6-лекция

Сандық тізбек және прогрнессиялар тақырыбиен оқып-үйрену

Жоспары:

1. Сан тізбегі.
2. Арифметикалық прогрессия
3. Геометриялық прогрессия.

Әдебиеттер:

1. Рахымбек Д. **А**рифметика, алгебра, анализ бастамаларын оқыту әдістемесі. /Оқулық/ - Шымкент: М. Әуезов атындағы ОҚМУ баспа орталығы 2016. – 432 б
2. Елубаев С. Математиканы оқыту әдістемесі. – Алматы; Эверо, 2016
3. Мектеп оқулықтары
4. Мұғалімге арналған оқу-әдістемелік құралдар

1.Сан тізбегі тізбектің берілу тәсілдері. Рекуренттік формула.

Орта мектепте прогрессиялар - тізбек ұғымына байланысты оқытылады.

Анықтама. Белгілі бір заңмен немесе ережемен бірінен соң бірі келіп отыратын сандардың жиынын *сан тізбегі* деп атайды.

Мысалы:

$1, 2, 3, ..., n, ...$ (натурал сандар тізбегі);

$2, 4, 6, ..., 2n, ...$ (жұп сандар тізбегі);

$1, 3, 5, ..., 2n+1, ...$ (тақ сандар тізбегі);

$2, 3, 5, 7, 11, 13, ...$ (жай сандар тізбегі).

Тізбекті құратын әрбір санды оның *мүшелері* делінеді. Сан тізбегі математикада жалпы түрде былайша жазылады: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ (1) a_n-ді (1) тізбектің жалпы мүшесі деп атайды. Бұдан кейін өспелі және кемімелі тізбектер және тізбектің берілу тәсілдері қарастырылады.

Тізбек көбінесе тізбектің n-ші мүшесінің формуласы арқылы беріледі. Мысалы, жұп оң сандардың тізбегі a_n=2n.

Тізбек кейде *рекурренттік тәсілмен* берілуі мүмкін.

Тізбектің қандай да бір мүшесінен бастап, кез келген мүшесін алдыңғы мүшелері арқылы өрнектейтін формуланы *рекурренттік формула* деп атайды (латынның *recurro*- қайта оралу деген сөзінен шыққан).

Мысалы: $a_1=3$, $a_{n+1}=a_n^2$.

Бұл тізбектің мүшелерін былайша жазып көрсетуге болады: 3, 9, 81, ..., ...

Бұдан кейінгі сабақта арифметикалық прогрессияның анықтамасы беріледі.

2. Арифметикалық прогрессия

Анықтама. Екінші мүшесінен бастап әрбір мүшесі өзінің алдындағы мүшеге бірдей санды қосқанға тең болатын тізбек *арифметикалық тізбек* деп аталады.

Басқаша айтқанда кез келген натурал n сан үшін $a_{n+1}=a_n+d$ (мұндағы d - қандай да бір сан) шарты орындалса, онда (a_n) тізбегі ***арифметикалық прогрессия*** болады.

$d=a_{n+1}—a_n$-ны арифметикалық прогрессияның *айырмасы* деп атайды. d>0 болғанда арифметикалық прогрессияны өспелі, ал d<0 болғанда арифметикалық прогрессияны кемімелі деп атайды. Арифметикалық прогрессияны былайша белгілейді:

$a_1, a_2, ..., a_n, ...$ немесе $a_{n+1}=a_n+d$.

Арифметикалық прогрессияның анықтамасы бойынша

a_1,

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Демек, арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласы мынаған тең: $a_n=a_1+d(n-1)$

Бұл формуланың дұрыстығы математикалық индукция әдісімен дәлелденіледі.

Арифметикалық прогрессияның *n*-ші мүшесінің $a_n = a_1 + d(n-1)$ формуласын басқаша $a_n = dn + (a_1 - d)$ түрінде жазуға болады. Бұдан кез келген арифметикалық прогрессияны $a_n = kn + b$ (мұндағы *k* мен *b*-қандай да бір сандар) түріндегі формуламен беруге болады.

Керісінше де тура болады: $a_n = kn + b$ түріндегі формуламен берілген (a_n) тізбегі арифметикалық прогрессия болып табылады (мұндағы *k* мен *b*-қандай да бір сандар).

Сондықтан да арифметикалық прогрессияны натурал сандар жиынында анықталған функция деп қарастыруға болады.

Арифметикалық прогрессияға ғана тән қасиет былайша дәлелденіледі:

Арифметикалық прогрессияның анықтамасы бойынша $a_{n+1} = a_n + d,\ a_{n-1} = a_n - d$

бұдан $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\quad n > 1.$ Сонымен, арифметикалық прогрессияның екінші мүшесінен бастап әрбір мүшесі оның екі көршілес тұрған мүшелерінің *арифметикалық ортасы* болып табылады. Егер арифметикалық прогрессияның бірінші мүшесі мен айырымы a_1 және d белгілі болса, онда оның қалған мүшелерін $a_{n+1} = a_n + d$ рекурренттік формуласы арқылы шығарып алуға болады.

Арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы мына формуламен анықталады: $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$ (1) Бұл формуланы *арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесінің формуласы* дейді. $a_n=a_1+d(n-1)$ болатындықтан, (1) формуланы мына түрде жазуға болады: $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$ (2)

3. Геометриялық прогрессияны оқыту

Анықтама. Екіншісінен бастап әрбір мүшесі өзінің алдындағы көршілес мүшені бірдей санға көбейткенде шыққан нөлден өзгеше сандардың тізбегі *геометриялық прогрессия* деп аталады.

Басқаша айтқанда, кез келген натурал *n* үшін $b_n \neq 0$ және $b_{n+1} = b_n \cdot q$ (мұндағы *q*-қандай да бір сан) шарттары орындалса, (b_n) тізбегі *геометриялық прогрессия* болады.

$q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ санын *геометриялық прогрессияның еселігі* деп атайды.

Индукция әдісімен геометриялық прогрессияның n-ші мүшесінің мына формуламен анықталатындығы көрсетіледі.

$$b_2 = b_1 \cdot q,$$
$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2,$$
$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Бұл формуланың дұрыстығы математикалық индукция әдісімен дәлелденеді.

$|q| > 1$ болғанда геометриялық прогрессияны *өспелі*, ал $|q| < 1$ болғанда геометриялық прогрессияны *кемімелі* деп атайды.

Геометриялық прогрессияға ғана тән қасиет былайша дәлелденіледі: геометриялық прогрессияның анықтамасы бойынша $b_{n+1} = b_n \cdot q, \;\; b_{n-1} = \dfrac{b_n}{q}$, бұдан $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \; n > 1.$

Егер геометриялық прогрессияның мүшелері оң болса, онда $b_n = \sqrt{b_n \cdot b_{n+1}}$ екінші мүшесінен бастап геометриялық прогрессияның әрбір мүшесі көршілес екі мүшесінің *геометриялық ортасына* тең болады.

Геометриялық прогрессияны былайша белгілейді:

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots, \qquad \frac{b_{n+1}}{b_n} = q\ .$$

(b_n) геометриялық прогрессия берілген болсын. Оның алғашқы n мүшесінің қосындысын S_n арқылы өрнектейміз:

$S_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}+b_n$ (1)

Бұл теңдіктің екі бөлігін де q-ге көбейтеміз:

$S_n \cdot q=b_1 \cdot q +b_2 \cdot q +b_3 \cdot q +\ldots+b_{n-1} \cdot q +b_n \cdot q$

Егер

$b_1 \cdot q= b_2, b_2 \cdot q= b_3, \ldots, b_{n-1} \cdot q=b_n$

екенін ескерсек:

$S_n \cdot q=b_2+b_3+\ldots+b_n+b_n \cdot q$ (2)

(2) теңдіктен (1) теңдікті мүшелеп шегеріп, ұқсас мүшелерді біріктірейік:

$S_n \cdot q-S_n=(b_2+b_3+\ldots+b_n+b_n \cdot q)-(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}+b_n)=b_n \cdot q-b_1$

Енді $q \neq 1$ дейік. Онда

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1} = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} \qquad (3)$$

формуласы келіп шығады.

$|q| < 1$ болғанда шектеусіз геометриялық прогрессияның қосындысы былайша анықталады:

Прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласын жазамыз:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} = \frac{b_1 \cdot q^n - b_1}{q-1} = \frac{b_1 - b_1 \cdot q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1 \cdot q^n}{1-q} \qquad (4)$$

Егер $|q|<1$ болса, онда $n\to\infty$ да $q^n\to 0$, сондықтан $n\to\infty$ да $\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n\to 0.$ (4) формуланың бірінші қосылғышы *n*-ге тәуелсіз. Демек, $n\to\infty$ да, $S_n=\frac{b_1}{1-q}$-қа ұмтылады.

Сонымен, *шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы* мына формуламен анықталады: $S=\frac{b_1}{1-q}$ (5)

Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының формуласын ондық бөлшектерді жай бөлшектерге айналдыруда қолдануға болады.

0,(5) таза периодты ондық бөлшегін мына түрде жазуға болатындығы белгілі:

$$0,(5)=0,555...=\frac{5}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{10^3}+...+\frac{5}{10^n}+...=0,5+0,05+0,005+...$$

мұны бірінші мүшесі $a_1=\frac{5}{10}$-ке, ал еселігі $q=\frac{1}{10}$-ге тең шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы деп қарастыруға болады: Бұдан

$$0,(5)=0,5+0,555...=0,5+0,005+...=\frac{5}{10}+\frac{5}{10^2}+...+\frac{5}{10^n}+...=\frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{5}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{5}{9}$$

Енді біз периодында k цифр бар мына таза периодты $0,(m_1\, m_2\, \dots\, m_k)$ ондық бөлшекті жай бөлшекке айналдырайық. Ол үшін оны мына түрде жазамыз:

$$0,(m_1m_2...m_k)=\frac{m_1m_2...m_k}{10^k}+\frac{m_1m_2...m_k}{10^{2k}}+...+\frac{m_1m_2...m_k}{10^{nk}}$$

Осы теңдіктің оң жағында тұрған өрнекті $a_1=\frac{m_1m_2...m_k}{10^k}$, ал еселік $q=\frac{1}{10^k}$-не тең шексіз кемімелі геометриялық прогрессия деп қарастыруға болады.

Сондықтан $0,(m_1m_2...m_k)=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{m_1m_2...m_k}{10^k}}{1-\frac{1}{10^k}}=\frac{m_1m_2...m_k}{10^k-1}$ немесе

$10^k-1=999...9$ екендігін ескерсек, $0,(m_1m_2...m_k)=\frac{m_1m_2...m_k}{999...99}$ болады.

Демек, таза периодты ондық бөлшек, алымы ондық бөлшектің периодына, ал бөлімі ондық бөлшектің периодындағы қанша цифр болса, сонша тоғыздықтан құралған санға тең болатын жай бөлшекке тең болады.

Енді біз аралас периодты ондық бөлшекті жай бөлшекке айналдырайық.

Айталық, бізге периодында *k* цифры, ал периодына дейін *l*цифры бар аралас периодты мынадай $0,m_1\,m_2...m_l\,(p_1\,p_2\,...p_k)$ ондық бөлішекті жай бөлшекке айналдыру қажет болсын. Сонда

$$0,m_1m_2\ldots m_l(p_1\,p_2\ldots p_k)=\frac{m_1m_2\ldots m_l}{10^l}+\frac{p_1p_2\ldots p_k}{10^{l+k}}+\frac{p_1p_2\ldots p_k}{10^{l+2k}}+\ldots+\frac{p_1p_2\ldots p_k}{10^{l+nk}}+\ldots$$

Бұл теңдіктің оң жағында тұрған екінші мүшесінен бастап, бірінші мүшесі

$$0,m_1m_2\ldots m_l\ (p_1\,p_2\ldots p_k)=\frac{m_1m_2\ldots m_l}{10^l}+\frac{\frac{p_1\,p_2\ldots p_k}{10^{l+k}}}{1-\frac{1}{10^k}}=\frac{m_1m_2\ldots m_l}{10^l}+$$

$$+\frac{p_1\,p_2\ldots p_k\cdot 10^k}{10^{l+k}\cdot(10^k-1)}=\frac{m_1m_2\ldots m_l}{10^l}+\frac{p_1\,p_2\ldots p_k}{10^l\cdot(10^k-1)}=$$

$a_1=\dfrac{m_1\,m_2\ldots m_l}{10^{lk}}$-не, еселігі $q=\dfrac{1}{10^k}$-не тең шексіз кемімелі геометриялық прогрессия болатындықтан

$$=\frac{m_1m_2\ldots m_l\cdot 10^k+p_1\,p_2\ldots p_k-m_1m_2\ldots m_l}{10^l\cdot(10^k-1)}=$$

$$=\frac{m_1m_2\ldots m_l\ p_1\,p_2\ldots p_k-m_1m_2\ldots m_l}{\underbrace{999\ldots99}_{k\text{ цифр}}\ \underbrace{000\ldots00}_{l\text{ цифр}}}.$$

Демек, аралас периодты ондық бөлшек алымы – периоды алынған санмен периодына дейінгі санның айырымына, ал бөлімі – периодында қанша цифр болса, сонша тоғыздықтарға, ал үтір мен периодтың арасында қанша цифр болса, сонша нөлдерді тіркестіріп жазған санға тең жай бөлшекке тең болады. Мысалы

$$0{,}15(3)=\frac{153-15}{900}=\frac{138}{900}=\frac{69}{450}=\frac{23}{150}.$$

Координаталық жазықтықтық жүйедегі теңсіздіктердің жиындары кескінделетін аралықтары өзара қиылыспайды (ортақ нүктелері жоқ). Мұндай теңсіздіктер жүйесінің шешімдері бос жиын.

Жауабы: ∅.