиылысу нүктелер (-1;1), (2;4) (2-сурет).



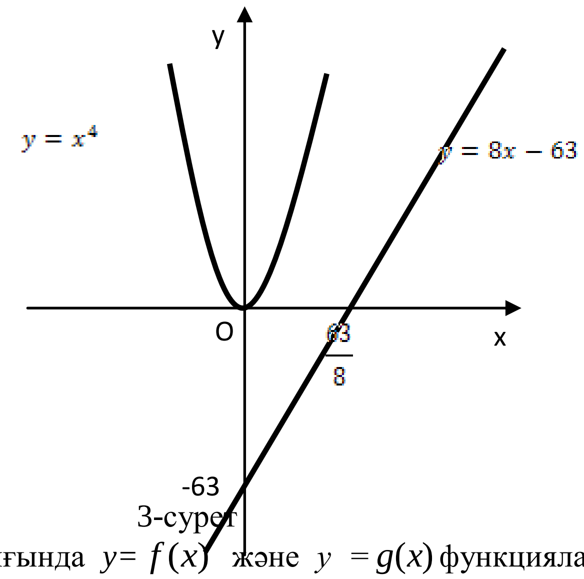
2- сурет

Жауабы: 1;2.

2-мысал. $x^4 - 8x + 63 = 0$теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. Теңдеуді шешу үшін теңдіктің сол жағын көбейткіштерге жіктеу керек. Бұл оңайға түспейді. Бірақ жіктеуге болады.

Егер теңдеуді $x^4 = 8x - 63$ түрінде жазып, $y = x^4$ және $y = 8x - 63$ функцияларының графигін ең болмағанда схемалық түрде салатын болсақ, олардың қиылыспайтындығына көзіміз жетеді (3 - сурет)



3-сурет

Егер Х аралығында $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функцияларының бірі өсетін, екіншісі кемитін болса және қандайда бір жолмен $f(x) = g(x)$ теңдеуінің бір түбірін анықтай алсақ, онда теңдеу толық шешілген, ол түбір теңдеудің жалғыз түбірі.

2.Мәндес теңдеулер.

Теңдеулерді шешу кезінде әр түрлі түрлендірулер жүргізіп, алдыңғымен салыстырғанда қарапайым түрге келтіреді. Түрлендірулер тізбегі нәтижесінде пайда болған, соңғы теңдеудің шешімдері берілген теңдеудің түбірлері бола ма, бөгде түбірлер қайдан пайда болды немесе теңдеудің түбірлерінің жоғалып кету жағдайлыры неліктен орын алды деген мәселелер **мәндес теңдеулер** ұғымымен байланысты. Қандай теңдеулер мәндес деп аталынады, қандай түрлендірулер мәндес түрлендіру болады, қандай жағдайда мәндес емес, оны қалай білуге болады, т. б. мәселелерді оқушылар саналы түрде меңгеруі керек.

Мектеп математика курсында мәндес түрлендіру ұғымы біртіндеп, оқушыларда ол ұғымға деген қажеттілік пайда болып, белгілі бір тәжірибе жинақталғанда енгізіледі. Математика тілінде қандай да бір жаңа терминнің пайда болуы, оған деген қажеттілік болғанда ғана енгізілетінін оқушы түсіну тиіс.

Сызықтық теңдеулер мен квадрат теңдеулерді оқып үйрену кезінде мәндес теңдеу және мәндес түрлендіру туралы мәселе көтерілмейді. Себебі бұл жерде мәндес емес түрлендіру мүлде болмайды, сондықтан мәндес теңдеу терминін енгізуге деген қажеттілік те жоқ.

Алгебралық бөлшектерді оқып үйренуге байланысты, бөлшек рационал теңдеулердің бөлімінен құтылу кезінде бөгде түбірлердің пайда болуы туралы алғашқы түсінік беріледі. Сол кезде бірінші рет мәндес теңдеу термині енгізіледі. Осы кезде мәндес теңдеу ұғымын енгізуге деген қажеттілік те пайда болады, тәжірибе де жинақталады.

Түбірлері бірдей болатын екі теңдеуді **өзара мәндес теңдеулер** деп атайды. Бір теңдеудің әрбір түбірі екінші теңдеуді де қанағаттандырса және керісінше, екінші теңдеудің кез келген түбірі бірінші теңдеуді қанағаттандырса, онда олар **мәндес** немесе **эквивалент** теңдеулер делінеді. Дербес жағдайда, түбірлері жоқ барлық теңдеулер өзара мәндес. Мысалы, мына теңдеулер мәндес:

1. $x–2=0$ және $2^x=4$,
2. $\sin x=2$ және $\sqrt{x}=-1$.

Қандай жағдайда бір теңдеуден екінші теңдеуге өткенде мәндес түрлендіру болады деген мәселеге тоқталайық.

Төмендегідей үш теорема орындалатындай түрлендіру жасағанда бір теңдеуден екінші теңдеуге өту әр уақытта мәндес түрлендіру болады.

1-теорема. Егер теңдеудің қандай да бір мүшесін кері таңбамен теңдіктің бір жағынан екінші жағына шығарса, онда пайда болған теңдеу берілген теңдеумен мәндес болады.

2-теорема. Егер теңдеудің екі жағын да бірдей тақ көрсеткішті дәрежеге шығарсақ, онда пайда болған теңдеу берілген теңдеумен мәндес болады.

3-теорема. $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ (мұндағы $a>0$, $a\neq 1$) теңдеуі $f(x) = g(x)$ теңдеуімен мәндес.

Бұл теоремаларды қолданғанда бөгде түбір пайда болмайды, түбірлердің жоғалып кетуі де мүмкін емес.

Ал мына төмендегі теоремалар белгілі бір шарттар орындалғанда ғана жұмыс істейді, яғни оларды қолдану кезінде ұқыптылықты қажет етеді.

4-теорема. Егер $f(x) = g(x)$ теңдеуінің екі жағын да бірдей, берілген теңдеудің анықталу облысының барлық жерінде мағынасы бар, осы облыстың ешбір жерінде нөлге айналмайтын $h(x)$ өрнегіне көбейтсе, онда берілген теңдеуге мәндес $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ теңдеуі пайда болады.

Бұл теоремамен жұмыс істегенде теңдіктің екі жағына да көбейтілетін $h(x)$ өрнегінің:

1) берілген теңдеудің анықталу облысында мағынасы болуы;

2) берілген теңдеудің анықталу облысында нөлге айналмайтын болуы ескерілуі керек.

4-теоремадан ешқандай шартты талап етпейтін төмендегі **салдар** шығады: егер теңдіктің екі жағын да нөлден өзгеше c санына көбейтсе немесе бөлсе берілген теңдеуге мәндес теңдеу шығады.

5-теорема. Егер $f(x)=g(x)$ теңдеуінің анықталу облысында теңдіктің екі жағы да теріс емес болса, онда теңдіктің екі жағын да бірдей жұп дәрежеге шығарғаннан кейін пайда болған $\left(f(x)\right)^n=\left(g(x)\right)^n$ теңдеуі берілген теңдеуге мәндес.

$f(x) = g(x)$ теңдеуінің екі жағын да жұп дәрежеге шығару үшін, теңдеудің анықталу облысында $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ шарттар орындалуы қажет.

6-теорема. $f(x)>0$ және $g(x)>0$ болса, онда $a>0, a\neq 1$ болғанда $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ теңдеуі $f(x) = g(x)$ теңдеуімен мәндес.

Бұл теорема бойынша $\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0, a \neq 1)$ теңдеуінен *f(x) = g(x)* теңдеуіне өту үшін $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыру керек.

Егер теңдеуді шешу үдерісінде 4,5,6-теоремаларының шартындағы шектеулердің бірінің орындалуын тексерместен, қорытындысын ғана пайдалансақ **салдар-теорема** аламыз. Оған негізгі себеп, берілген теңдеудің анықталу облысының кеңейіп кетуінде.

Егер теңдеуді шешудің белгілі бір кезеңінде теңдеудің екі жағын да қандайда бір өрнекке көбейтсек (әрине ол өрнек теңдеудің анықталу облысында мағынасы бар болуы керек), немесе теңдіктің екі жағын да жұп дәрежеге шығарсақ, немесе логарифмдік теңдеулерді шығару барысында теңдіктің екі жағындағы бірдей негіздегі логарифм таңбасын «тастап кетіп» жазатын болсақ, онда табылған барлық түбірлерді міндетті тексеру керек.

Басқаша: *теңдеуді түрлендіру үдерісінің белгілі бір кезеңінде теңдеудің анықталу облысының кеңеюі орын алса, онда міндетті түрде барлық табылған түбірлерді тексеруге тура келеді.*

Енді мектеп математика курсы деңгейінде қандай түрлендірулер жасаған кезде теңдеудің анықталу облысының кеңейіп кетуі мүмкін деген орынды сұрақ туады.

Теңдеудің анықталу облысының кеңейіп кету жағдайлары үшеу:

1. *«Бөлшектің бөлімінен құтқару кезінде».* Теңдеудің құрамындағы бөлшектің бөлімінде *g(x)* өрнегі болса, теңдеудің екі жағын да $g(x) \neq 0$ өрнегіне көбейтіп немесе бөлшекті қысқарту арқылы бөлшек бөлімсіз жазылады. Мұны еркін сөйлеу кезінде *«бөлшекті бөлімінен құтқару»* деп айта береді. Теңдеуде бөлім болмағаннан кейін шектеу де жоқ деген сөз. Демек теңдеудің анықталу облысы кеңейді.

2. *Логарифмді «тастап кету» кезінде.* Бірдей негіздегі логарифмдердің теңдігінен логарифм таңбасының астындағы өрнектердің теңдігіне көшу теңдеудің анықталу облысын кеңейтеді. Себебі логарифм таңбасы астындағы өрнектердің оң болатындығы ескерілмей отыр.

3. *n жұп болғандағы* $\left(n\sqrt{f(x)}\right)^n$ *= f(x) формуласын пайдалану кезінде.* Шындығында да, егер мысалы, $\left(\sqrt{f(x)}\right)^2$ өрнегінің анықталу облысы $f(x) \geq 0$ теңсіздігімен беріледі. Егер $\left(\sqrt{f(x)}\right)^2$ өрнегін *f(x)* өрнегімен алмастырылса, *f(x)* еркін қарастырылады да $f(x) \geq 0$ шектелуі алынып тасталады, яғни анықталу облыс кеңейеді.

Теңдеудің түбілерін тексеру екі жолмен жүргізіледі:

1) барлық түбірлерді берілген теңдеуге қойып тексергенде, теңдеуді қанағаттандыратындар (дұрыс санды теңдікке айналдыратындар) теңдеудің түбірлері, ал қанағаттандырмайтындары **бөгде түбірлер** болады.

2) табылған түбірлердің берілген теңдеудің анықталу облысына тиістілігі тексеріледі. Түбір анықталу облысында жататын болса, ол берілген теңдеудің түбірі, ал жатпаса бөгде түбір болғаны.

Теңдеудің түбірлерін анықталу облысы бойынша тексеру тәсілі бір теңдеуден екінші теңдеуге өту кезіндегі анықталу облысының кеңейіп кетуінен басқа мәндес емес түрлендірулер болмаған жағдайда ғана тиімді. Бұл логарифмдік теңдеулерді шешу кезінде орынды.

Ал, иррационал теңдеулерді шешу кезінде мәселе күрделілеу: теңдеудің табылған түбірлері анықталу облысына тиісті болғанымен де, олардың ішінде бөгде түбірлер болуы мүмкін. Мұндай жағдай теңдіктің екі жағын жұп дәрежеге шығаруға байланысты болады.

Енді теңдеудің түбірлері **жоғалып кететін** жағдайларға тоқталайық.

Мектеп математика курсы деңгейінде теңдеудің түбірінің жоғалып кетуі негізінен екі себепке байланысты:

1) теңдіктің екі жағын да бірдей *h(x)* өрнегіне бөлу кезінде (*h(x)* ≠ 0 екендігі анық белгілі болған жағдайдан басқа);

2) бір теңдеуден екінші теңдеуге өту кезінде теңдеудің **анықталу облысының таралып кетуі.**

Бірінші жағдайдағы кемшіліктерімен күресу қиын емес: өрнектің нөлге тең емес екендігі алдын ала белгілі болмаса, теңдеудің екі жағында бірдей ол өрнекке бөліп жіберуге тыйым салынады.

Оқушыны

$$f(x)h(x)=g(x)h(x) \text{ теңдеуін}$$

$$f(x)h(x)-g(x)h(x)=0,$$

$$h(x)\left(f(x)-g(x)\right)=0$$

$$1.h(x)=0.2.f(x)-g(x)=0$$

деп шешуге үйрету керек.

Екінші жағдай күрделі. Мұнда теңдеуді шешу үдерісінде формулаларды дұрыс қолданбауға байланысты түбірлердің жоғалып кетуі орын алады:

1. $\log_a\left(f(x)\right)^{2n}=2n\log_a\left|f(x)\right|$ деп жазудың орнына $\log_a\left(f(x)\right)^{2n}=2n\log_a f(x)$ деп қате жібереді.

2. $\log_a f(x)g(x)=\log_a\left|f(x)\right|+\log_a\left|g(x)\right|$ деп жазудың орнына $\log_a f(x)g(x)=\log_a f(x)+\log_a g(x)$ деп жазады.

3. $\sqrt[2n]{f(x)g(x)}=\sqrt[2n]{|\,f(x)|}\sqrt[2n]{g\,|(x)|}$ деп жазудың орнына $\sqrt[2n]{f(x)g(x)}=\sqrt[2n]{f(x)}\sqrt[2n]{g(x)}$ деп қателеседі.

Тригонометриялық теңдеулерді шешуде түбірлердің жоғалып кетуіне алып келетін тригонометриялық формулаларды келтіріп кетейік.

1. $ctgx=\dfrac{1}{tgx}$. Теңдіктің сол жағының анықталу облысы $x\neq\pi n$; оң жағының анықталу облысы екі шарттың орындалуына байланысты: *tgx*≠ 0, яғни $x\neq\pi n$; *cos* ≠ 0; яғни $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$. c*tgx*-ты $\dfrac{1}{tgx}$-пен алмастырғанда анықталу облыс тарылады: $x\neq\pi n$ шектелуінен басқа, қосымша $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ шектелуі пайда болды, осының салдарынан түбірлердің жоғалып кетуі мүмкін.

$ctgx=\dfrac{1}{tgx}$ формуласын пайдаланғанда $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ мәнін бастапқы теңдеуге қойып тексеру керек. Теңдеуді қанағаттандырса, ол теңдеудің түбірі болғаны.

2. $tg2x=\dfrac{2tgx}{1-tg^2x}$. Теңдіктің сол жағының анықталу облысы *cos2x*≠ 0, яғни $2x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ немесе $x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$; теңдіктің оң жағының анықталу облысы екі шарттың орындалуы арқылы табылады: $tg^2x\neq 1$, яғни $x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, және *cosx*≠ 0, яғни $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$. Теңдіктің сол жағын оң жағымен алмастырғанда $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ деген қосымша шектеу пайда болды. $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ тексеру керек.

3. $tg(x+\alpha)=\dfrac{tgx+tg\alpha}{1-tgxtg\alpha}$. Бұл жерде теңдіктің сол жағын оң жағымен алмастырғанда $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ шектеу пайда болады.

4. $tg\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$. $tg\dfrac{x}{2}$ үшін $\dfrac{x}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, яғни $x\neq\pi+2\pi n$; ал $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$. үшін: $x\neq\pi n$. Анықталу обылыс тарылды: $x\neq\pi+2\pi n$ шектелуіне қосымша $x\neq\pi n$ шектелуі пайда болды.

Ал осы формулаға ұқсас $tg\dfrac{x}{2}\neq\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ формуласын пайдаланғаннан анықталу облысында тарылу болмайды. Теңдіктің сол жағы мен оң жағының анықталу облыстары бірдей: $x\neq\pi+2\pi n$.

5. $\sin x=\dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}},\cos x=\dfrac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}$. Мұндай алмастырулар арқылы шешілетін теңдеудің $x=\pi+2\pi n$ түбірінің жоғалып кетуі мүмкін. Бұл мәнді бастапқы теңдеуге қойып тексеру керек.

Түбірдің жоғалып кетуі *x*-тің кез келген мәнінде анықталған *sinx* пен *cosx* өрнегін, анықталу облысының тарылуына алып келетін $tg\dfrac{x}{2}$ өрнегімен алмастырылуына байланысты болады.

Мысал. sinx – cosx =1 теңдеуін шешу керек.

Ш е ш у і. Теңдеуді шешу үшін $\sin x=\dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}},\cos x=\dfrac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}$ формуласын пайдаланып, $tg\dfrac{x}{2}=u$ алмастыруын жасаймыз. $tg\dfrac{x}{2}$-тің анықталу облысы $\dfrac{x}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, яғни $x\neq\pi+2\pi n$.

Берілген теңдеу мына түрге келеді $\dfrac{u}{1+u}-\dfrac{1-u}{1+u^2}=1$, бұдан u=1, яғни $tg\dfrac{x}{2}=1$, $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n.$

Бірақ, берілген теңдеуді $x=\pi+2\pi m$ мәндері де қанағаттандырады. Теңдеу түбірлерінің бұл мәндерінің жоғалып кетуі *x*-тің кез келген мәнінде анықталған *sinx* пен *cosx* өрнегін, олардың анықталу облысын тарылтатын $tg\dfrac{x}{2}$ өрнегімен алмастыруымызға байланысты келіп шықты.

Жауабы: $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=\pi+2\pi m$.

3.Сызықтық теңдеуді шешу тақырыбын жүйелі оқыту.

Сызықтық теңдеуді шешу бастауыш сынып математикасын оқытудан басталады.

1. Бастауыш сыныптарда мынадай сызықтық теңдеуді шешу қарастырылады: 7+*x*=10, *x*-3=10+5, *x*(17-10)=70, *x*:2+10=30 т.с.с. Белгісіз санды алдымен іріктеп, таңдап алу әдісін пайдаланып теңдеудуің түбірі табылады. Кейін, теңдеудің түбірін табу арифметикалық амалдардың компоненттері мен нәтижелерінің арасындағы байланысқа

сүйеніп табуға үйретіледі. Мысалы, бірінші теңдеуді шешкенде оқушылар былайша пайымдайды: «Белгісіз қосылғышты анықтау үшін қосындыдан белгілі қосылғышты алуымыз қажет: x=10-7, x=3».

Теңдеулермен танысу формальді түрде жүргізілмейді. Мысалы, мынадай есеп қарастырылады: «Белгісіз санға 3-ті қосқанда 8 шыққан. Белгісіз санды анықтаңдар». Есеп қысқаша түрде былайша жазылады: ? + 3=8. ? символының орнына қойылатын сан таңдап алу әдісімен анықталады. Бұдан кейін белгісіз санды x арқылы белгілеп оны былайша жазуға болатындағы айтылады: x+3=8.

Бастауыш сыныптарда теңсіздіктер де таңдап алу әдісімен шығарылады, көбінесе теңсіздік шешімдерінің шекті бөліктері ғана табылады.

2. 5-сыныпта да тендеулер арифметикалық амалдардың компоненттері мен нәтижелерінің арасындағы байланыс бойынша шешіледі, көбінесе алдын-ала өрнектерді ықшамдап алады. Мысалы, 13899+x = 2716+13899. Оқушылар көбейтудің қосу (азайту) амалына қатысты үлестірімділік заңын пайдаланып, мынадай 4x+4x=424; 15a - 8a = 714 т.с.с. теңдеулерді шешеді. Ондық бөлшектерді өту кезінде мынадай теңдеулер шешіледі:

8,6-(x+2,75)=1,85; x+2,8=3,72+0,38; 45,7x+0,3x-2,4=89,6.

Бұл теңдеудерді шешу де арифметикалық амалдардың нәтижесі мен компоненттерінің қасиеттеріне негізделген.

3. 6-сыныпта оң таңбалы және теріс таңбалы сандарды өткенде сызықтық теңдеудің жаңа мысалдары, кейбір сызықтық емес теңдеулер қарастырылады. Қарама-қарсы сандардың анықтамасына сүйеніп, мынадай теңдеулердің

-x=607; -a=-30,04 шешімдері анықталады. Модульдің анықтамасына сүйеніп $|x| = 5;\ \ |y| = 20;\ \ |a| = 0;\ \ |b| = -3$ теңдеулерінің шешімдері табылады. 6-сыныпта «жақшаларды ашу» теңбе-тең түрлендіруімен танысқаннан кейін 7,2-(6,2-x)=2,2; -5+(a-25)=-4 теңдеулерді шешудің жолы қысқартылады. Көбейтіндінің нөлге тең болу шартын өткен соң мынадай теңдеулер шығарылады: 4(x-5)=0, (3x-6)2,4=0; (x+3)(x+4)=0 т.с.с. Оқушыларды теңдеулерді шешудің тәсілімен таныстырудың жаңа қадамы қосылғыштарды теңдеудің бір жағынан екінші жағына өткізу ережесі болып табылады. Осы ережеге сүйеніп, олар мынадай теңдеуді шешеді: 15y-8=-6y+4,6; 6x-12=5x+4 т.с.с.

4. Одан кейін (6 сыныптың соңы немесе 7 сыныпта) сызықтық теңдеуді шешуге байланысты мәліметтер жүйеленеді. Кейбір оқу құралдарында бірінші дәрежелі теңдеу мен сызықтық теңдеудің айырмашылығы қарастырылады. Бірінші дәрежелі теңдеудің сызықтық теңдеудің дербес жағдайы екендігі айтылады.

Әдетте сызықтық теңдеу мына теңдікпен $ax+b=0$ анықталады, мұндағы a саны белгісіз алдында тұрған коэффицент деп, ал b - бос мүше деп аталады. Бір белгісізі бар сызықтық теңдеуді шешудің жалпы тәсілін көрсеткен тиімді:

1^0. $a \neq 0;$

2^0. $a \neq 0,\ \ b \neq 0;$

3^0. $a = 0,\ \ b = 0.$

Оқушыларға бір теңдеуді шешудің бірнеше тәсілдерін табуға үйреткен де пайдалы.

Мысалы, -x=0,5 теңдеуін мынадай тәсілдермен шешуге болады:

1) алдымен бұл теңдеуді мына түрде жазып аламыз: 0-x=0,5; одан кейін белгілі айырма мен белгісіз азайғыштың арасындағы байланысқа сүйеніп, мынаны табамыз:

x=0-0,5; x=-0,5;

2) қарама-қарсы сандардің анықтамасына сәйкес, белгісіз x саны 0,5 санына қарама-қарсы. Сондықтан x=-0,5.

3) мәндес тендеулер туралы екінші теоремаға сүйенсек, (-x)(-1)=0,5(-1) болады. Бұдан x=-0,5.

Теңдеулер мен теңсіздіктер оқулықта әртүрлі баяндалады. Біз төменде Т.А.Алдамұратованың «Математика-6» оқулығындағы «Теңдеу» тақырыбының баяндалуын қарастырайық.

Құрамында әріппен белгіленген белгісізі (айнымалысы) бар теңдік теңдеу деп атады. Мысалы, $5x+8=18$; $6x+7=-5$; $3(x+7)=15$ теңдеулер, x - белгісіз (айнымалы). Мұндай теңдеулерді бір белгісізі бар немесе бір айнымалысы бар теңдеулер деп атайды.

Теңдеулердің оң жағы және сол жағы болады. Мысалы, $4x+7=19$ теңдеуіндегі $4x+7$ – теңдеудің сол жағы, ал 19-теңдеудің оң жағы. Теңдеудегі алгебралық қосылғыштардың әрқайсысы оның мүшелері деп аталады $4x$; 7; 19 - мүшелер. Мұндағы $4x$ -белгісізі бар мүше, 7, 19 - бос мүшелер.

Теңдеумен берілген мысалдар мен есептерді шығарғанда, ондағы әріппен берілген белгісіздің немесе айнымалының сан мәнін табамыз.

Белгісіз санның немесе айнымалының теңдеуді дұрыс санды теңдікке айналдыратын мәні теңдеудің түбірі деп аталады.

Теңдеуді шешу дегеніміз – оның түбірлерін табу немесе түбірлерінің жоқ екенін дәлелдеу. Теңдеулерді шешкенде кейде түбірлері бірдей болатын теңдеулер де кездеседі. Түбірлері бірдей болатын теңдеулерді мәндес теңдеулер деп атайды. Мысалы, $2x=10$ теңдеуімен $3x=15$ және $3x-x=2{,}5х4$ теңдеулері мәндес теңдеулер. Түбірлері бірдей: $x=5$. Ескертетін жағдай, кейде теңдеудің түбірі болмайды. Түбірлері болмайтын теңдеулер де мәндес теңдеулер болып саналады.

Теңдеулерді мәндес түрлендіргенде мынадай қасиеттер пайдаланылады.

1. Теңдеуді екі жағына да бірдей санды немесе әріпті өрнекті қосқанда (азайтқанда) теңдеу мәндес теңдеуге түрленеді.

2. Теңдеудегі қосылғыштардың таңбасын қарама-қарсыға өзгертіп, оны теңдеудің бір жағынан екінші жағына көшіргенде теңдеу мәндес теңдеуге түрленеді.

3. Теңдеудің екі жағын да нөлден өзге бірдей санға көбейткенде немесе бөлгенде теңдеу мәндес теңдеуге түрленеді.

Бір айнымалысы бар екі өрнектің теңдігін ықшамдап, $ax=b$ түріне келтіріледі.

1. Егер $a\neq 0$ болса, теңдеудің бір ғана $x=\frac{b}{a}$ түбірі болады.

Мысалы, $4(x+3)-15=2x+7$,

$4x-2x=7+15-12$,

$2x=10$,

$$x=\frac{10}{2}=5,\ x=5.$$

2. Егер $a=0$, $b\neq 0$ болса $0\cdot x=b$ теңдігіx-тің ешбір мәнінде дұрыс теңдік болмайтындықтан, теңдеудің түбірі болмайды.

Мысалы, $3x-2(x+6)=x+17$,

$3x-2x-12=x+17$,

$x-x=17+12$,

$0\cdot x=29$,

бұл теңдеудің түбірі болмайды.

3. Егер $a=0$, $b=0$ болса $0\cdot x=0$ теңдігіx-тің кез келген мәнінде дұрыс санды теңдік, сондықтан бұл жағдайда теңдеудің шексіз көп түбірі болады.

Мысалы, $7x-3(2x-5)=15+x$,

$7x-6x+15=15+x$,

$x+15=15+x$,

$x-x=15-15$,

$0=0$.

Теңдеудің түбірі – кез келген сан.

Екі белгісізі бар екі сызықтық теңдеулер жүйесі. Екі белгісізі бар екі теңдеулер жүйесі туралы ұғымды оқыту әдістемесіне тоқталайық. Бұл ұғымның ертерек енгізілуіне байланысты индуктивтік тәсілмен түсіндіріледі.

Екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесі ұғымын оқытудың мынадай әдістемелік схемасы ұсынылады:

1) мәтіндік есеп қарастырылады: «Екі кәрзеңкеде 12 кг алма бар, бірінші кәрзеңкеде екінші кәрзеңкеге қарағанда 2 кг алма артық. Әрбір кәрзеңкеде қанша кг алма бар?»

2) белгісіз *x* және *y* айнымалыларын енгізіп, олар арқылы теңдеулер жүйесі құрылады: бірінші кәрзеңкеде *x* кг алма, ал екіншісінде *y* кг алма болсын. Есептің шарты бойынша екі кәрзеңкеде 12 кг алма бар, яғни $x+y=12$; бірінші кәрзеңкеде, екіншісіне қарағанда 2 кг алма артық болатындықтан, $x-y=2$. Есепті шешу үшін *x* пен *y*-тің осы жазылған екі теңдеудің екеуін де бірдей дұрыс тендікке айналдыратын мәндерін табуымыз қажет.

3) екі белгісізі бар екі тендеулер жүйесі және жүйенің шешімдері ұғымы енгізіледі. Егер $x+y=12$ және $x-y=2$ тендеулерінің әрқайсысын дұрыс теңдікке айналдыратын шешімдерін табу қажет болса, онда берілген теңдеулерді тендеулер жүйесін құрды деп айтады. Теңдеулер жүйесі фигуралы жақша арқылы белгілеп жазады:

$$\begin{cases} x+y=12, \\ x-y=2. \end{cases}$$

Осы теңдеулер жүйесінің әрқайсысын дұрыс тендікке айналдыратын белгісіздердің мәндерінің жұбын тендеулер жүйесінің шешімдері деп атайды.

4) енгізілген ұғымды нақтылау керек. Оның бір нұсқасы мынадай: «$x=2$, $y=10$ екі сандар жұбын алайық. Бұл сандар жұбы бірінші тендеудің шешімі бола ма; екінші тендеудің шешімі бола ма; берілген жүйенің шешімі бола ма? Басқа x=7, y=5 сандар жұбын алайық, сөйтіп жоғарыдағы сұрақтарға жауап берейік. Тағы да бір x=3, y=9 сандар жұбын алып, сол сұрақтарға жауап берейік. Неліктен x=7, y=5 сандар жұбы жүйенің шешімі болатынын түсіндіріңдер».

5) мәтіндік есептің сұрағының жауабы айтылады;

6) жұмыстың қорытындысы: *екі белгісізі бар екі теңдеулер жүйесі берілген есептің шешімін табуға мүмкіндік береді;*

7) басқа да теңдеулер жүйесін қарастырып, оларды таңдап алу немесе графиктік тәсілмен шешуге тоқталады.

Осыдан кейін екі белгісізі бар екі сызықтық теңдеулер жүйесін шешу тәсілдері үйретіледі.

Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулер жүйесін *алмастыру тәсілімен шешу* есептер шығару арқылы түсіндіріледі. Мысалы,

$$\begin{cases} 2x+y=11, \\ 5x-2y=5, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=11-2x, \\ 5x-2(11-2x)=5, \end{cases}$$

$$5x-2(11-2x)=5; \quad 5x-22+4x=5; \quad 9x=27; \quad x=3.$$

$y=11-2\cdot x$ теңдеудегі *x*-тің орнына $x=3$ мәнін қоямыз: $y=11-2\cdot 3,\ \ y=5$.

Жауабы: (3; 5).

Екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесін *қосу тәсілімен шешуді* түсіндіруде теңдеулер жүйесін мәндес теңдеуге түрлендіру пайдаланылады. Екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесін қосу тәсілімен шешуде үш түрлі жағдай кездеседі.

1-жағдай. Теңдеулер жүйесіндегі айнымалылардың біреуінің коэффициенттерінің модульдері тең, бірақ қарама-қарсы сандар. Мұндай жағдайда екі теңдеуді мүшелеп қосады. Мысалы,

$$\begin{cases} 5x-2y=5, \\ 3x+2y=19, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x=24, & (1) \\ 3x+2y=19 & (2) \end{cases}$$

Теңдеулер жүйесіндегі $8x=24$ теңдеуінен $x=3$ мәнін жүйенің басқа (екінші) теңдеуіндегі x-тің орнына қойып, оны бір айнымалысы бар теңдеуге айналдыру керек:

$$3x+2y=19;\quad 3\cdot 3+2y=19;\quad 2y=10;\quad y=5.$$

Жауабы: (3; 5).

2-жағдай. Теңдеулер жүйесіндегі айнымалылардың біреуінің коэффициенттері тең. Мысалы,

$$\begin{cases}7x+2y=13,\\3x+2y=9.\end{cases}$$

Теңдеулер жүйесін шешу үшін жүйедегі теңдеулердің біреуінің ғана екі жағын да –1-ге көбейтіп, жүйедегі теңдеулерді мүшелеп қосу немесе теңдеулерді бірінен екіншісін мүшелеп азайту керек. Сонда берілген теңдеулер жүйесі өзіне мәндес теңдеулер жүйесіне түрленеді:

$$-\begin{cases}7x+2y=13,\\3x+2y=9\end{cases}\quad \text{немесе}\quad +\begin{cases}7x+2y=13,\\-3x-2y=-9\end{cases}$$

$4x=4$; $x=1$. x-тің табылған мәнін бірінші теңдеуге қойғанда, ол бір айнымалысы бар теңдеуге түрленеді:

$7\cdot 1+2y = 13$; $2y = 6$; $y =3$.

Жауабы: (1; 3).

3-жағдай. Теңдеулер жүйесіндегі айнымалылардың коэффициенттері өзара тең емес. Мысалы,

$$\begin{cases}4x+7y=15,\\3x+5y=11.\end{cases}$$

Теңдеулер жүйесіндегі айнымалылардың біреуінің коэффициенттері қарама-қарсы болатын сандар болатындай көбейткіштерге теңдеулердің екі жағын да көбейтіп, сонан соң теңдеулерді мүшелеп қосу керек:

$$\begin{cases}4x+7y=15,\\3x+5y=11\end{cases}\left|\begin{matrix}3\\-4\end{matrix}\right| \to +\begin{cases}12x+21y=45,\\-12x-20y=-44\end{cases}$$

$y=1$;

$12x+21y=45$; $12x+21\cdot 1=45$; $12x=24$, $x=2$.

Жауабы: (2; 1).

Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеу және оның графигі. $ax+by=c$ түріндегі теңдеу екі айнымалысы бар, сызықтық теңдеу, мұндағы a, b, c - қандай да бір сандар, x және y - айнымалылар. Мысалы, $8x+4y=48$ екі айнымалысы бар сызықтық теңдеуін шешейік.

Бір айнымалыны екінші айнымалы арқылы өрнектейміз:

$4y=48-8x$; $y=12-2x$.

Оқушылардың қалауларынша x-ке әртүрлі сан мәндерін беруге болады:

$x=0$ болса, $y=12-2\cdot 0$, $y=12$, яғни (0; 12);

$x=2$ болса, $y=12-2\cdot 2$, $y=8$, яғни (2; 8);

$x=-3$ болса, $y=12-2\cdot(-3)$, $y=18$, яғни (-3; 18);

Осылайша x айнымалысына қандай да бір сан мәнін беріп, y айнымалысының оған сәйкес сан мәнін табу керек.

Мына тұжырымдардың қайсысы дұрыс?

1) Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеудің бір ғана шешімі бар;
2) Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеудің шексіз көп шешімі бар.

Оқушылар өздері екі айнымалысы бар сызықтық теңдеудің шексіз көп шешімі бар деген қорытындыға келеді.

Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеудің шешімдері жақшаға алынып, бірінші орынға x-тің мәні, екінші орынға y-тің мәні жазылады. Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеудің бірінің шешімдері екіншісіне де шешім болса, ондай теңдеулер мәндес теңдеулер деп аталады. Мысалы, $4x+3y=12$ теңдеуі $3y=12-4x$ теңдеуімен мәндес. Шешімдері болмайтын екі айнымалысы бар теңдеулер де мәндес теңдеулер болатынын ескертеміз.

Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулердің де қасиеттері бір айнымалысы бар теңдеудің қасиеттеріндей екенін ескертіп, мәндес түрлендірулердің қасиеттерін оқушыларға қайталап отырған тиімді. Мысалы, $9x+3y=54$.

1-қасиетті пайдаланып, $3y=54-9x$ мәндес теңдеу алдық.

2-қасиетті пайдаланып $y=18-3x$ мәндес теңдеу алдық.

Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулерді шешкенде осы қасиеттерді пайдаланып, теңдеуді онымен мәндес теңдеуге түрлендіреміз.

$ax+by=c$ теңдеуінің графигі түзу сызық болады. Себебі, бұл $ax+by=c$ теңдеуі $y=kx+c$ сызықтық функция.

Екі айнымалысы бар $ax+by=c$ сызықтық функциясының графигін салуда түрліше жағдайлар кездеседі.

1-жағдай. $ax+by=c$ теңдеуіндегі $a\neq0;\ b\neq0;\ c\neq0.$

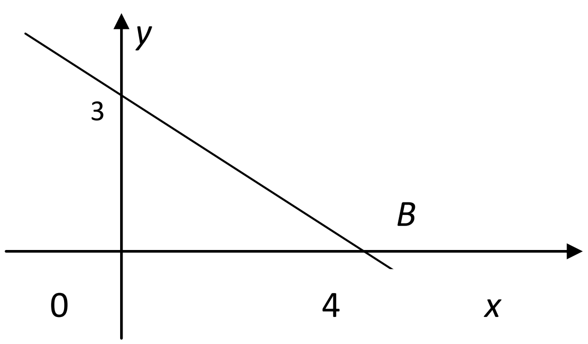
Бұл жағдайда берілген теңдеудің графигі түзу болады. Түзуді салу үшін екі нүктенің координаталарын табу жеткілікті. Мысалы, $3x+4y=12$ екі айнымалысы бар сызықтық теңдеудің графигін салуды қарастырайық.

Түзудің абсцисса және ордината өстерімен қиылысу нүктелерін табайық. Егер $x=0$ болса, $y=3$; y=0 болса, $x=4$, $A(0;3)$ және $B(4;0)$ нүктелері арқылы жүргізілген түзу $3x+4y=12$ теңдеуінің графигі (4-сурет).

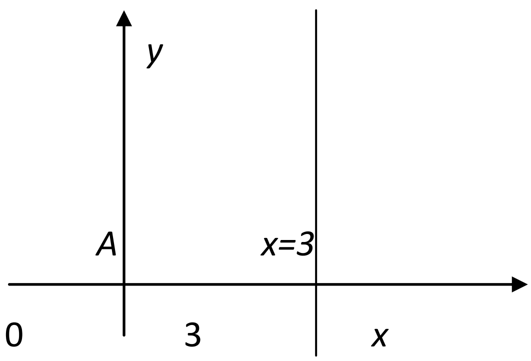
2-жағдай. $ax+by=c$ теңдеуіндегі x немесе y-тің біреуінің коэффициенті нөлге тең. $b=0$ болсын, яғни $2x+0\cdot y=6$ теңдеуінің графигін салуды қарастырайық: $2x=6$; $x=3$.

Теңдеудің шешімі: $x=3$; y - кез келген сан. Оның графигі оy өсіне параллель, ox өсін $E(3;0)$ нүктесінде қиятын түзу (5-сурет).

Егер $a=0;\ b\neq0$ болса, $y=m$ түзуінің графигі $OУ$ өсін ($o;m$) нүктесінде қиятын, ox өсіне



4-сурет



5-сурет

параллель түзу.

3-жағдай.$y=0$ түзуі - ox өсі; $x=0$ түзуі – oy өсі

4-жағдай. Екі айнымалысы бар екі сызықтық теңдеулер жүйесіндегі теңдеулердің графиктері үш түрлі жағдайда орналасады. Соған байланысты екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулер жүйесінің:

1) бір ғана шешімі бар;
2) шешімдері жоқ;
3) сансыз көп шешімдері бар болатын үш түрлі жағдайыболады.

1. Теңдеулер жүйесінің бір ғана шешімі болатын жағдай.

Мысалы,

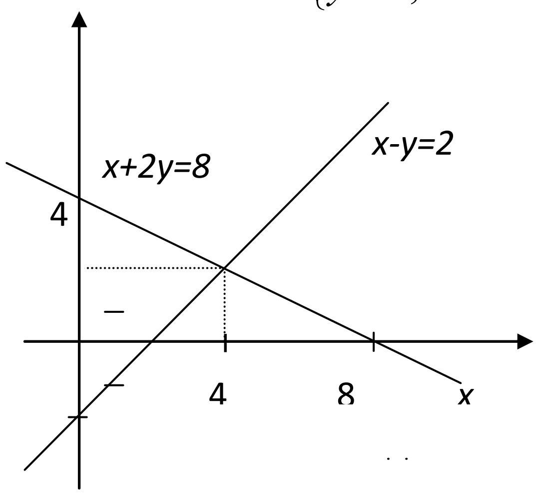
$$\begin{cases} x+2y=8. \\ x-y=2 \end{cases} \to \begin{cases} y=4-\dfrac{1}{2}x, \\ y=x-2 \end{cases}$$

Теңдеулер жүйесінің неше шешімі бар екенін анықтайық.

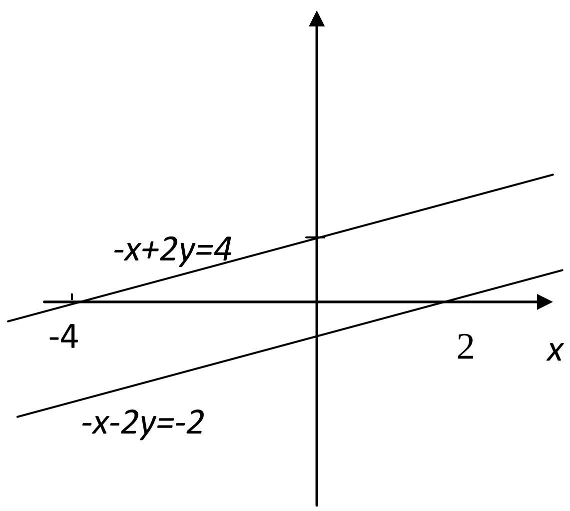
y=4-0,5*x* пен *y*=*x*-2 теңдеулерінің графигі болатын (6-сурет) түзулер *A(4;2)* нүктесінде қиылысады. (4;2) сандар жұбы берілген теңдеулер жүйесінің шешімі болады.

2. Теңдеулер жүйесінің ортақ шешімдерінің болмайтын жағдайы.
3.

Мысалы, $\to \begin{cases} y=0,5x+2, \\ y=0,5x-1. \end{cases}$



6-сурет



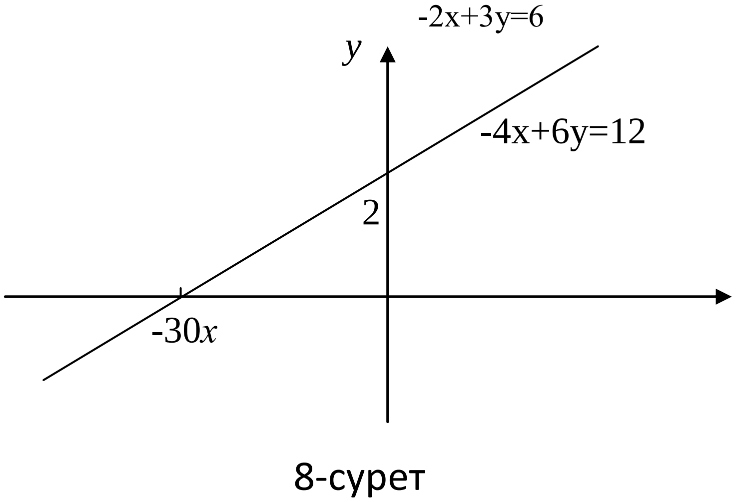
7-сурет

Екі теңдеудегі *x*-тің коэффициенттері бірдей болғандықтан, олардың графиктері паралель түзулер (7-сурет). Онда y=0,5x+2 теңдеуі мен y=0,5x-1 теңдеуінің графиктері қиылыспайды. Демек, бұл жағдайда берілген теңдеулер жүйесінің шешімдері жоқ.

3.Теңдеулер жүйесінің шешімдері шексіз көп болатын жағдай. Мысалы,

$$\begin{cases} -2x+3y=6, \\ -4x+6y=12 \end{cases} \to \begin{cases} -2x+3y=6, \\ -2x+3y=6 \end{cases}$$

Бұл жағдайда жүйедегі екі теңдеудің графиктері беттесіп, бір ғана түзуді құрайды (8-сурет). Демек, берілген теңдеулер жүйесінің шексіз көп шешімдері бар.



8-сурет

Тақырыпты оқушыларға түсіндіріп болған соң теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шешкенде жүйедегі теңдеулердің графиктері өзара қиылысса, бір ғана шешімі болатыны, өзара параллель болса, шешімдері болмайтыны, егер беттессе, шексіз көп шешімдері болатыны тұжырымдалады.

Теңсіздіктерді шешуге үйретудің жалпы мәселелері. Мектепте теңсіздіктер және олардың жүйелері, бірнеше кезеңмен оқытылды: сандық теңсіздіктер, бір белгісізі бар сызықтық теңсіздіктер мен олардың жүйелері 6-сыныпта, екінші дәрежелі теңсіздіктер, рационал теңсіздіктер және теңсіздіктерді интервалдар әдісімен шешу 7-9-сыныптарда, жай тригонометриялық теңсіздіктерді шешу 10-сыныпта, көрсеткіштік және логарифмдік теңсіздіктерді шешу 11-сыныпта қарастырылады.

Теңсіздіктер туралы теориялық, мәліметтерді баяндау мектепте алгебра курсының нақты сандар, өрнектер мен функциялар, теңбе-тең түрлендіру, математикалық анализдің бастамалары тақырыптарын өтудің мазмұны мен ретіне қарай жүргізіледі.

Орта мектепте теңсіздіктерге байланысты мынадай ұғымдар қарастырылады.

Теңсіздіктер деп мына түрдегі өрнекті айтады: $a \leq b$, $a \geq b$, $a>b$, $a<b$, мұндағы a мен b сандар немесе сандық өрнектер немесе функциялар. «<» немесе «>» теңсіздіктерін қатаң теңсіздіктер, ал «≥» және «≤» теңсіздіктерін қатаң емес теңсіздіктер деп атайды. Теңсіздіктер сандық немесе айнымалысы бар теңсіздіктер болып екі түрге бөлінеді. Мысалы:

1. $5<10$—сандық теңсіздік,
2. $2x>3$ —бір айнымалысы бар теңсіздік.
3. $2x<5y$ — екі айнымалысы бар теңсіздік.

Айнымалысы бар теңсіздіктегі айнымалының орнына апарып қойғанда берілген теңсіздікті дұрыс теңсіздікке айналдыратын айнымалының мәндерін **теңсіздіктің шешімдері** деп атайды.

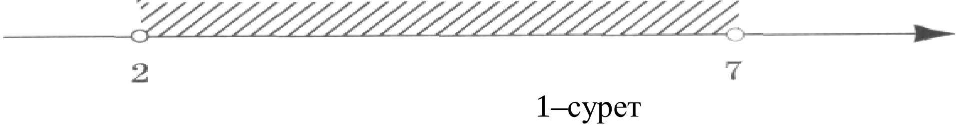
Теңсіздікті шешу деп — оның барлық шешімдерін табуды немесе оның шешімдерінің болмайтындығын көрсетуді айтады. Мысалы:

1. $x^2+5>0 \Leftrightarrow x \in R;$
2. $x^2-4 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 2]$.
3. $x^2<0 \Leftrightarrow x \in \varnothing;$

Теңсіздіктер тақырыбын оқытудың басты мақсаттары - теңсіздіктерді шешу немесе теңсіздіктерді дәлелдей алуға үйрету.

Теңсіздіктерді шешудің соңында сол теңсіздіктің шешімдерін өрнектеп жаза білуді қажет етеді. Сондықтан бірінші кезекте оқушылардың теңсіздіктердің шешімдер жиынын координаталық түзуде кескіндеп көрсете алу біліктеріне тоқталамыз.

1) $2<x<7$ теңсіздігінің шешімдерін сан аралығында белгілеуді қарастырайық. Мұндай теңсіздік *қос теңсіздік***.**

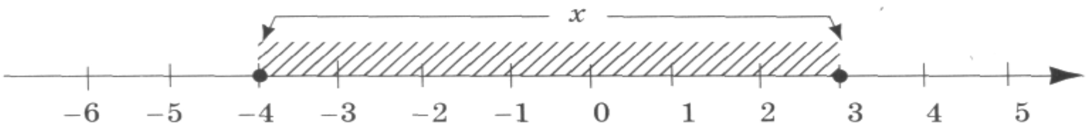


1–сурет

Берілген $2<x<7$ теңсіздігінің шешімдеріне координаталық түзуде координаталары 2 және 7 болатын нүктелердің арасында жатқан нүктелердің координаталары сәйкес келеді (1-сурет). Мұны «2-ден 7-ге» дейінгі сан аралығы немесе «интервал» деп атайды. Белгіленуі: (2; 7). Оқылуы: 2-ден 7-ге дейінгі аралық. $2<x<7$ теңсіздігі *қатаң қос теңсіздік*, оның шешімдеріне координаталары 2 және 7 болатын нүктелер енбейді. Ол сызбада координаталық түзу бойындағы (нүктедегі) кішкене шеңбермен белгіленеді.

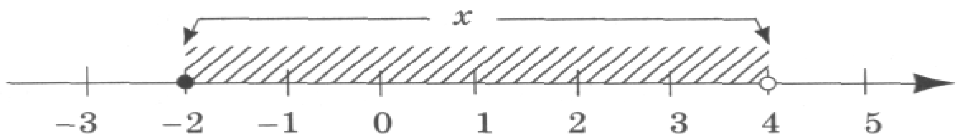
2) $-4 \leq x \leq 3$ *қатаң емес қос* теңсіздігінің шешімдерінің сан аралығында белгіленуін қарастырайық. Қатаң емес теңсіздіктің шешімдеріне сан аралығын көрсетіп тұрған сандар қоса енеді (2-сурет). Мұндай сан аралығын «кесінді» деп атайды. Белгіленуі: [-4; 3]. Оқылуы: «-4 саны мен 3 саны қоса алынған

-4-тен 3-ке дейінгі аралық». Координаталық түзуде сан аралығына енетін нүкте кішкене дөңгелекпен кескінделеді.



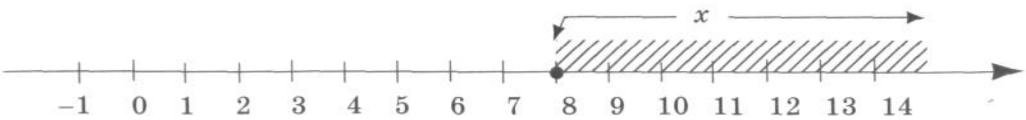
2–сурет

3) $-2 \leq x < 4$ теңсіздігінің шешімдерінің жиыны координаталық түзуде 3-суреттегідей кескінделеді. Мұнда берілген теңсіздіктің шешімдеріне -2 саны енеді, бірақ 4 саны енбейді. Бұл жағдайда сан аралығы «жарты интервал» деп аталады. Берілген теңсіздік шешімдері жиынының сан аралығымен белгіленуі: [-2; 4). Оқылуы: «-2 саны қоса алынған –2-ден 4-ке дейінгі аралық».



3-сурет

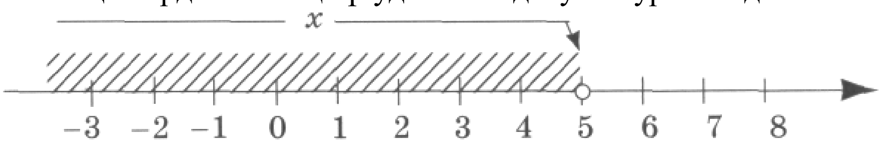
4) $x \geq 8$ теңсіздігінің шешімдерінің жиыны координаталық түзу бойында 4-суреттегідей кескінделеді.



4-сурет

$x \geq 8$ теңсіздігі *қатаң емес теңсіздік*, оның шешімдерінің жиыны координаталық түзуде координатасы 8 болатын нүкте қоса алынған сәулемен кескінделеді. Мұндай сан аралығын «сәуле» деп атайды. Белгіленуі: $[8; +\infty)$. Оқылуы: «8-дің өзі қоса алынған 8-ден плюс шексіздікке дейінгі аралық».

5) $x<5$ теңсіздігінің шешімдері жиынын сан аралығында белгілейік. $x<5$ теңсіздігі шешімдері жиынының координаталық түзуде кескінделуі 5-суреттегідей.



5-сурет

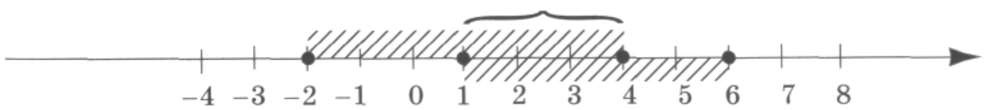
Мұнда берілген теңсіздік шешімдерінің жиынына минус шексіздіктен $(-\infty)$-тен 5-ке дейінгі сандар енеді. 5 саны теңсіздік шешіміне енбейді. Сондықтан мұндай сан аралығын «ашық сәуле» деп атайды. Теңсіздік шешімдері жиынының сан аралығында белгіленуі: $(-\infty; 5)$. Оқылуы: «минус шексіздіктен 5-ке дейінгі аралық».

6) $-\infty<x<+\infty$ теңсіздігінің шешімдері барлық нақты сандар. Нақты сандардың жиыны координаталық түзудің бойындағы барлық нүктелермен кескінделеді. Белгіленуі: $(-\infty;+\infty)$. Оқылуы: «минус шексіздіктен плюс шексіздікке дейінгі аралық». Мұны *сан түзуі немесе сандық түзу* деп атайды.

Екі сан аралығы өзара «қиылысады», қиылысуы бос жиын болады немесе «бірігеді».

Екі сан аралығының қиылысуы.

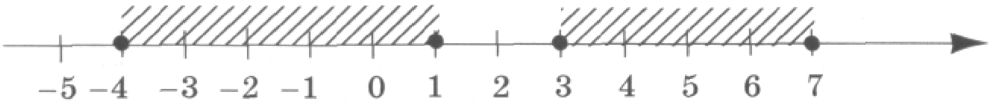
Мысалы, [-2; 4] аралығы мен [1; 6] аралығының ортақ бөлігі [1; 4] (6-сурет).



6-сурет

Мұндай жағдайда [-2;4] және [1;6] аралықтары қиылысады дейді. Оны былайша белгілейді: [-2;4]$\cap$[1;6] =[1;4].

Екі сан аралығының қиылыспайтын болуы. Мысалы, [-4;1] және [3;7] аралықтары өзара қиылыспайды (7-сурет) немесе ортақ сан аралықтары жоқ. Олай болса, [-4; 1] және [3; 7] аралықтарының қиылысуы «бос» жиын болады.

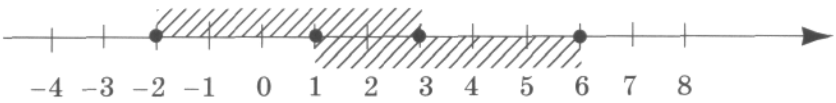


7-сурет

Теңсіздіктер жүйесінің шешімін табу үшін жиындардың киылысуы табылады.

Екі сан аралықтарының бірігуі.

[-2; 6] аралығының әрбір саны [-2; 3] және [1; 6] аралықтарының біреуіне немесе екеуіне де тиісті болады (8-сурет).



8-сурет

Мұндай жағдайда [-2; 6] аралығын [-2; 3] және [1; 6] аралықтарының «бірігуі» деп атайды.

Белгіленуі: [-2; 3]$\cup$ [1; 6]=[-2; 6].

Теңсіздіктер жиынтығының шешімін табу үшін жиындардың бірігуі табылады.

Бір айнымалысы бар теңсіздіктерді шешудің орта мектепте мынадай негізгі әдістері қолданылады:

1. Теңсіздікті графиктік әдіспен шешу;
2. Теңсіздікті мәндес түрлендіру арқылы шешу;
3. Теңсіздікті интервалдар әдісімен шешу.

Теңсіздіктердің мәндестігі ұғымы.Теңсіздіктерді шешуде мәндестік ұғымының маңызы үлкен. $f_1(x) > g_1(x)$ (1) және $f_2(x) > g_2(x)$ (2) екі теңсіздігі берілсін. Егер бірінші теңсіздіктің X жиынына тиісті әрбір шешімі екіншісінің де шешімі болса, және керісінше екінші теңсіздіктің X жиынына тиісті шешімі біріншісінің де шешімі болса немесе теңсіздіктердің бірінің де X жиынында шешімі жоқ болса, онда ол теңсіздіктер X жиынында **мәндес** деп аталады,. Демек, егер осы теңсіздіктердің шешімдер жиыны бірдей болса, онда олар **мәндес** деп аталады. Бір теңсіздікті онымен мәндес теңсіздікпен ауыстыруды **мәндес түрлендіру** делінеді. Мәндес теңсіздіктерді $\Leftrightarrow$ символымен белгілейді.

Мәселен:

1.$x^2 < 1 \quad \Leftrightarrow |x| < 1$.

2. $\sqrt{4x+5} \leq 2$ және $4x+5 \leq 4$ теңсіздіктері мәндес емес, себебі егер $4x+5 < 0$ болса, бірінші теңсіздіктің шешімі жоқ, ал екіншісінің шешімі бар: $x \leq -\frac{1}{4}$.

Кейбір әдебиеттерде мәндес (эквивалентті) теңсіздіктерді анықтаудың басқа жолы да кездеседі.

Егер (1) теңсіздіктің барлық шешімдері (2) теңсіздіктің де шешімдері болса, онда (2) теңсіздік (1) теңсіздіктің салдары деп аталады.

Оны қысқаша (1)$\Rightarrow$(2) деп жазады, мұндағы «$\Rightarrow$» логикалық салдар дегенді білдіреді. (1)$\Rightarrow$(2) жазуы «(1) теңсіздіктен (2) теңсіздік шығады» деп оқылады.

Егер (1) теңсіздік (2) теңсіздіктің салдары, ал (2) теңсіздік (1) теңсіздіктің салдары болса немесе екі теңсіздіктің де шешімі жоқ болса, онда (1) және (2) екі теңсіздік мәндес деп аталады,.

Теңсіздіктердің мәндестігін қысқаша: (1)$\Leftrightarrow$(2) деп жазады, мұндағы «$\Leftrightarrow$» логикалық мәндестік белгісі.

Теңсіздіктерді шешу үшін теңсіздікке мәндес түрлендірулер жасалынады.

Мәндес теңсіздіктер жөніндегі негізгі тұжырымдар:

1. $f(x) < g(x)$ және $g(x) > f(x)$ теңсіздіктері өзара мәндес.

2. $f(x) < g(x)$ және $f(x) - g(x) < 0$ теңсіздіктері мәндес.

3. Егер $\varphi(x)$ функциясы $f(x) < g(x)$ теңсіздігінің $D(f)$-да анықталған болса, онда $f(x) < g(x)$ және $f(x) + \varphi(x) < g(x) + \varphi(x)$ теңсіздіктері мәндес,.

Дәлелдеу:а саны $f(x) < g(x)$ теңсіздігінің қандай-да бір шешімі болсын, яғни $f(a) < g(a)$ (3).

Енді (3) теңсіздігінің екі жағына да $\varphi(a)$ санын қосамыз. Сонда санды теңсіздіктің қасиеті бойынша теңсіздіктің мағынасы өзгермейді:

$$f(a) + \varphi(a) < g(a) + \varphi(a) \qquad (4)$$

(4) теңсіздігі $x = a$ мәнінің $f(x) + \varphi(x) < g(x) + \varphi(x)$ теңсіздігінің шешімі екендігін көрсетеді.

Енді b саны $f(x) + \varphi(x) < g(x) + \varphi(x)$ теңсіздігінің шешімі болсын, сонда

$$f(b) + \varphi(b) < g(b) + \varphi(b) (5)$$

болады. Бұл теңсіздіктің екі жағында $-\varphi(b)$ санын қосамыз:

$$f(b) + \varphi(b) - \varphi(b) < g(b) + \varphi(b) - \varphi(b)$$

Сонда

$$f(b) < g(b) \quad (6)$$

(6) теңсіздігі $x = b$ санының $f(x) < g(x)$ теңсіздігінің шешімі екендігін көрсетеді. Сонымен бастапқы берілген теңсіздіктер өзара мәндес екен.

4. Егер $f(x) > \varphi(x)$ теңсіздігінің екі жағын да, осы теңсіздіктің анықталу облысында анықталған $\psi(x) > 0$ функциясына көбейтсек, онда бастапқы теңсіздікке мәндес

$$f(x)\psi(x) > \varphi(x)\psi(x)$$

теңсіздігі шығады.

5. Егер $f(x) > \varphi(x)$ теңсіздігінің екі жағында, осы теңсіздіктің анықталу облысында анықталған $\psi(x) < 0$ функциясына көбейтсек, онда бастапқы теңсіздікке мәндес

$$f(x)\psi(x) < \varphi(x)\psi(x)$$

теңсіздігі шығады.

6. $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$ және $f(x) \cdot \varphi(x)$>0 теңсіздіктері өзара мәндес.

7. $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ және $f(x) > \varphi(x)$ теңсіздіктері $(1;+\infty)$ аралығында жататын кез келген *а* үшін мәндес.

8. $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ және $f(x) < \varphi(x)$ теңсіздіктері (0,1) аралығында жататын кез келген *a* үшін мәндес.

9. Егер *A* жиынында $f(x), \varphi(x)$ функциялары теріс емес болса, онда

$f(x) > \varphi(x)$ және $(f(x))^n > (\varphi(x))^n \; (n \in N)$ теңсіздіктері мәндес.

10. $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{\varphi(x)}$ және $f(x) < \varphi(x)$ теңсіздіктері өзара мәндес.

11. $f^{2n}(x) < \varphi^{2n}(x)$ және $|f(x)| < |\varphi(x)|$ теңсіздіктері өзара мәндес.

Теңсіздіктерді шешуге үйрету. Бір белгісізі бар сызықтық теңсіздік

Жаңа бағдарламаға сәйкес теңсіздіктерді шешумен оқушыларды жүйелі түрде таныстыру 6-сыныпта басталады. Т.А.Алдамұратованың оқулығында «Сан аралықтары, санды теңсіздіктердің шешімдерін сан аралықтарында белгілеу» қарастырылғаннан кейін «Бір айнымалысы бар сызықтық теңсіздіктерді шешу былайша баяндалады.

$5x-2<8; x-5>0; 3x+5>21-x; \frac{x+4}{2}<\frac{x+7}{3}$ – бір айнымалы-сы бар теңсіздіктер.

ax>b немесе *ax<b* түріндегі теңсіздіктер бір айнымалысы бар сызықтық теңсіздіктер деп аталады. Мұндағы *a,b* – қандай да бір сандар, *x* –айнымалы шама.

Бір айнымалысы бар сызықтық теңсіздіктің шешімі деп, осы теңсіздікті дұрыс санды теңсіздікте айналдыратын айнымалының мәні аталады. Теңсіздікті шешу дегеніміз оның барлық шешімдерін табу немесе шешімдерінің болмайтынын дәлелдеу. Шешімдері бірдей теңсіздіктер мәндес теңсіздіктер деп аталады. Шешімдері болмайтын теңсіздіктер де мәндес теңсіздіктер болып есептеледі.

Теңсіздіктерді шешуде теңсіздіктер мәндес теңсіздіктерге түрлендіру пайдаланылады.

Теңсіздіктер мәндес теңсіздіктерге түрлендіріледі, егер:

1) қосылғыш, теңсіздіктің бір жақ бөлігінен екінші жақ бөлігіне қарама-қарсы таңбамен көшірілсе;

2) теңсіздіктің екі жақ бөлігі де бір ғана оң санға көбейтілсе немесе бөлінсе, теңсіздіктің екі жақ бөлігін де бір ғана теріс санға көбейтіп немесе бөліп, сонымен бірге теңсіздік белгісі қарама-қарсы теңсіздік белгісіне өзгертілсе.

Бір айнымалысы бар теңсіздіктерді шешу үшін:

1) теңсіздікте жақша болса, жақшаны ашып, бөлшек болған жағдайда теңсіздіктің екі жағын да бөлімдерінің ең кіші ортақ еселігіне көбейтіп түрлендіру керек;

2) теңсіздіктегі белгісізі бар мүшелерді теңсіздіктің сол жақ бөлігіне, бос мүшелерді теңсіздіктің оң жақ бөлігіне жинақтау керек;

3) теңсіздіктегі ұқсас мүшелер біріктіріледі;

4) теңсіздіктің екі жағын да белгісіздің коэффициентіне (егер ол нөлге тең болмаса) бөлу керек;

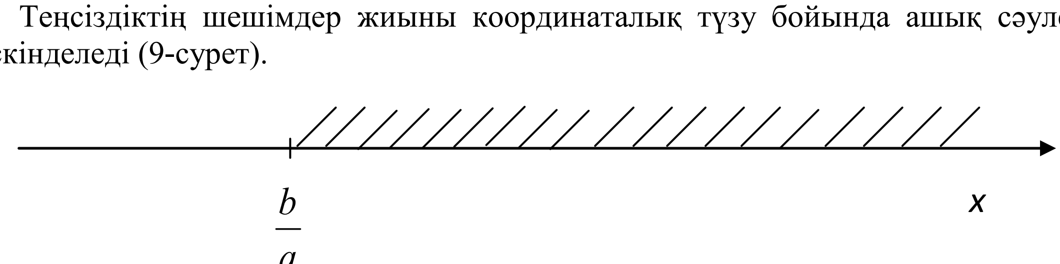
5) теңсіздіктің шешімдерін тауып, қажет болса, оны сан аралығында белгілеу керек.

Осындай түсініктемелер жасағаннан кейін бір айнымалысы бар сызықтық теңсіздікті шешуді қарастырылады.

ax>b теңсіздігіндегі:

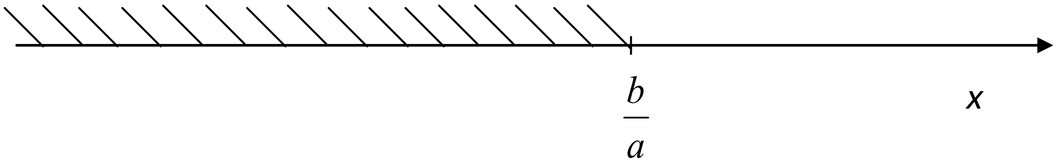
1) *a>0* болса, теңсіздіктің шешімдері $x > \frac{b}{a}$ болады. Оның сан аралығындағы белгіленуі: $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$;

Теңсіздіктің шешімдер жиыны координаталық түзу бойында ашық сәуле түрінде кескінделеді (9-сурет).



2) $a<0$ болса, теңсіздіктің шешімдері $x<\frac{b}{a}$ болады. Оның сан аралығындағы белгіленуі: $\left(-\infty;\frac{b}{a}\right)$.

Теңсіздіктің шешімдер жиыны координаталық түзуде ашық сәуле түрінде кескінделеді (10-сурет).



10-сурет

3) $a=0$ және $b>0$ болса, (... дері болмайды. Себебі 0 саны кез келген оң саннан үлкен емес.

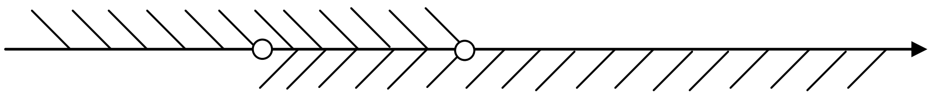
4) $a=0$ және $b<0$ болса, $0{\cdot}x<b$ теңсіздігі x-тің кез келген мәнінде дұрыс теңсіздік болады. Себебі нөл саны кез келген теріс саннан ($b<0$) үлкен. Сондықтан мұндай теңсіздіктің сансыз көп шешімдері болады: $(-\infty;\ +\infty)$.

Бір белгісізі бар сызықтық теңсіздіктер жүйесі. Бір белгісізі бар теңсіздіктер жүйесін шешу ұғымын енізу үшін мынадай есеп шығарылады.

1-мысал. Асқар 3 сызғыш сатып алу үшін 21 тг-ден кем ақша жұмсады. Егер сызғыштың бағасы 2 тг—ге арзандаса, ол 9-тг-ден көп ақша төлейді. Сызғыштың алғашқы бағасы неше теңге?

Ш е ш у і: x - сызғыштың алғашқы бағасы.

Есептің шарты бойынша: $\begin{cases}3x<21,\\ 3(x-2)>9.\end{cases}$ Теңсіздіктердің әрқайсысын жеке-жеке шешу керек: $\begin{matrix}3x<21;\\ x<7;\end{matrix}$ $\begin{matrix}3(x-2)>9,\\ x-2>3,\\ x>5.\end{matrix}$ Табылған x - тің мәндерінің жиыны координаталық түзуде мына түрде кескінделеді (11-сурет).



11-сурет

Берілген теңсіздіктердің екеуіне де шешім болатын мәндер жиыны $5<x<7$.

Демек, берілген $\begin{cases}3x<21\\ 3(x-2)>9\end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімдер жиыны (5;7) аралығы. Есептің шартын осы аралықта жатқан бүтін сан қанағаттандырады. Сондықтан сызғыштың алғашқы бағасы x=6 теңге болған. **Жауабы: 6 теңге.**

Демек, бір айнымалысы бар сызықтық теңсіздіктер жүйесін шешу үшін, айнымалының берілген теңсіздіктерді дұрыс теңсіздіктерге айналдыратын мәндер жиынын табу керек екен.

3.Логарифмдік теңдеулер мен теңсіздіктер

Қарапайым лагарифдік теңдеу. $\log_a x = b \Rightarrow x = a^b$;

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (1)

1) Әдіс $f(x) = g(x)$, (2) (2) теңдеулердің шешімдерін (1) теңдеуге қойып тексереміз.

2) Әдіс (2) теңдеулерді шешіп, шешімдерін $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ теңддеулер система қойып тексереміз. 3) $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ Логарифмдік теңдеулерді шешкенде потинцирлеу, жаңа айнымалыны енгізу, логарифмдеу әдістері қолданылады.

Мысалы:

$\log_3(7-2x) = \log_3(x^2-3x-5)$; $7-2x = x^2-3x-5$; $x^2-x-12=0$. $x_1=4$, $x_2=-3$

Тексеру: $x_1 = 4$. $7-2x_1 < 0$ *демек* $x_1 = 4$ бөгде түбір.

$x_2 = -3$. $7-2x_2 > 0$, $x_2^2 - 3x_2 - 5 > 0$

$\log_3(7-2x_2) = \log_3 13$ $\log_3(x_2^2 - 3x_2 - 5) = \log_3 13$

$x = -3$ теңдеуінің шешімі.

2) $\lg(x+4) + \lg(2x+3) = \lg(1-2x)$ $\lg[(x+4)(2x+3)] = \lg(1-2x)$

$(x+4)(2x+3) = 1-2x$ $2x^2+13x+11=0$. $x_1=-1$ $x_2=-5.5$

$\begin{cases} x+4>0 \\ 2x+3>0 \\ 1-2x>0 \end{cases}$ Анықталу облысын $x_1 = -1$ ғана қанағаттандырады. Сонымен шешімі

$x = -1$

Логарифмдік теңдеуді шешу көп жағдайда логарифімнің

1) $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a f(x)\cdot g(x)$ 2) $\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$

3) $\log_a (f(x))^n = \begin{cases} n\log_a f(x) \textit{егер } n \varepsilon R \;\; n \neq 2 \textit{ кезкелгенбітін сан} \\ n\log_a |f(x)| \textit{ егер n жұп сан} \end{cases}$ қасиеттері

қолданылады**.**

1-3 формуланың барлығында логарифм бір негізді $a > 0, a \neq 1$ Кейде бір логарифмдік теңдеуде бірнеше негізді логарифмдер кездеседі. Мұндай жағдайда логарифмнің негіздерін $\log_a f(x) = \dfrac{\log_b(f(x))}{\log_b a}$ $b > 0$, $b \neq 1$

формуласын қолдана қолдана отырып бір негізге келтіріп алы подан соң 1-3 қасиеттерді қолдануға болады.

I $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (1) түріндегі теңдеуді шешу: 1.тәсіл. $f(x) = g(x)$ (2) теңдеудің шешімін (1) теңдеуге қойып тексереміз. 2.тәсіл (2) теңдеуді шешіп

$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ *ексереміз* **Мысалы:**

$\log_3(7-2x) = \log_3(x^2-3x-5)$

$7-2x = x^2-3x-5$ $x^2-x-12=0$ $x_1=4$ $x_2=-3$

$x_1 = 4$ $7-2x_1 < 0$, *яєни* $x_1 = 4$ *бґгде тїбір*

$x_2 = -3$ $7 - 2\cdot x_2 > 0$ $x_2^{\,2} - 3x_2 - 5 > 0$

$\log_3 1\,3$ $\log_3(x_2^{\,2} - 3x_2 - 5) = \log_3 1\,3$

Көрсеткіштік теңдеу деп –дәреже көрсеткіші айнымалы болып келетін теңдеуді айтамыз.

Көрсеткіштік теңдеуді шешуде негізгі екі әдісті қолданады.

1. $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ теңдеуінен $f(x) = g(x)$ теңдеуіне көшу.

2.Жаңа айнымалыны енгізу. $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0, a \neq 1)$ түріндегі және осыған келтірілген теңдеуді қарастырайық. Егер $a>0, a\neq 1$ болса $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ теңдеуі $f(x) = g(x)$ теңдеуімен мәндес болады. $2^{x^2-2x} = 2^{3x-6}$

Шешуі: Бұл теңдеу $x^2 - 2x = 3x - 6$ теңдеуімен мәндес $x_1 = 2,\ x_2 = 3$

2) $\frac{0{,}2^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^{x-1}$ Шешуі: бірдей негізге келтіреміз.

$(\frac{1}{5})^{x-0{,}5} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} = 5 \cdot (\frac{1}{25})^{x-1}$ $\quad 5^{0{,}5-x} \cdot 5^{-0{,}5} = 5 \cdot 5^{-2x+2}$ $\quad 5^{-x} = 5^{-2x+2}$ $\quad -x = -2x + 2$ $\quad x = 3$

$$3)\ (3^{\sqrt{x+3}})^{\frac{1}{2\sqrt{x}}})^{\frac{2}{\sqrt{x-1}}} = \frac{3}{\sqrt[10]{3}}$$

Шешуі: Теңдеудің сол жағын оқшауландырып аламыз.

$(3(3^{\sqrt{x+3}})^{\frac{1}{2\sqrt{x}}})^{\frac{2}{\sqrt{x-1}}} = (3^{\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}+1})^{\frac{2}{\sqrt{x-1}}} = 3^{\frac{3\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}} * \frac{2}{\sqrt{x-1}}} = 3^{\frac{3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x-1})}};$ $\quad 3^{\frac{3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}} = 3^{\frac{9}{10}}$ $\quad \frac{3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{9}{10}$

$10(\sqrt{x}+1) = 3\sqrt{x}(\sqrt{x-1})$ $\quad 10\sqrt{x} + 10 - 3x + 3\sqrt{x} = 0$ $\quad 3x - 13\sqrt{x} - 10 = 0$ $\quad \sqrt{x} = y$

$3y^2 - 13y - 10 = 0$

$D = 169 + 120 = 289;\ y_1 = \frac{13-17}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$ $\quad y_2 = \frac{13+17}{6} = \frac{30}{6} = 5; \sqrt{x} = -\frac{2}{3};$ $\quad \sqrt{x=5};\ x = 25$

4.Модуль таңбасы астында болатын теңдеулер оларды шешу мысалдары

Абсолют шама белгісі бар теңдеулер жалпы мынадай түрде беріледі.

I. $|f(x)| = a,$ $\quad$ II. $f|(x)| = a$ $\quad$ III. $|f(x)| = \varphi(x)$ $\quad$ IV. $f(|x|) = g(x)$

V . $|f_1(x)| \pm |f_2(x)| \pm \ldots \pm |f_n(x)| = a$

Мұндай теңдеулерді *модуль таңбасы бар теңдеулер* деп атайды.

Модуль таңбасы бар теңдеулерді шешудің бірнеше әдістері бар. Олар:

1. абсолюттық шаманың анықтамасын пайдалана отырып, модулді ашу;
2. теңдеудің екі жағын квадраттау;
3. аралықтарға бөлу әдісі;
4. жасанды әдіс.

Теңдеулерді шешудің графиктік әдісі де бар. Бірақ бұл әдістен жиі пайдаланбайды.

Енді теңдеуді шешудің әр тәсіліне жеке-жеке тоқталайық.

Абсолюттық шаманың анықтамасынан пайдалану әдісі. Белгісіз шама модуль таңбасы бойынша алынған теңдеулердің ең қарапайым түрі $|f(x)| = a,$

(1)

Мұнда $f(x)$ - x айнымалысының функциясы, a - берілген нақты сан.

Бұл теңдеуді шешуде мынадай жағдайлар болуы мүмкін:

1. $a < 0$ болса, онда (1) теңдеудің түбірі болмайды, өйткні $|f(x)| \geq 0$;
2. $a = 0$ болса, онда (1) мына теңдеуге тепе-тең $f(x) = 0$;
3. $a > 0$ болса, онда (1) теңдеу мына теңдеулер жиынтығына тепе-тең:

$f(x) = a$ және $f(x) = -a$.(абсолюттық шаманың анықтамасы бойынша).

Мысалдар.

1. $|x-3|=2$ теңдеуін шешейік. Абсолюттық шаманың анықтамасы бұл мына теңдеулер жиынтығына тең $\left[\begin{array}{l} x-3=2, \\ x-3=-2 \end{array}\right.$ бұдан $x_1=5$ және $x_2=1$.

2. $|\sin x+\cos x|=1$ теңдеуін шешейік.

$\sin x+\cos x=1$ және $\sin x+\cos x=-1$ теңдеулерін шешеміз.
Теңдеулерді шешу үшін оларды түрлендіреміз:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{және} \quad \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Бұдан, $x_1=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$ және $x_2=\frac{\pi}{4}\pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, немесе $x=\frac{k\pi}{2}$.

$f|(x)|=a$ түрінде берілетін теңдеуді шешіп көрейік.

Абсолюттық шаманың анықтамасы бойынша берілген теңдеу екі аралас жүйенің жиынтығына жіктеледі:

$$\begin{cases} f(x)=a, \\ x\ge 0 \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} f(-x)=a, \\ x\le 0 \end{cases}$$

$F=f|(x)|$ функциясының жұптығынан бұл теңдеудің түбірі қос қарама-қарсы сан болады, яғни егер α_1 берілген теңдеудің түбірі болса, онда $(-\alpha_1)$ де түбірі болады. Сондықтан екі жүйенің тек біреуін шешу жеткілікті.

3. $x^2-|x|=6$ теңдеуін шешейік.

$\begin{cases} x^2-x=6, \\ x\ge 0 \end{cases}$ жүйесін қарастырамыз.

$x^2-x=6$ теңдеуінің шешімі -2 және 3. Ал $x\ge 0$ шартын тек $x=3$ қанағаттандырады.

Сондықтан бұл теңдеудің шешімі 3 және -3.

$|f(x)|=\varphi(x)$ типтегі теңдеуді шешу де екі аралас жүйеге жіктелу әдісімен шешіледі. Яғни,

$$\begin{cases} f(x)=\varphi(x) \\ \varphi(x)\ge 0 \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} f(x)=-\varphi(x) \\ \varphi(x)\ge 0 \end{cases}$$

4. $|2x-5|=x-1$ теңдеуін шешейік.

$\begin{cases} 2x-5=x-1, \\ x-1\ge 0 \end{cases}$ және $\begin{cases} 2x-5=1-x, \\ x-1\ge 0 \end{cases}$ бұдан $\begin{cases} x=4, \\ x\ge 1 \end{cases}$ және $\begin{cases} x=2 \\ x\ge 1. \end{cases}$

Сонымен, берілген теңдеудің жауабы: 2 және 4.

5. $\left|\frac{x}{2}-\frac{5}{4}\right|=x-1$ теңдеуін шешейік.

$\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{5}{4}=x-1, \\ x-1\ge 0 \end{cases}$ және $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{5}{4}=1-x, \\ x-1\ge 0 \end{cases}$ Бұдан, $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}, \\ x\ge 1 \end{cases}$ және $\begin{cases} x=\frac{3}{2}, \\ x\ge 1. \end{cases}$ Жауабы: $x=\frac{3}{2}$.

6. $|2x-5|=2-x$ теңдеуін шешейік.

$\begin{cases} 2x-5=2-x, \\ 2-x\ge 0 \end{cases}$ және $\begin{cases} 2x-5=x-2, \\ 2-x\ge 0 \end{cases}$ Бұдан, $\begin{cases} x=2\frac{1}{3}, \\ x\le 2 \end{cases}$ және $\begin{cases} x=3, \\ x\le 2 \end{cases}$ Ж/ы: шешімі жоқ.

7. $|2x-x^2-1|=2x-x^2-1$ теңдеуді шешейік.

$$\begin{cases} 2x - x^2 - 1 = 2x - x^2 - 1 \\ 2x - x^2 - 1 \ge 0 \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} 2x - x^2 - 1 = x^2 - 2x + 1, \\ 2x - x^2 - 1 \ge 0 \end{cases}$$

Бұдан, $\begin{cases} x - кез\ келгенсан \\ (x-1)^2 \le 0 \end{cases}$ және $\begin{cases} x = 1, \\ x = 1. \end{cases}$ Жауабы: $x = 1$.

5.Модуль таңбасымен берілген теңсіздіктерді шешу.

Енді модуль таңбалары бар теңсіздіктерді шешу әдістеріне тоқталайық.

Теңсіздіктерде айнымалы немесе айнымалының функциясы абсолют шама белгісі астында тұруы мүмкін. Мұндай теңсіздіктерді *модуль таңбасы бар теңсіздіктер* деп атайды.

Теңсіздіктерді шешу әдістері теңдеулерді шешу әдістеріне ұқсас келеді. Теңсіздіктерді шешудің мынадай әдістері:

I. Абсолют шаманың анықтамасы бойынша модульді ашу әдісі;

II. Аралықтарға бөлу әдісі;

III. Дайын формуладан пайдаланып, теңсіздікті шешу әдісі.

I. Абсолют шаманың анықтамасы бойынша модульді ашу әдісі;

1. $|f(x)| < a$, егер $a > 0$ болса, онда теңсіздік мына түрде шешіледі $-a < f(x) < a$;
2. $|f(x)| < a$, егер $a \le 0$ болса, онда шешімі болмайды;
3. $|f(x)| > a$, егер $a > 0$ болса, онда мына екі теңсіздікке тең болады: $f(x) > a$ және $f(x) < -a$;
4. $|f(x)| > a$, мұнда $a \le 0$, $f(x)$ функциясының анықталу облысындағы x-тің барлық мәндерінде орынды;
5. $|f(x)| > \varphi(x)$ теңсіздігі мына екі теңсіздікке жіктелуіне тең болады: $f(x) > \varphi(x)$ және $f(x) < -\varphi(x)$;
6. $|f(x)| < \varphi(x)$ теңсіздігі мына теңсіздіктердің жіктелуіне тең болады: $f(x) < \varphi(x)$ және $f(x) > -\varphi(x)$.

Мысалдар.

1. $|2x - 5| < 7$ теңсіздігін шешу керек.

$-7 < 2x - 5 < 7$, бұдан $-2 < 2x < 12$ немесе $-1 < x < 6$.

Тексеру: $x = -1$ болғанда $|2(-1) - 5| \equiv 7$ және $x = 6$ болғанда $|2 \cdot 6 - 5| \equiv 7$.

$x_1 = 0$ болғанда, $-1 < 0 < 6$ болғандықтан, $|2 \cdot 0 - 5| = 5 < 7$ (қанағаттандырады).

Жауабы: $-1 < x < 6$.

2. $|3x - 5| > 10$ теңсіздігін шешу керек.

Мынадай теңсіздіктер жиынтығын аламыз:

$$\left[\begin{array}{l} 3x - 5 > 10, \\ 3x - 5 < -10 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x > 15, \\ 3x < -5 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x < -\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$$

Жауабы: $x < -\dfrac{5}{3}$ және $x > 5$.