8-Лекция.

Сан тізбегінің және функцияның шегі. Туындыны оқыту әдістемесі.

Жоспары:

1. Шектер туралы қысқаша шолу. Шек ұғымын мектепте оқыту туралы
2. Сан тізбегі және оның шегі. Функцияның нүктедегі шегі
3. Функцияның үзіліссіздігі ұғымын мектепте оқыту. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің анықтамасын түсіну үшін қайталанатын материалдар
4. Туындының анықтамасы және оның геометриялық мағынасы. Функцияның туындысын табу. Туынды табу ережелері.
5. Функцияның өсуі мен кемуі. Функцияның максимумы мен минимумы
6. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері.Функцияны зерттеп, графигін салу

Математикалық талдау курсында шектің анықтамасын былайша тұжырымдап беру қабылданған:

Анықтама. Егер де кез келген оң ε саны үшін $\delta > 0$ саны табылып, $0 < |x-a| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x)-b| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатын болса, онда b саны f функциясының a нүктесіндегі **шегі** деп аталады.

Бұдан кейін функцияның нүктедегі оң жақтама және сол жақтама шектерінің анықтамасы қарастырылады.

Анықтама. Егер алдын ала берілген $\varepsilon>0$ санына сәйкес $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, келесі

$$x_0 - \delta < x < x_0$$

теңсіздіктерді қанағаттандыратын барлық x-тер үшін мына теңсіздік $|f(x) - B| < \varepsilon$

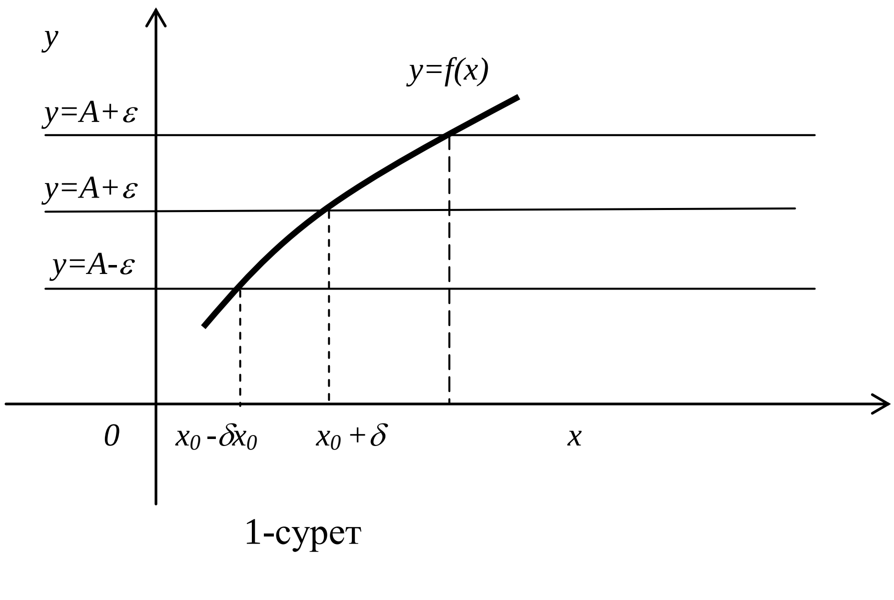
орындалса, онда B санын $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі *сол жақтама шегі* деп атайды және мұны былай жазады: $B = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$.

Анықтама. Берілген оң ε санына сәйкес $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, мына

$$x_0 < x < x_0 + \delta$$

теңсіздіктерді қанағаттандыратын барлық x-тер үшін келесі теңсіздік $|f(x) - C| < \varepsilon$

орындалса, онда C санын $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі *оң жақтама шегі* деп атайды және мұны былай жазады: $C = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$.



1-сурет

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ бар болу үшін, *f(x) ф*ункциясының x_0 нүктесіндегі оңжақтама және сол жақтама шектерінің бар болуы және олардың өзара тең болуы *қажетті* және *жеткілікті* екені дәлелдеп көрсетіледі.

Бұдан кейін функцияның нүктедегі шегінің геометриялық мәні қарастырылады.

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

Егер $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ болатын болса, онда $y = A - \varepsilon, \;\; y = A + \varepsilon$ түзулері бір-біріне қаншалықты жақын болатын болса да, x_0нүктесінің сондай бір δмаңайы табылып, $(x_0 - \delta; \;\; x_0 + \delta)$ аралығында жатқан функция мәндері $(A - \varepsilon; \, A + \varepsilon)$ аралығында болады.

Одан кейін нүктедегі шегі бар функцияның негізгі қасиеттері қарастырылады.

1-теорема.Егер f және g функцияларының a нүктесінде шектері бар болса, онда осы функциялардың қосындысы мен көбейтіндісінің a нүктесінде шектері бар болады және

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

2-теорема.Егерf жәнеgфункцияларының aнүктесіндешектері барболсажәнеgфункциясының шегі нөлденөзгешеболса, ондасолнүктеде $\dfrac{f}{g}$ бөліндінің шегі барболадыжәне

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

Қазіргі кезде қолданылып жүрген А.Н.Колмогоров оқулығында “Туынды және және оның қолданылуы" деп аталатын тақырыпта функцияның үздіксіздігі және шекке көшу туралы түсінік беріледі. Математикалық талдаудағы аса маңызды функцияның нүктедегі шегі мен үздіксіздігі тек индуктивті түрде енгізіледі.

А.Н. Колмогоров оқулығында функцияның нүктедегі шегі ұғымы былайша баяндалатын. Алдымен функцияның нүктедегі шегі туралы түсінік беріледі. Функцияның нүктедегі шегі туралы ұғыммен окушылар физика курсында лездік жылдамдықты анықтағанда кездестіргені еске түсіріледі. Мысал ретінде дененің еркін түсуі қарастырылады:жол S, уақыт t-нің функциясы ретінде $S = \dfrac{gt^2}{2}$ формуласымен беріледі. Қандай да бір t_0 уақыт мезетін таңдап алайық және t_0мезеттен t=t_0+Δt мезетке дейінгі Δt уақыт аралығын қарастырайық. Осы уақыт аралығында дене мынадай жол жүреді:

$$\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0) = \frac{g}{2}((t_0 + \Delta t)^2 - t_0^2) = gt_0 \Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2 .$$

Физикада $\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = gt_0 + \dfrac{g}{2}\Delta t$ қатынасыдененің $[t_0; \, t_0 + \Delta t]$ уақыт аралығындағы орташа жылдамдығы деп аталады.

t_0 -тұрақтыболғандабұлорташажылдамдық Δt -нің функциясыболады: $v_{op}(\Delta t) = gt_0 + \dfrac{g}{2} \cdot \Delta t$ (1)

Δtазшамаболғандаорташажылдамдықтың gt_0 -денайырмашылығыөтеазболатынын (1) формуладанкөреміз.

Мысалы, нөлгежуықтайтынқандайдабірΔtуақытаралықтарындаt_0=2 болғанда

$$v_{op}(\Delta t) = 2g + \frac{g}{2} \cdot \Delta t$$

мәндері мына кестемен беріледі (оңай білу үшін g=9,8 деп есептейміз):

t		1	01	001
p	4,5	),09	),649	),6049

бұдан, егер Δt нөлге неғұрлым жуық мәндерді қабылдайтын болса, онда v_{op}-ніңсәйкес мәндері $v_0 = gt_0 = 19{,}6000$ мәнге жуықтайтыны айқын көрінеді.

Мұны басқаша айтуға болады: Δt нөлге ұмтылғанда v_{op}жылдамдық v_oшекке ұмтылады, оны t_0 уақыт мезетіндегі “*лездік”жылдамдық*деп есептейді. Былайша жазу қабылданған: $v_0 = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{op}(\Delta t)$.

Бұдан кейін тағы да бір мысал қарастырылады.

Өлшеулер жүргізіп, қабырғасының ұзындығы a-ғатең квадрат пластинканың p периметрін берілген ε дәлдікпен (ε- оң сан) табу керек болсын. Ол үшін пластинканың қабырғасыныңұзындығын $\frac{\varepsilon}{4}$ дәлдікпен өлшеу жеткілікті болады. Шынында, егер x - біздің өлшеулеріміздің нәтижесі және $|x - a| < \frac{\varepsilon}{4}$ болса, онда былай болады: $|4x - 4a| < \varepsilon$. Ал p=4a болғандықтан, соңғы теңсіздік $4x \approx p$ болатындығын көрсетеді.

Сонымен, кез келген ε>0 үшін барлық x мәндеріa-ға жеткілікті жуық болғанда (дәлірегі, x мынадай теңсіздікті қанағаттандырғанда: $|x - a| < \frac{\varepsilon}{4}$)$f(x)$=4$x$функциясының мәндерінің $p=4a$ санынан айырмашылығы ε-нан кіші болады. Шыққан нәтижені былайша тұжырымдаған орынды: $f(x)$=4x функциясының x-тің a-ға ұмтылғандағы шегі 4a-ға тең; $\lim\limits_{x \to a} 4x = 4a$.

Бұл жазылу қысқаша түрде былай оқылады: $f(x)=4x$ функциясының aнүктесіндегі шегі $4a$-ға тең.

Жалпы былай айтады: егер $|\Delta x|$ кемігенде (мұндағы $\Delta x = x - x_0$ $f(x) - L$ айырмасы мейлінше аз, яғни $|f(x) - Z|$ кез келген белгілеп көрсетілген ε>0 санынан кем болып шықса, онда x саны x_0-ге ұмтылғанда, f функциясы L санына ұмтылады (x=x_0 мәні лездік жылдамдық анықталатын есептегі сияқты мұнда да қарастырылмайды).

$x \to x_0$ орнына, әрине, $\Delta x \to 0$ деп жазуға болады.

f функциясы бойынша L санын табу *шекке көшу* деп аталады.

Бұдан әрі қарай төмендегі негізгі екі жағдайда шекке көшумен кездесетіндігі айтылады.

Бірінші жағдай, бұл $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ айырмалық қатынасында шекке көшу, яғни туындыны табу.

Екінші жағдай, функцияның үзіліссіздік ұғымымен байланысты. Егер $x \to x_0$ жағдайда $f(x) \to f(x_0)$ болса, онда бұл функцияны x_0 нүктесінде үзіліссіз деп атайды. Мұнда $f(x) - L = f(x) - f(x_0) = \Delta f; |\Delta x|$ аз болғанда $|\Delta f|$ те аз болатыны, яғни x_0 нүктесіндегі аргументтің аз өзгерулеріне функция мәндерінің де аз өзгертулері сәйкес келетіні шығады.

Нүктедегі шегі бар функциялардың негізгі қасиеттері мынадай ереже бойынша түсіндірілген.

Ереже. $x \to x_0$ кезде *f(x)→A, g(x)→B* болсын. Сонда $x \to x_0$ (яғни $\Delta x \to 0$) кезде:

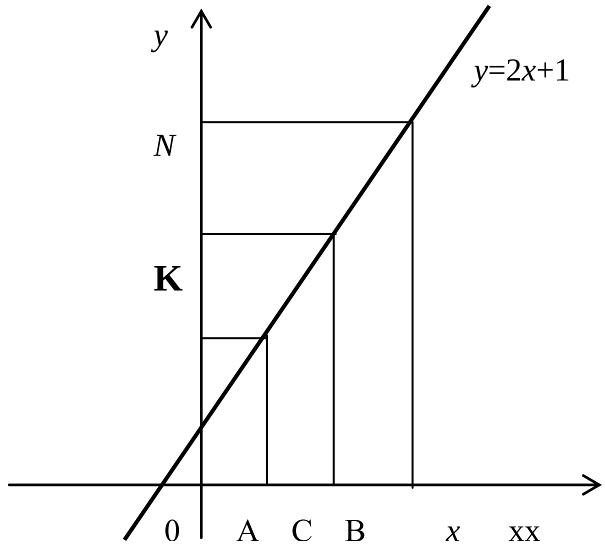
а) *f(x)+g(x)→A+B;*

б) *f(x)·g(x)→A·B;*

в) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$ ($B \neq 0$ болғанда)

Шекке көшу ережелері функциялардың үзіліссіздігін дәлелдегенде және дифференциалдау формулаларын қорытып шығарған кезде кең қолданылады.

Математиканы тереңдетіп оқытатын сыныптар мен мектептерде функцияның нүктедегі шегі ұғымының анықтамасын беру үшін мынадай нақтылы мысалдан бастауға болады.



2-сурет

$y = f(x) = 2x+1$ функциясын және оның графигін қарастырайық.

x аргументтің 1-ге тең мәнін алсақ, оған сәйкес келетін функцияның мәні 3 болады. Бұлар 2-суретте*C* және *K* нүктелерімен кескінделіп көрсетілген.

3-тің ε>0 маңайында, яғни функцияның (3-ε;3+ε) аралығында жатқан мәндерін қарастырайық. *MK=KN=*ε*,* ал (3-ε;3+ε) аралығы *Oy* өсінің *M* және *N* нүктелерінің аралығында жатқан нүктелерінің жиынымен өрнектелген. Демек, осы аралықта жатқан функцияның мәндері үшін

$$|3-f(x)|<\varepsilon \qquad (1)$$

теңсіздігі орындалады. Енді тәуелсіз айнымалы *x*-тің қандай мәндерінде *f(x)*=2*x*+1 функциясының мәндері (3-ε;3+ε) аралығында жатады немесе бәрібір (1) теңсіздік орындалады? –деген сұрақ туады. Ол үшін *Oy* өсіндегі проекциялары *M* және *N* болатын, берілген функцияның графигінде жатқан *D* және *F* нүктелерін *Ox* өсіне проекцияласақ, *A* және *B* нүктелерін аламыз. Әрине, *AC=CB,AC=CB=*δ (δ>0) деп белгілесек, *A* және*B* нүктелерінің аралығында жатқан немесе

$$|x-1|<\delta \qquad (2)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын барлық *x*-тер үшін (1) теңсіздік орындалады. Сонымен, (2) теңсіздік аргумент *x*-тің (1) теңсіздікті қанағаттандыратын жеткілікті шарты болады.

Мұндағы δ саны ε-ға байланысты болып отырады. Шынында да*A* нүктесінің орны *D*-нің орнына, ал *D*-нің орны *M* нүктесінің орнына, *M* нүктесінің орны *MK* кесіндісінің ұзындығына, ε-ға байланысты болады. *A* нүктесінің орыны δ санымен де анықталады. Олай болса, δ саны ε-ға байланысты болады, яғни$\delta=\delta(\varepsilon)$.

Аргумент *x*-тің (1) теңсіздік орындалатын мәндерінің жиынын суретті пайдаланбай да табуға болады. Ол үшін алдын алаε>0 санын алып, (1) теңсіздікті біртіндеп түрлендірелік. Сонда:

$$|3-(2x+1)|<\varepsilon, \quad |-2(x-1)|<\varepsilon, \quad |x-1|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3)$$

Әрине, (3) теңсіздіктен (1) теңсіздіктің дұрыстығы шығады. Олай болса, (1) теңсіздік орындалуы үшін δ саны ретінде $\dfrac{\varepsilon}{2}$ –ні алса болғаны. Сонымен біз берілген ε>0 санына сәйкес δ>0 саны табылатынын және |*x*-1|<δ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық *x*-тер үшін (1) теңсіздіктің орындалатын көрсеттік. Міне, осы жағдайда 3 санын *f(x)*=2*x*+1 функциясының *x* айнымалысы 1-ге ұмтылғандағы шегі дейді және былай жазады:

$$\lim_{x\to 1}(2x+1)=3.$$

Аргумент x-тің ұмтылған санды a-мен ал $f(x)$ функциясының шегін A-мен белгілесек, онда қарастырылған мысалды негізге алып, функцияның шегінің жалпы анықтамасын былай беруге болады.

Анықтама. Егер берілген кез келген ε>0 саны бойынша δ>0 саны табылып,

$$0<|x-a|<\delta \qquad (4)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x-тер үшін

$$|f(x)-A|<\varepsilon \qquad (5)$$

теңсіздігі орындалатын болса, онда A санын x айнымалы тұрақты a санына ұмтылғандағы, яғни $x \to a$ жағдайдағы, $f(x)$ *функциясының шегі*дейді және оны былай жазады:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A. \qquad (6)$$

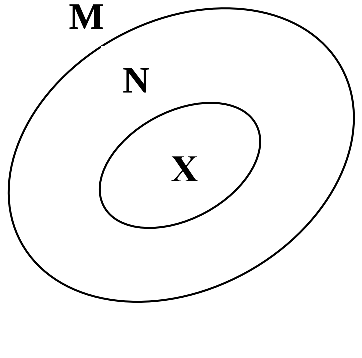
Функцияның нүктедегі шегі ұғымын терең түсінбеу оқушыларға көптеген қиындықтар туғызады. Бұл қиындықтың себебі берілген ұғымның анықтамасын біліп, оны қолдану үшін әртүрлі ұғымдарды: жалпылық кванторы (“кез келген ε>0…”, “барлық x-тер…”), бар болу кванторы (“сондай бір δ>0 табылып…), логикалық салдар, функция ұғымы, сандық аралықтар, $|x-a|<b$ теңсіздігін шешу, олардың шешімін сандық өсте кескіндеу 6-9 сыныптарда оқылған функциялар және олардың графиктерін білу қажет. Бұларды қайталап шығу үшін арнайы сабақ бөлінгені орынды. Мазмұнына қарай бұларды үш топқа бөлуге болады.

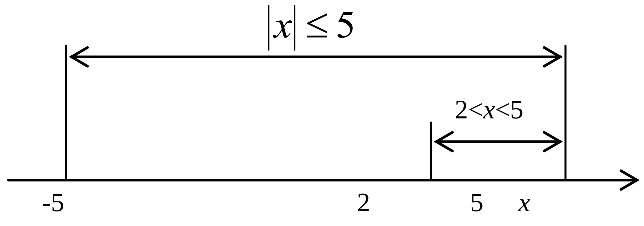
Бірінші топқа $|x-a|<b$, $|x-a|>b$ түріндегі теңсіздіктерді шешу жатады. Бұларды меңгеру үшін төмендегі біліктілік элементтерін қайталап, оларды қарапайым есептерді шешуге қолдана білу қажет.

1) a және bсандарының ара қашықтығы деп $|a-b|$-ны айтады.

2) $|x-a|<b$ теңсіздігінің шешімі a нүктесінен бірдей b қашықтықта жатқан сандық өстегі $(a-b;\ a+b)$ интервалы болады. $|x-a|\le b$, $|x-a|>b$ және $|x-a|\ge b$ теңсіздіктерінің шешімі де осы сияқты қарастырылады.

Екінші топтағы қайталануға тиісті аса маңызды білімге логикалық салдардың шарты мен қорытындысы, теңдеу ұғымы жатады. Алдымен қарапайым мысал келтірейік: мен бөлмеде болатындықтан, мен үйдемін, өйткені бөлме үйдің бір бөлігі болып табылады; менің үйде болатындығымнан менің бөлмеде болатындығым келіп шықпайды, өйткені асбөлмесінде немесе дәлізде болуым мүмкін. Осы жағдайды жалпылап, оны математикалық тілмен жазайық: егер $N \subset M$ (3-сурет) болса, онда $x \in N \Rightarrow x \in M$ болады. Мысалы, 2<x<5 теңсіздігінің шешімі (2; 5) интервалы болады, ал $|x| \le 5$ теңсіздігінің шешімдері [-5;5] кесіндісі болады (4-сурет).





3-сурет 4-сурет

$(2;5)\in[-5;5]$ болатындықтан, бірінші теңсіздіктің кез келген шешімі, екінші теңсіздіктің де шешімі болады. Бұл айнымалы x-тің кез келген мәнінде тура болатын бірінші теңсіздіктің айнымалының сондай мәндері үшін екінші теңсіздіктің де дұрыс болатынын көрсетеді. Олай болса, $2<x<5$ теңсіздігінен $|x|<5$ теңсіздігі келіп шығады.

Жалпы алғанда, егер бір теңсіздіктің шешімдерінің жиыны екінші теңсіздіктің шешімдерінің ішкі жиыны болса, онда бірінші теңсіздіктен екінші теңсіздік келіп шығады. Теңдеулер үшін осы сияқты.

Мысалдар қарастырайық.

1-мысал. x^2-5x+6=0 теңдеуінің шешімдерінің жиыны {2;3}. Ал (x^2-4)•(x^2-9)=0 теңдеуінің шешімдерінің жиыны мынаған тең: {2;-2;3;-3}. {2;3}⊂{2;-2;3;-3} болатындықтан, x^2-5x+6=0 теңдеуінен (x^2-4)•(x^2-9)=0 теңдеуі келіп шығады.

Қайталануға тиісті аса маңызды ***үшінші топқа*** бұрын өтілген, мынадай функциялардың графиктерін $y=kx,\ y=kx+b,\ y=\dfrac{k}{x}\ y=ax^2,\ y=ax^3$ қайталау жатады. Функцияның нүктедегі шегі ұғымын өтудің алдындағы дайындық сабақтарына әртүрлі анықталу облыстарында түрліше функциялармен берілген функциялардың графигін салуды қарастырған тиімді. Мұндай есептерді қарастыру және олардың графиктерін салу функцияның нүктедегі шегін, үзілісіздігін, үзілістілігін, туындысын көрнекі түсінуге мүмкіндік береді. Төменде формуланың оң жағында әр түрлі тәсілмен анықталған функциялардың графиктерін көрнекі түрде кескіндейтін кейбір ерекше қасиеттері келтірілген. Бұл математикалық талдаудың әртүрлі ұғымдарын иллюстрациялауда қажет.

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ егер } x>0,\\ 0, \text{ егер } x=0,\\ -1, \text{ егер } x<0.\end{cases}$$

x_0=0 нүктесінде функция анықталған, бірақ бұл нүктеде шегі жоқ, сондықтан функция бұл нүктеде үзілісті.

$\varphi(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{x-2}$. x_0=2 нүктесінде бұл функцияның шегі бар, бірақ бұл нүктеде функция анықталмаған.

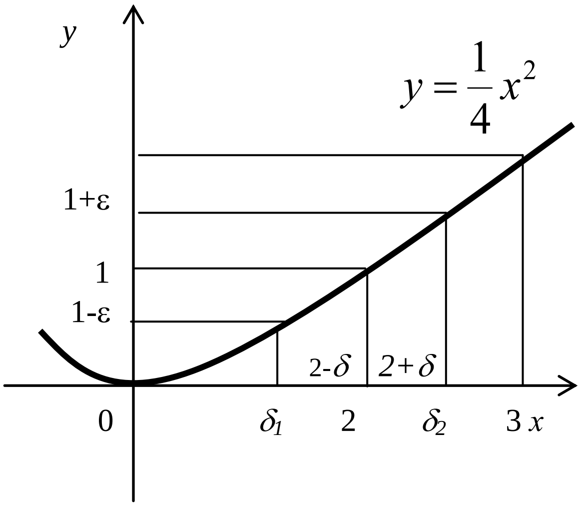
$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2x^2}{x-2}, \text{ егер } x\neq 2,\\ 0, \text{ егер } x=2.\end{cases}$ функция x_0=2 нүктесінде анықталған, шегі бар, бірақ бұл шек функцияның осы нүктедегі мәніне тең емес.

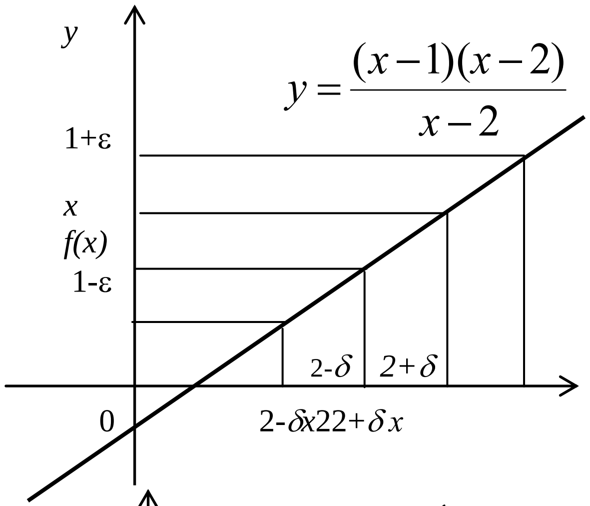
Жаңа материалды түсіндіру, баяндау мынадай үш бөліктен тұрады: функцияның нүктедегі шегі түсінігін көрнекі қалыптастыру; функцияның нүктедегі шегінің анықтамасы; жаңа білімдерді қолдану. Осы бөліктердің әрқайсысының мазмұнына толығырақ тоқталайық.

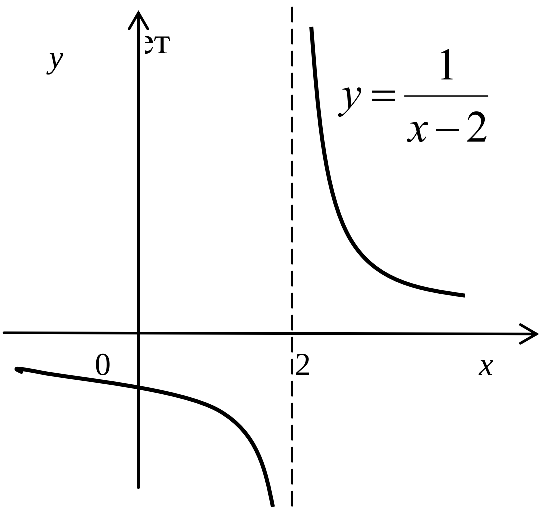
I. Функцияның нүктедегі шегін көрнекі түрде қалыптастыру. 8-11-суреттерде келтірілген функция графиктерін қарастырайық:

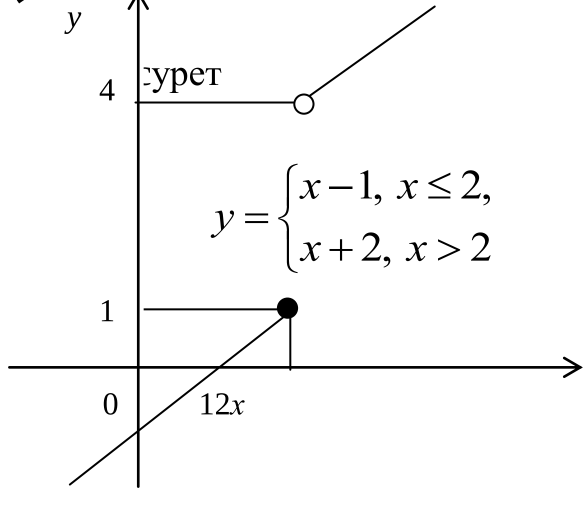
Функциялардың графиктерінің әрқайсысын x_0=2 нүктесінің маңайымен салыстырайық. Айнымалы x-тің мәндері 2 санына жақындаған сайын $y=\dfrac{1}{4}x^2$ функциясының мәндері 1 санына мейлінше жақындай түседі. "$y=\dfrac{1}{4}x^2$ функциясының мәндері 1 санына мейлінше жақындай түседі?" деген нені білдіреді. Бұл сөз 1 саны мен *f(x)* функциясының ара қашықтығы $|f(x)-1|$ алдын ала берілген оң ε>0 санынан мейлінше кіші болатындығын көрсетеді. Мысалы, үшін ε=0,5 деп алайық: Айнымалы x-тің қандай мәндері үшін $|f(x)-1|<\varepsilon$ болатындығын анықтайық. 8-суреттен бұл шарттың

$(2-\delta_1; 2+\delta_2)$ интервалында жатқан x-тің барлық мәндері үшін орындалатындығын айқын түрде көруге болады. Жалпы айтқанда x_0=2 нүктесі бұл интервалдың ортасы емес. Бірақ δ санын δ_1 мен δ_2 сандарының ең кішісіне тең етіп алсақ, онда x_0=2 нүктесіне қарағанда симметриялы $(2-\delta;\ 2+\delta)$ аралығы шығады. Егер ε=0,5 болса, онда мұндай интервалдың $(2-0{,}4;\ 2+0{,}4)$, яғни (1,6; 2,4) болатындығын оңай есептеп шығаруға болады.









10-сурет

11-сурет

Сөйтіп, ε=0,5 үшін ортасы x_0=2 болатын интервал табылып, осы аралықта жатқан x-тің кез келген мәндеріне сәйкес келетін функция мәндерін 1 мен салыстырғанда ε-нан кіші болады. Бұл айтылғанды логикалық салдар арқылы былайша жазуға болады; $x \in (1{,}6;\ 2{,}4) \Rightarrow |\, f(x)-1 \,| < \varepsilon,$ (1,6; 2,4) интервалы $|x-2| < 0{,}4$ теңсіздігі шешімдерінің жиыны болып табылады. Сондықтан соңғы ұйғарымды былайша тұжырымдауға болады: ε=0,5 үшін $|x-2| < 0{,}4 \Rightarrow |\, f(x)-1 \,| < \varepsilon$.

Біздің пайымдауларымыз ε-нің нақты мәндерін алуға байланысты емес. Егер ε=0,5 үшін ε=0,001 немесе ε=2-ні алсақ, онда сондай тәсілмен центрі x_0=2 нүктесі болатын $(2-\delta;\ 2+\delta)$ интервалын табуға болады. Сонымен, әрбір алдын ала берілген ε>0 үшін сондай бір δ >0 саны табылып, $|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-1)|<\varepsilon$ болады.

Сөйтіп, $y=\frac{1}{4}x^2$ функциясының x_0=2 нүктесініңмаңайында тәртібін былайша жазуға болады: кез келген ε>0 үшін δ>0 саны табылып, $|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-1)|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалады. 1 саны $y=\frac{1}{4}x^2$ функциясының x_0=2 нүктесіндегі шегі деп аталады, оны былай жазады:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{4}x^2=1.$$

Енді $y=\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{x-2}$ функциясын қарастырайық. Бұл функцияның $y=\frac{1}{4}x^2$ функциясынан өзгешелігі сол, ол x_0=2 нүктесінде анықталмаған. Бірақ x_0=2 нүктесінің маңайында бұл екі функцияның тәртібі бірдей: айнымалы x-тің мәндері 2 нүктесіне жақындаған сайын функцияның мәндері 1 санына мейлінше жақындай түседі. ε>0-ді алып, және *oy* өсінен $(1-\varepsilon;1+\varepsilon)$ интервалын алып, *ox*өсінен барлық $x\in(2-\delta;\ 2+\delta)$ және $x\neq 2$үшін $|f(x)-1)|<\varepsilon$ орындалатын $(2-\delta;\ 2+\delta)$ аралығын табамыз (9-сурет). Сөйтіп, кез келген ε>0 үшін δ >0 саны табылып, мына логикалық салдар орындалады: $x\neq 2$және $|x-2|<\delta \Rightarrow \left|\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{x-2}-1\right|<\varepsilon.$

Демек, берілген функцияның x_0=2 нүктесіндегі шегі 1-ге тең: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{x-2}=1.$

Енді $y=\frac{1}{x-2}$ функциясын қарастырайық. x-тің 2 нүктесіне жақындаған сайын (10-сурет) функция мәндері ешқандай санға жақындамайды. $y=\frac{1}{x-2}$ функциясының x_0=2 нүктесінде шегі жоқ.

Ақырында $y=\begin{cases} x-1, & \text{егер } x\le 2,\\ x+2, & \text{егер } x\ge 2\end{cases}$ функциясын қарастырайық.

2 нүктесіне xжақындаған сайын (11-сурет) бұл функцияның мәндері 1 санына да, 3 санына да, *4* санына да, жалпы айтқанда [1;4] кесіндісінде жатқан кез келген санға жақындай түседі. Бірақ бұл сандардың ешқайсына да *f(x)* функциясы жақындай алмайды. Мысалы, үшін 3 санын алайық. x-тің 2 санына жақын жатқан қандай мәндерін алсақ та, *f(x)* функциясының сәйкес мәндері 3-тен 1-ге артық болады. Сондықтан 3 саны берілген функциясының x_0=2 нүктесіндегі шегі болмайды. 4 саны да функцияның шегі емес, өйткені кез келген x<2 үшін $|f(x)-4|>3$ теңсіздігі орындалады. Сөйтіп, берілген функцияның x_0=2 нүктесінде шегі жоқ.

II. Функцияның нүктедегі шегінің анықтамасы $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ болатындығын көрсету үшін мынадай амалдарды орындау қажет:

ε>0-ді таңдап алу;

$x \neq a$ және $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$ орындалатын δ >*0*-ны табу.

III. Функцияның нүктедегі шегі туралы жаңа білімді $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ дұрыстығын дәлелдеуде қолдану.

1-мысал. $\lim\limits_{x \to 1}(2x+3) = 5$ болатынын дәлелдеңдер.

Дәлелдеуі: 1) Кез келген оң сан ε>0 аламыз. 2) $x \neq 1$ және $|x-1| < \delta \Rightarrow |2x+3-5| < \varepsilon$, яғни $|x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$ орындалатын δ >*0*-ны табамыз.

Бұл пікір $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$ болғанда тура болады. Демек, $\lim\limits_{x \to 1}(2x+3) = 5$.

2-мысал.Тұрақты функцияның кез келген *a* нүктесіндегі шегі сол тұрақтының өзіне тең екенін, яғни $\lim\limits_{x \to a} C = C$ дәлелдейік.

Дәлелдеуі:

1)ε>0 аламыз.

2)$(x \neq a, |x-a| < \delta) \Rightarrow |C-C| < \varepsilon$,яғни ε>0 орындалатын δ >0-ны табамыз. Берілген пікір кез келген δ >0 үшін дұрыс. Демек, $\lim\limits_{x \to a} C = C.$

Функцияның нүктедегі үзіліссіздігі. Функцияның үзіліссіздігі математикалық талдауда аса маңызды орын алады. Функцияның үзілістілігінің математикада бірнеше түрлі анықтамалары бар.

1. $(a;b)$ аралығында анықталған *f(x)* функциясын қарастырайық. x_0 - осы аралықтан алынған нүкте. Бұл нүктеде *f(x)* функциясы анықталған, яғни $f(x_0)$ - нақты сан.

Анықтама. Егер

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

болса, онда *f(x)* функциясын $(a;b)$ аралығының x_0 нүктесінде үздіксіз деп атайды.

(1) теңдіктің сол жақ бөлігі *x*-тің x_0 нүктесіне ұмтылғандағы *f(x)* функциясының шегі де, ал оның оң жақ бөлігі осы функцияның x_0 нүктесіндегі мәні болады. Сонымен берілген анықтама бойынша *f(x)* функциясының x_0 нүктесіндегі шегі мен мәні бір-бірімен тең болса, онда функция x_0нүктесінде үзіліссіз функция болатын болды.

Функцияның шегіне берілген анықтама бойынша (1) теңдік келесі теңсіздіктермен мәндес

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon, \quad |x-x_0| < \delta. \quad (2)$$

Сондықтан айтылған анықтаманы былай тұжырымдауға да болады.

Анықтама. Егер берілген ε>0 санына сәйкес және x_0 нүктесіне тәуелді болатын $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ саны табылып, мына $|x-x_0| < \delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық *x*-тер үшін (2) теңсіздік орындалса, онда *f(x)* функциясын $(a;b)$ аралығының x_0 нүктесінде үзіліссіз деп атайды.

Айталық, $(a;b)$ аралығының *x* кез келген нүктесі болсын, онда $x - x_0 = h = \Delta x$ айырманы аргумент немесе тәуелсіз айнымалы *x*-тің x_0 нүктесіндегі өсімшесі дейді.

Бұдан $x = x_0 + h = x_0 + \Delta x$ Мына

$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ айырманы аргумент немесе тәуелсіз айнымалы *x*-тің өсімшесіне *f(x)* функциясының сәйкес өсімшесі дейді.

Тәуелсіз айнымалы x-тің және $f(x)$ функциясының өсімшелері ұғымы енгізілгеннен кейін (2) теңсіздік мына түрге көшеді: $\left|f(x_0+h)-f(x_0)\right|<\varepsilon$ (3) (3) теңсіздік келесі теңдікпен мәндес

$$\lim_{h\to 0}\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]=0 \quad (4)$$

Бұдан мынадай анықтамаға келеміз.

Анықтама. Егер аргумент x-тің x_0 нүктесіндегі өсімшесі $\Delta x=h$ нөлге ұмтылғанда $f(x)$ функциясының оған сәйкес өсімшесі Δf нөлге ұмтылса, онда $f(x)$ функциясын $(a;b)$ аралығының x_0нүктесінде үзіліссіздеп атайды.

Анықтама. Егер $f(x)$ функциясы $(a;b)$ аралығының әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда $f(x)$ функциясын $(a;b)$ аралығында үзіліссіз деп атайды.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$ (4’) болса, онда $f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде оның оң жағынан үзіліссіз деп атайды.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$ (5) болса, онда $f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде оның сол жағынан үзіліссіз деп атайды.

Егер $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ болса, онда $f(x)$ функциясы бірінші анықтамада айтылған мағынада үзіліссіз болады.

Функцияның үзіліссіздігі ұғымының екінші түрдегі анықтамасы былайша тұжырымдалады:

Анықтама. Егер $f(x)$ функциясының анықталу облысынан алынған кез келген тізбектің

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

x_0санынажинақтыболуынан$f(x)$функциясының осытізбеккесәйкесмәндері тізбегінің

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

$f(x_0)$-гежинақтыболатынболса, онда$f(x)$ функциясынx_0нүктесіндеүзіліссіздепатайды.

Жоғарыдакелтірілгенбірінші анықтамаменосысоңғыанықтамабір-біріменбалама.

Айталық, $f(x)$ функциясы $(a;b)$ аралығының әрбірнүктесіндеүзіліссізболсын. Ондаберілген$\varepsilon>0$ бойыншааралықтыңәрбіржекеx_0нүктесінесәйкесδсанытабылып, тиісті теңсіздіктерорындалғанболареді. Жалпыайтқанда, δсанынаңсайлапалынуыεменx_0-гетәуелді, яғни $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$. Осыған байланысты мынадай сұрақ туады: берілген$\varepsilon>0$ бойынша аралықтың барлық x_0 нүктелеріне бірдей жарамды δ санын табуға болама?

Анықтама. Егер алдын ала берілге нәрбір$\varepsilon>0$ санынасәйкес $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ саны табылып, x пен x_0 $(a;b)$ аралығының қай жерінен алынса да мына теңсіздіктің $|x-x_0|<\delta$ орындалуынан келесі теңсіздік $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$ орындалса, онда $f(x)$ функциясын $(a;b)$ аралығында бірқалыпты үзіліссіз деп атайды.

Бұл анықтама бойынша δсаны тек εсанына ғана тәуелді және x_0 нүктесінің барлығына да жарамды.

Осы соңғы анықтаманы былай тұжырымдауға да болады:

Анықтама. Егер $\varepsilon>0$ санына сәйкес тек осы ε санына ғана тәуелді $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ саны табылып, $(a;b)$ аралығының мына теңсіздікті $\left|x^{11}-x^{1}\right|<\delta$ қанағаттандыратын кез келген x^1және x^{11} екі нүктесі үшін келесі теңсіздік $\left|f(x^{11})-f(x^{1})\right|<\varepsilon$ орындалса, онда $f(x)$ функциясын $(a;b)$ аралығында бірқалыпты үзіліссіз деп атайды.

1968 жылғы қабылданған математика бағдарламасы бойынша жазылған А.Н. Колмогоровтың (Алгебра және анализ бастамалары оқулығында) функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің анықтамасы оның шегі арқылы берілген.

Анықтама.Егер $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ болса, онда *f*функциясыx_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

Бұдан кейін нүктедегі үзіліссізфункцияның негізгі касиеттері қарастырылады.

1-теорема.x_0нүктесінде үзіліссізболатын функциялардың қосындысы, айырымы, көбейтіндісі және бөліндісі (бөлімі x_0 нүктесінде нөлге айналмайтын жағдайдағы бөлінді) x_0нүктесінде үзіліссіз функциялар болып табылады.

2-теорема.Рационал функция өзі анықталған барлық нүктелерде үзіліссізболады.

Бұдан кейін интервалдағы үзіліссізфункцияның таңба-тұрақтылық қасиеті қарастырылады.

Егер *f* функциясы $(a;b)$ интервалында үзіліссізжәне нөлге айналмайтын болса, онда ол функция сол интервалда тұрақты таңбасын сақтайды.

Теңсіздіктерді интервалдар әдісімен шешудің теориялық негізі осы қасиетке негізделеді.

Функциянын нүктедегі үзіліссіздігі былайша түсіндіріледі:

Егер $x \to x_0$ жағдайда $f(x) \to f(x_0)$ болса, онда бұл функцияны x_0нүктесінде үзіліссіз деп атайды. Мұнда $f(x) - L = f(x) - f(x_0) = \Delta f$; $|\Delta x|$аз болғанда $|\Delta f|$те аз болатынын, яғни x_0нүктесіндегі аргументтің аз өзгерулеріне функция мәндерінің де аз өзгерулері сәйкес келетіні шығады. Элементар функциялардың барлығы өзінің анықталу облысының әрбір нүктесінде үзіліссіз болады.

Осы оқулықтың “Үздіксіздік пен туындының қолданылуы”деп аталатын параграфыныңүзіліссіздіктің қолданылуы деп аталатын пунктінде интервалдағы үзіліссіз функцияның анықтамасы мен интервалдағы үзіліссіз функцияның таңба-тұрақтылық қасиеті қарастырылған.

Егер $(a;b)$ интервалында *f*функциясы үзіліссіз және нөлге айналмайтын болса, онда сол интервалда ол тұрақты таңбасын сақтайды.

Одан кейін, теңсіздікті интервалдар әдісімен шешудің осы қасиетке негізделгені қарастырылады.

Ал М.А.Башмаковтың (Алгебра және анализ бастамалары оқулығында М., Просвещение, 1997 ж.) теңсіздікті интервалдар әдісімен шешу функцияның үзіліссіздігінен бұрын оған байланыссыз өтіледі. Бұл оқулықта фунцияның үзіліссіздігі аргумент пен функция өсімшесі арқылы беріледі: егер аргументтің шексіз аз өсімшесіне функцияның шексіз аз өсімшесі сәйкес келетін болса, онда функцияны берілген нүктеде үзіліссіз функция деп атайды. Монотонды функциялар үшін функцияның үзіліссіздігінің анықтамасы былайша беріледі: “Егер монотонды функция өзінің барлық аралық мәндерін қабылдайтын болса, онда ол үзіліссіз функция болады”. Бұдан кейін кесіндідегі үзіліссіз монотонды функцияның нөлге айналуы туралы Больцано-Кошидің теоремасы және оның тендеулерді графиктік тәсілмен шешуде қолданулары қарастырылады.

Кесіндідегі үзіліссізфункцияның негізгі қасиеттері теориялық зерттеулер мен практикалық есептерді шығаруда кең түрде колданылады. Физика-математикалық бағыттағы бейіндік мектептерде, факультативтік сабақтар мен математикалық үйірме жұмыстарында кесіндідегі үзіліссіз функцияның нөлге айналуы туралы Больцано-Кошидің бірінші және екінші теоремаларын теңдеулердің нақты шешімдерінің бар болатындығын дәлелдеуде және оны кез келген дәлдікпен жуықтап есептеуде, теңсіздіктерді интервалдар әдісімен шешудің теориялық негізі ретінде алуға болады, ал аралықтағы үздіксіз функцияның таңба-тұрақтылық қасиеті теңсіздікті аралықтар әдісімен шешудің теориялық негізі ретінде қолданылады.

Функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің анықтамасын терең түсіну үшін мына төмендегідей оқу материалдар қайталанылады:

1) функцияның нүктедегі шегінің анықтамасы.
2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ болатындығын дәлелдеу әдісі.
3) Кез келген $x_0 \in R$ үшін $\lim\limits_{x \to x_0} C = C, \quad \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ болатындығы.
4) Шектер туралы теоремалар.

5) Рационал функциялар туралы ұғым. Мына түрдегі функция $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, бүтін рационал функциянемесе көпмүшелік деп аталады, мұндағы $a_0\neq 0$.

$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, мұндағы *P(x)* және *Q(x)* - көпмүшеліктер рационал функциялар деп аталады.

Оқушыларға таныс рационал функциялардың мысалдарын келтіру қажет: тура және кері пропорционалдық тәуелділік, сызықтық және квадраттық функциялар, $y=ax^3$, $y=\dfrac{x^2+1}{x^3-x+2}$ т.с.с.

Сонымен бірге, оқушылардың назарын $y=|x|$, $y=\sqrt{x}$, $y=[x]$, $y=\{x\}$ функцияларының рационал функциялар болмайтынына назар аударған жөн.

Функцияның нүктедегі шегі мен функцияның графигі туралы білімдерін функцияның нүктедегі үзіліссіздігін көрнекі түрде қалыптастыру үшін пайдалануға болады. Бұл мақсатта оқушыларға мынадай тапсырмалар берген пайдалы.

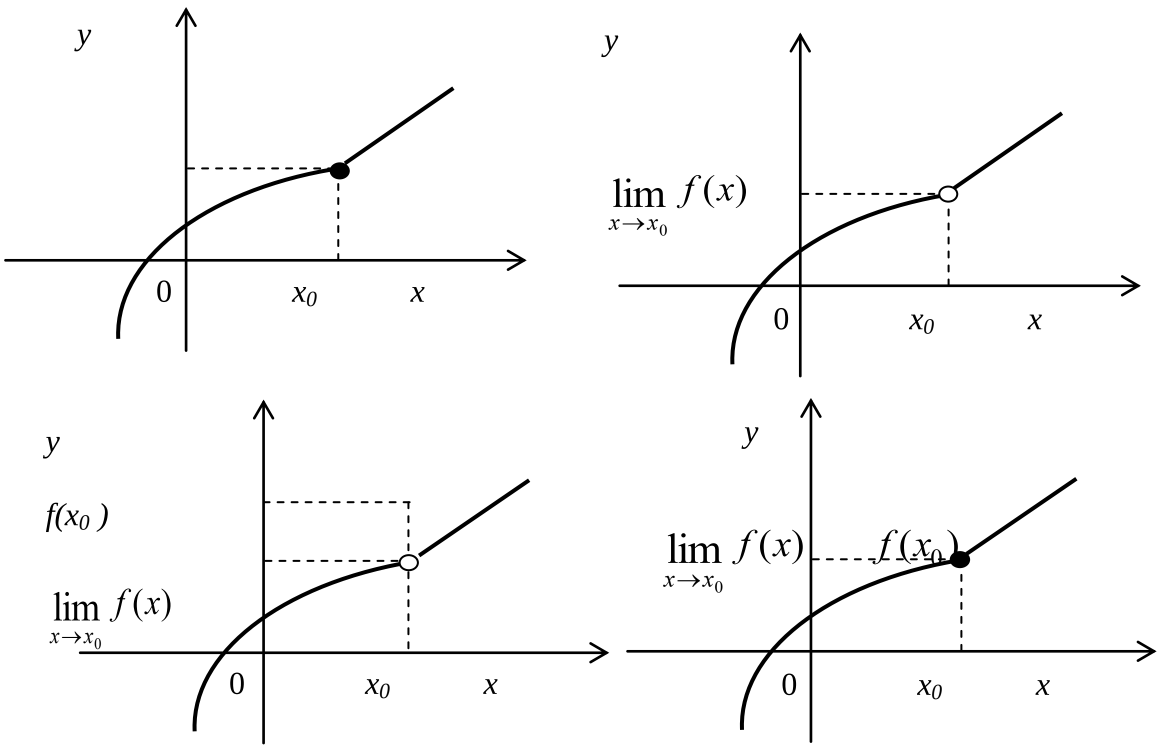
Функциялардың графиктерін мыналарды анықта:

а) x_0 нүктесінде анықталған, бірақ бұл нүктеде шегі жоқ;

ә) x_0 нүктесінде анықталған, бұл нүктеде шегі бар, бірақ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$;

б) x_0 нүктесінде анықталған, бұл нүктеде шегі бар және $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$;

Көрсетілген қасиетке ие болатын функциялардың графиктері x_0нүктесінің маңайында түрліше болуы мүмкін. Олардың бір түрі төмендегі 13-суретте көрсетілген.



13-сурет

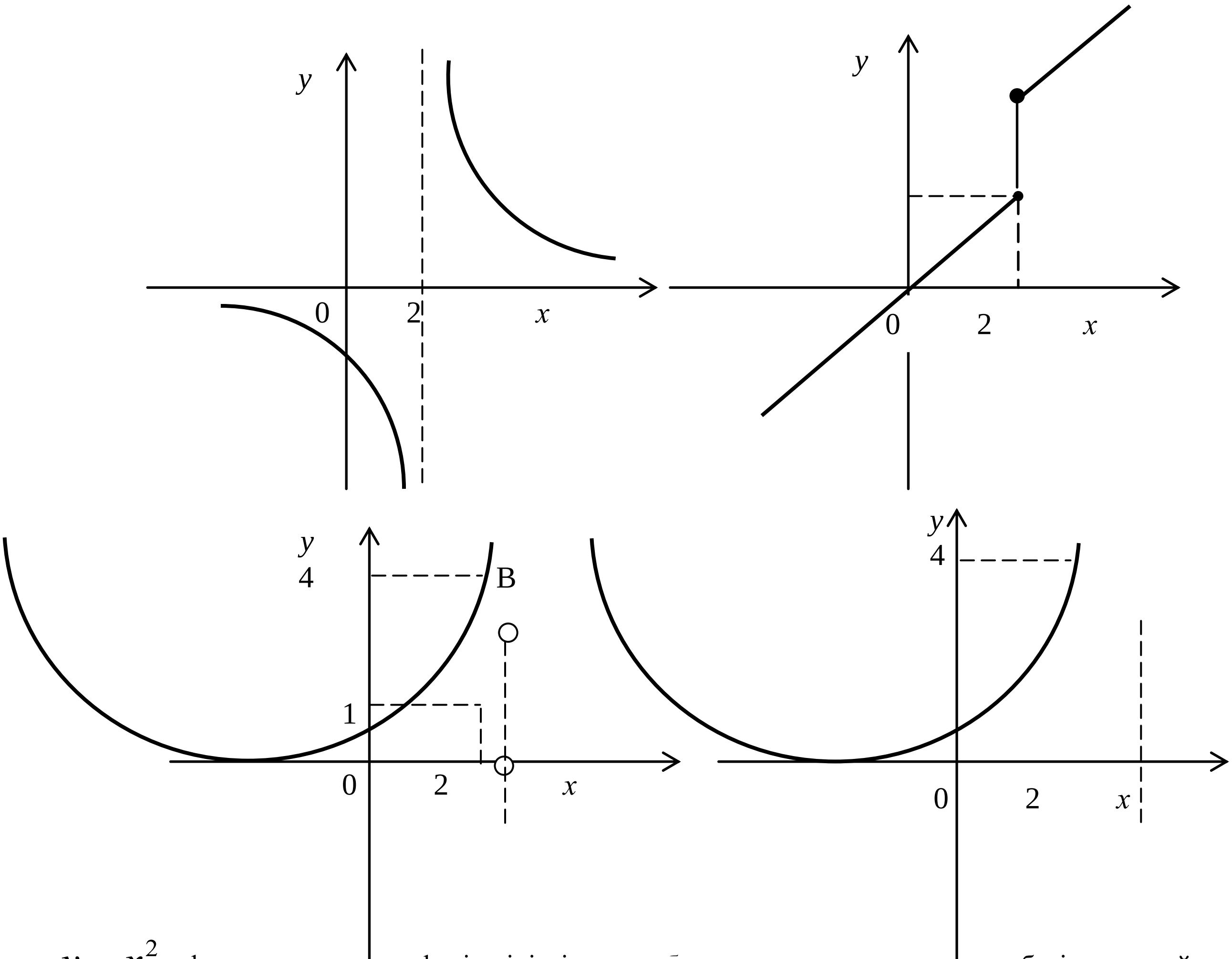
Жаңа материалды төрт кезеңге бөліп оқыту қажет: ***функцияның үзіліссіздігін көрнекі қалыптастыру; функцияның нүктедегі үзіліссізігінің анықтамасын беру және оны қарапайым жағдайлар үшін қолдану; үзіліссізфункциялардың қасиеттерін білу; үзіліссіз функциялар туралы алған білімді қолдану.***

1.Функцияның нүктедегіүзіліссіздігін көрнекі түрде қалыптастыру.

Төмендегі функциялардың графиктерін қарастырайық (14-сурет):

а) $h(x) = \dfrac{1}{x-2}$; ә) $z(x) = \begin{cases} x, \text{ егер } x \le 2, \\ x+2, \text{ егер } x > 2. \end{cases}$

б) $\varphi(x) = \begin{cases} x^2, \text{ егер } x \ne 2, \\ 1, \text{ егер } x = 2. \end{cases}$ в) $f(x) = x^2$.



$y = x^2$ функциясының графигі үзіліссіз ғни қаламды қағаз бетінен алмай салуға болады. Қалған үш функциялардың әрқайсысы

14-сурет

$_0$=2 нүктесінен өткенде бөлінеді. Мұндай жағдайда x_0нүктесін үзілісті нүкте деп атайды. Функцияның үзілістілігін математикалық ұғымдарға сүйене отырып түсіндірейік.

$h(x) = \dfrac{1}{x-2}$ функциясы x_0=2 нүктесінде анықталмаған. Олай болса, функцияның үзілісті болуының бір есебі оның x_0нүктесінде мәнінің болмауы болып есептеледі.

$z(x) = \begin{cases} x, \, егер \; x \le 2, \\ x+2, \, егер \; x > 2. \end{cases}$ функциясы x_0=2 нүктесінде анықталған, бірақ бұл нүктеде оның шегі жоқ. Олай болса, функцияның үзілісті болуының басқа бір есебі оның (бұл нүктеде) x_0 нүктесінде шегінің болмауы болып табылады.

Енді үшінші функцияны $\varphi(x)=\begin{cases} x^2, \text{ егер } x\neq 2, \\ 1, \text{ егер } x=2. \end{cases}$ қарастырайық. Бұл функцияда жоғарыда аталған "кемшіліктердің" бірде-біреуі жоқ. Шынында да x_0 нүктесінде ол анықталған: $\varphi(2)=1;$ оның бұл нүктеде шегі бар: $\lim\limits_{x\to 2}\varphi(x)=4.$ Соған қарамастан φфункциясы x_0=2 нүктесінде үзілісті, өйткені оның x_0=2 нүктесінде шегі функцияның бұл нүктедегі мәніне тең емес: $\lim\limits_{x\to 2}\varphi(x)\neq\varphi(2).$ Бұл функцияның үзілісті болуының тағы бір есебі болып табылады.

Осы қарастырылған *φ(x)* функциясының графигін $f(x)=x^2$функциясы графигімен салыстырайық. Бұл функциялар x_0=2 нүктесінен басқа, барлық нүктелерде бірдей сандық мәндер қабылдайды. *φ(x)* функциясының графигін біз үзіліссізсызық болатындай етіп өзгерттік делік. Ол үшін біз*A*(2;1) нүктесін *φ(x)* функциясының графигіне тиісті емес *B* нүктесімен ауыстыруымыз қажет. *A*(2;1) нүктесі*y=φ(x)* функциясының графигіне тиісті болғандықтан, *φ*(2)=1 болады. *A* нүктесін *oy* өсіне параллель жылжыту арқылы оның ординатасын демек, x_0=2 нүктесінде функцияның мәнін өзгертеміз. Сонда*A*нүктесінің *B* нүктесімен ординатасы сәйкес келгенде, x_0=2 нүктесіндегі функцияның мәндері де бірдей 4-ке тең болады, яғни *φ(x)* функциясының x_0=2 нүктесіндегі шегіне тең болады. *f(x)* функциясы дәл осындай қасиетке ие болады. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2).$ Бұл қасиетті былайша тұжырымдауға болады: *f(x)* функциясының x_0=2 нүктесіндегі шегі оның осы нүктедегі мәніне тең.

2.Функцияның нүктедегіүзіліссіздігінің анықтамасы.Функцияның нүктедегіүзіліссіздігі туралы көрнекі ұғымды қалыптастыру туралы жүргізілген дайындық жұмыстары оқушылардың алдына функцияның нүктедегі үздіксіздігінің анықтамасын беруге мүмкіндік береді.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ болса, онда *f* функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіздеп аталады.

Бұл анықтамадан мынау шығады: *f(x)* функциясының x_0нүктесінде үзіліссізекендігін көрсету үшін $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ болатындығын дәлелдеу керек.

Рационал функцияның үзіліссіздігі туралы теореманы дәлелдеуде керек болатын аса маңызды екі тұжырымды дәлелдейік.

1-тұжырым. Тұрақты *f(x)=C* функциясы сан өсінің кез келген нүктесінде үзіліссіз болады.

Алдымен бұл тұжырымның дұрыстығының айқын екендігін геометриялық түрде көрсетейік: тұрақты *f(x)=C* функциясының графигін біз қаламды қағаз бетінен алмай түзу сызық түрінде сала аламыз.

Берілгені: $f(x)=C,\ x_0\in R.$

Дәлелдеуіміз керек:*f(x)* функциясының x_0нүктесінде үзіліссіз екенін.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, яғни $\lim\limits_{x\to x_0} C=C$ екенін дәлелдеу жеткілікті. Бұл теңдіктің дұрыстығы оқулықта дәлелденілген. Сонымен 1-тұжырымның дұрыстығы дәлелденді.

2-тұжырым.*f(x)=x* функциясы сан өсінің кез келген нүктесінде үзіліссіз функция болады.

Жоғарыда көрсетілгендей, тұжырымның геометриялық түрде дұрыстығын оқушыларға өз бетінше көрсету ұсынылады.

Берілгені: $f(x)=x,\ x_0\in R.$

Дәлелдеу керек: *f(x)* функциясының x_0нүктесінде үзіліссіз екенін.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, яғни $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ екенін дәлелдеу жеткілікті. Бұл теңдіктің дұрыстығы дәлелденілген. Демек, 2-тұжырымның дұрыстығы да дәлелденілді.

Функцяның аралықтағы үздісіздігі ұғымын қалыптастыру үшін оқулықтағыоқу материалдары пайдаланаылады.

3.Қосындының, көбейтіндінің, бөліндінің және рационал функцияның үзіліссіздігі.

Екі функцияның қосындысының үзіліссіздігі туралы теореманы дәлеледейік.

Берілгені: x_0 нүктесінде үзіліссіз $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялар.

Дәлелдеу керек: $f(x)+\varphi(x)$ функциясының x_0 нүктесінде үзіліссіз екенін, яғни

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+\varphi(x))=f(x_0)+\varphi(x_0).$$

Дәлелдеуі: $f(x)$ және $\varphi(x)$ функцияларының әрқайсысы x_0 сінде үзіліссіз болатындықтан,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),\ \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$$

теңдіктері орындалады. Қосындының шегі туралы теореманы қолданып табатынымыз:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+\varphi(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=f(x_0)+\varphi(x_0)$$

Демек, $f(x)+\varphi(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз.

Көбейту мен бөлінді функциялардың үзіліссіздігі осы сияқты дәлелденіледі.

4. Үзіліссіз функциялар туралы білімнің қолданылуы

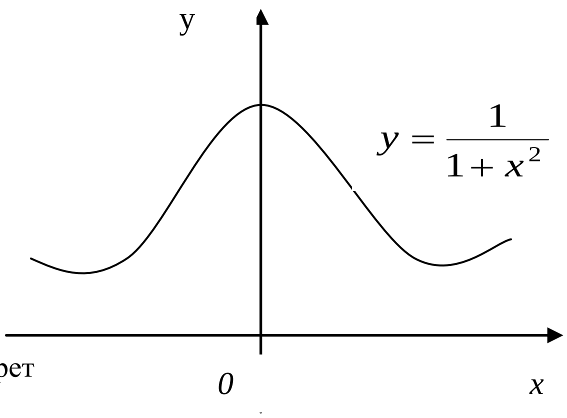
Функциялардың үзіліссіздігі туралы теоремаларды білу функцияның шегін анықтау мен графиктерін салуға байланысты мынадай екі маңызды қорытынды жасауға мүмкіндік береді.

1) Бүтін рационал функция – көпмүшелік бүкіл сан өсінде үзіліссіз функция болады. Демек, көпмүшеліктің кез келген нүктедегі шегі оның осы нүктедегі мәніне тең болады.

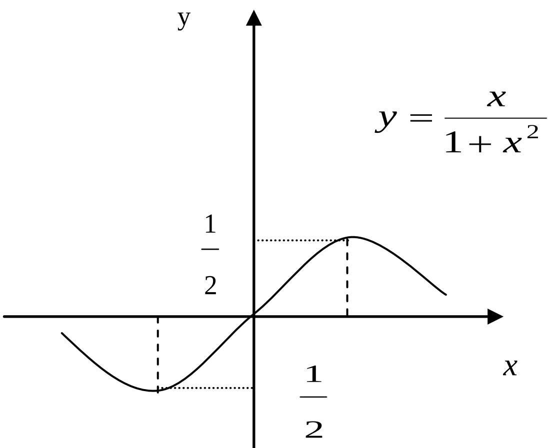
Мысал үшін $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3-x+4)=2\cdot 1^3-1+4=4.$

Көпмүшеліктің графигі *xоу* жазықтығында орналасқан үзіліссіз сызық болады, олардың графигін салу “Туынды” тақырыбын оқыту кезінде толығырақ қарастырылады.

Көпмүшеліктер туралы жоғарыда айтылғандарды $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, мұндағы $Q(x)\neq 0$ рационал функциясы үшін де қатысты. Мысалы үшін $y=\dfrac{1}{x^2+1}$, $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ функцияларының графиктері үзіліссіз сызықтар болады (15,16-суреттер).



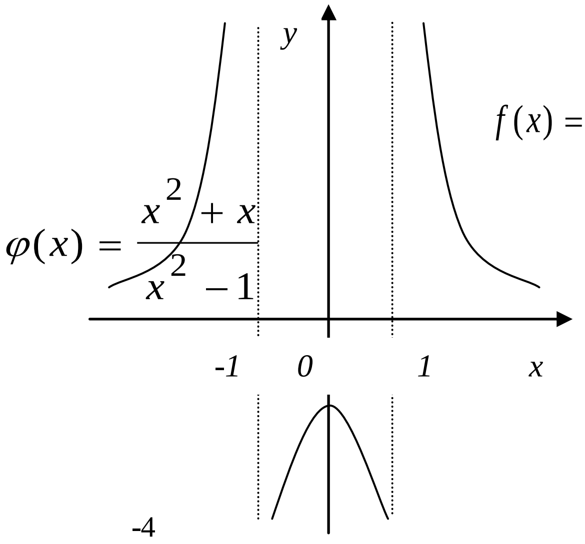
15-сурет



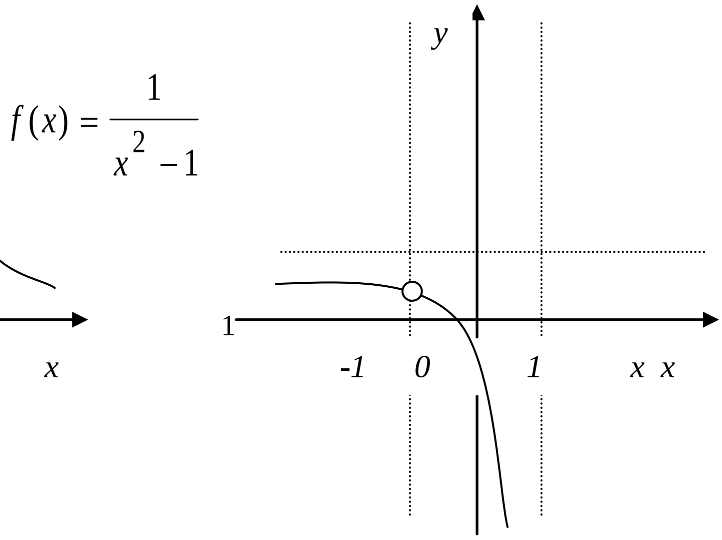
Егер $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ рационал функциясының бөлімі кейбір x_1 және x_2 нүктелері арқылы анықталатын сандық аралықтар функцияның үзіліссіз аралықтары болып табылады. Мысалы, үшін $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ функциясы –1 және 1 нүктелерінде анықталмаған; бұл функцияның үзіліссіз аралықтары $(-\infty;-1),\ (-1;1),\ (1;+\infty)$ (17-сурет).

(18-сурет) функциясының үзілісті нүктелері де үзіліссіз аралықтары да жоғарыдағы *f(x)* функциясы сияқты анықталады. Барлық $x_2=-1$ үзілісті нүктесінің маңайында елеулі айырмашылықтары бар. Неге олай екенін түсіндірейік. $x=1$ нүктесінде бұл екі функцияның екеуі де анықталмаған және шектері жоқ, ал $x_2=-1$ нүктесінде бұл функциялардың екеуі де бірдей анықталмағанымен, бұл функциялардың біреуінің шегі бар:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2},$$ ал екіншісінің шегі жоқ.



17-сурет



18-сурет

Жоғарыдағы айтылған пайымдаулар функцияның шегі мен үзіліссіздігі туралы теориялық білімдерді ұғымдардың көрнекілігімен байланыстыруға мүмкіндік береді.

2) Жоғарыдағы айтылғандардан бөлшек рационал $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$, (мұндағы $P(x)$ және $Q(x)$ көпмүшеліктер) функцияның шегін анықтаудың мынадай ережесі келіп шығады.

$Q(x_0)$ -ді табамыз.

Егер $Q(x_0)\neq 0$ болса, онда $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ болады.

Егер $Q(x_0)=0$ болса, онда $Q(x)$ көпмүшелігін мына түрде жазуға болады $Q(x)=(x-x_0)\cdot Q_1(x)$, мұндағы $Q_1(x)$ көпмүшелік.

Егер $P(x)$ көпмүшелігін мына түрде $P(x)=(x-x_0)\cdot P_1(x)$ (мұндағы $P_1(x)$ көпмүшелік) жазуға болса онда $\frac{P(x)}{Q(x)}$ бөлшегін қысқартуға болады.

Егер $P(x)$ көпмүшелігін $P(x)=(x-x_0)\cdot P_1(x)$ түрінде жазуға болмаса, онда $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$ функциясының x_0 нүктесінде шегі болмайды.

1-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}=\frac{1+1-6}{1-9}=\frac{1}{9}$, $Q(-1)=-8$, функция $x_0=1$ нүктесінде үзіліссіз.

4. Туындының анықтамасы және оның геометриялық мағынасы. Функцияның туындысын табу. Туынды табу ережелері.

Функцияның берілген нүктедегі туындысының анықтамасын тұжырымдайық Ол үшін мынадай математикалық терминдер қолданылады: функция, функцияның өсімшесі, аргументтің өсімшесі, қатынас, қатынастың шегі.

$[a;b]$ кесіндісінде анықталған $y=f(x)$ функциясы берілсін. Осы кесіндінің x_0 нүктесін алып, $[a;b]$ кесіндісінде анықталатындай етіп, аргумент x_0-ге Δx өсімше берейік: $x=x_0+\Delta x, \Delta x=x-x_0$. Бұл өсімшеге сәйкес y-тің өсімшесін Δy деп белгілейік.

Туындының анықтамасы. Егер функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі $\Delta x\to 0$-да шегі бар болса, онда оны $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі **туындысы** деп атайды:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x_1)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Туындының x аргумент бойынша алынаған болса, оны $y',\ f'(x)$ деп те белгілейді. Анықтамадан функцияның берілген нүктедегі туындысы бар болса, әрқашанда ол белгілі сан болатынын байқаймыз. Берілген функцияның туындысын табуды **дифференциалдау** дейді. Функцияны дифференциалдау және туындысы бойынша функцияның қасиеттерін зерттеу **дифференциалдық есептеулердің** негізгі мәселесі болып табылады.

Туындының анықтамасынан $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы дегеніміз: 1) $\Delta x\to 0$-дағы, 2) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ қатынасының шегі; 3) сан болатандығы оқушыларға айтылу керек.

Біз жоғарыда туындының анықтамасын оның физикалық мағынасына сүйеніп, қозғалыстағы дененің орташа жылдамдығын табу туралы механикалық есепті шығаруға байланысты анықтадық.

Туынды ұғымын қисықтың берілген нүктесіне жүргізілген жанаманың теңдеуін құру туралы геометриялық есепке сүйеніп те анықтауға болады.

Функцияның туындысын табу алгоритмі. Туындының анықтамасы тұжырымдалып айтылғаннан кейін мынадай сұрақ туындайды: «$f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысын қалай табуға болады?» Бұл сұрақтың жауабы мынадай алгоритмдер арқылы жүзеге асырылады:

1) аргументі $x=x_0$-ге Δx өсімше беріледі: $x=x_0+\Delta x$;

2) $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі өсімшесі табылады: $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;

3) $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ қатынасын құрамыз; 4) осы функцияның $\Delta x\to 0$-дағы шегі $f'(x_0)$-ды табамыз.

Нақтылау мақсатында туындыны табуға берілген бірінші мысалды екі деңгейде орындаған тиімді: 1) x_0-ге нақтылы сан, мысалы, $x_0=2$ беріп, 2) x_0-ды жалпы түрде алып.

«Функцияның туындысы» мен «функцияның нүктедегі туындысының» айырмашылықтары түсіндіріледі: функцияның туындысының x_0 нүктесіндегі мәні сан, ал функцияның туындысы функция болады.

Анықтаманы пайдаланып функциялардың туындысын табайық:

Мысал. $y=x^2$ функциясының туындысын есептеу.

1. $f(x)=x^2$. 2. $\Delta x;\ x+\Delta x;\ f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2$.

3. $\Delta f=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$. 4. $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x.$

5. $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$ Сонымен, $f'(x)=(x^2)'=2x$.

Мысал. $y=\dfrac{1}{x}$ функциясының туындысын есептеу.

1. f(x)= $\dfrac{1}{x}$, мұнда $x \neq 0$ 2. Δx; $x+\Delta x$; $f(x+\Delta x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}$

3. Δf= $\dfrac{1}{\tilde{o}+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$ 4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=-\dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x}=-\dfrac{1}{x^2+x\Delta x}$

5. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{-1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(x^2+x\Delta x)}=-\dfrac{1}{x^2}$ Сонымен, $f'(x)=\left[\dfrac{1}{x}\right]'=-\dfrac{1}{x^2}$.

Туынды табу ережелері. Жоғарыда келтірілген туындыны есептеу алгоритмінен дифференциалдау ережелері мен формулаларын шығарып алуға болады:

1. Тұрақты шаманың туындысы нөлге тең.

C тұрақты шама. $y=C$ болғанда, $y'=0$, мұны кейде былай жазады: $(C)'=0$.

2. Тұрақты көбейткішті туындының алдына шығарып жазуға болады.

$y=ku$, болса (k - тұрақты көбейткіш), $y'=ku'$ болады.

3 Алгебралық қосындының туындысы сол функциялардың туындыларының сәйкес алгебралық қосындысына тең болады.

$y=u+v-w$, ал u, v, w өздері x-ке тәуелді функциялары болсын. Сонда: $y'=u'+v'-w'$.

4 Екі функцияның көбейтіндісінің туындысын табу үшін бірінші функцияның туындысын екінші функцияның өзіне көбейтіп, содан соң екінші функцияның туындысын бірінші функцияның өзіне көбейтіп, шыққан екі көбейтіндінің қосындысын алу керек.

$y=uv$ болсын. Сонда: $y'=u'v+uv'$. Мұны былай да жазады: $(uv)'=u'v+uv'$.

5. Екі функциядан құралған бөлшектің туындысын табу үшін алымындағы функцияның туындысын бөліміндегі функцияның өзіне көбейтіп, содан соң бөліміндегі функцияның туындысын алымындағы функцияның өзіне көбейтіп, алдыңғы көбейтіндіден соңғы көбейтіндіні шегеріп, одан әрі осыдан шыққан айырманы бөліміндегі функцияның квадратына бөлу керек.

$y=\dfrac{u}{v}$ болсын. $y'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

6. Күрделі $y=f[\varphi(x)]$ функцияларсының x бойынша туындысын табу үшін $y=f(u)$ функциясының u бойынша туындысын тауып, содан кейін $u=\varphi(x)$ функциясының x бойынша туындысы табылады, шыққан екі туындының көбейтіндісін алу керек.

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x,$$

Мысал. $y = 3x^5 — 2x^2 + 5x + 4$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі. $y'=(3x^5-2x^2+5x+4)'=3\cdot 5x^4-2\cdot 2x+5=15x^4-4x+5$.

Мысал. $f(x)=\dfrac{x^3}{6}-0{,}5x^2-3x+2$ функциясы туындысының $x=-1$ нүктесіндегі мәнін табу.

Шешуі: $f'(x)=\left(\dfrac{x^3}{6}-0{,}5x^2-3x+2\right)'=\dfrac{3x^2}{6}-0{,}5\cdot 2x-3=\dfrac{x^2}{2}-x-3$,

$f'(-1)=\dfrac{(-1)^2}{2}-(-1)-3=\dfrac{1}{2}+1-3=-1{,}5$; Жауабы: -1,5.

Мысал. $y=(5x+3)(6x^2—17x+4)$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі. $y'=(5x+3)'\cdot(6x^2-17x+4)+(5x+3)\cdot(6x^2-17x+4)'=5(6x^2\ 17x+4)+(5x+3)\cdot(12x-17)=30x^2-85x+20+60x^2-85x+36x-51=90x^2-134x-31$.

Мысал. $y=\frac{x^2-6x}{x+2}$ функцияның туындысын табайық.

Шешуі: Бөліндінің туындысын табудың формуласын пайдалана, отырып туындыны есептейміз:

$$y'=\left(\frac{x^2-6x}{x+2}\right)'=\frac{(x^2-6x)'(x+2)-(x^2-6x)(x+2)'}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{(2x-6)(x+2)-(x^2-6x)}{(x+2)^2}=$$

$$\frac{2x^2+4x-6x-12-x^2+6x}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x-12}{(x+2)^2};$$

Қарапайым элементар функциялар туындыларының кестесін де келтірейік:

1 $(C)'=0\quad(C=const).$

2 $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}.$

3 $(a^x)'=a^x\ln a,(e^x)'=e^x.$

4 $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},\quad(\ln x)'=\frac{1}{x}.$

5 $(\sin x)'=\cos x.$

6 $(\cos x)'=-\sin x.$

7 $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$

8 $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$

9 $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

10 $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

11 $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}.$

12 $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Енді негізгі элементар функциялардың туындылар кестесін күрделі функцияның туындысын табу ережесі бойынша жалпылай жазайық:

(u(x)=u):

1 $(u^{\alpha})'=du^{\alpha-1}u'\quad(\alpha\in R),$

2 $(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u',$

3 $(a^u)'=a^u\ln a\cdot u',$

4 $(e^u)'=e^u\cdot u',$

5 $(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u',$

6 $(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u',$

7 $(\sin u)'=\cos u\cdot u',$

8 $(\cos u)'=-\sin u\cdot u',$

9 $(tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u',$

10 $(ctgu)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u',$

11 $(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$

12 $(\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$

13 $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$, 14 $(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$,

5. Функцияның өсуі мен кемуі. Функцияның максимумы мен минимумы

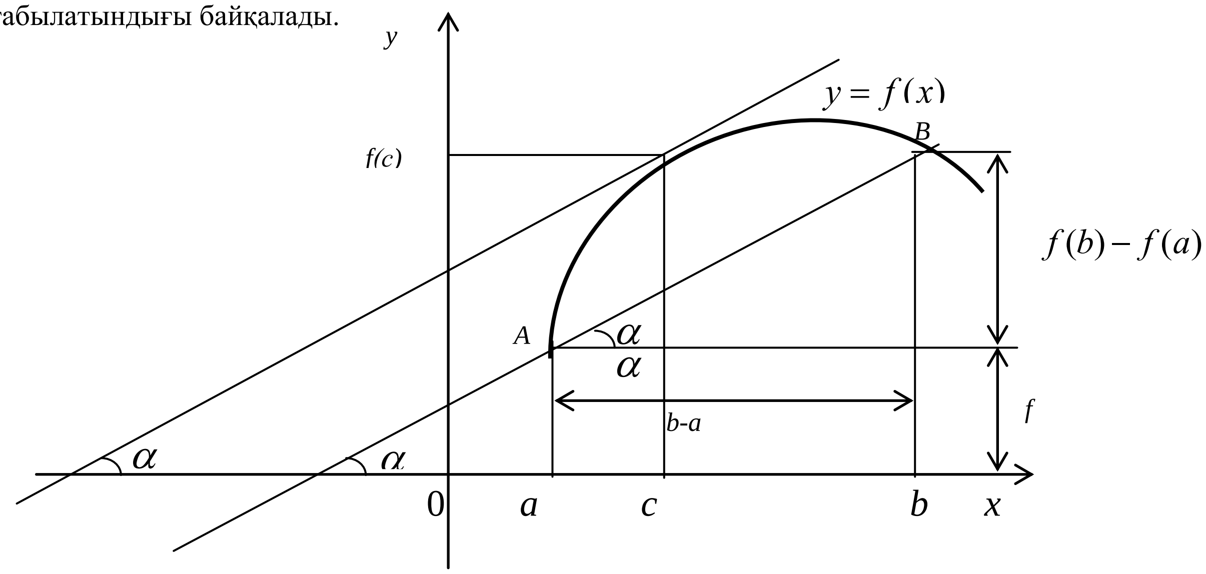
Туындының қолданылуы функцияны зерттеудің аналитикалық тәсілдерін жетілдірудің жаңа сатысы болып табылады.

Туынды арқылы функцияның қасиеттерін зерттеу кезінде математикалық талдаудың белгілі Лагранж, Ферма және Вейерштрасс теоремаларына сүйенеді.

Туындының геометриялық мағынасы Лагранж теоремасын көрнекі түрде иллюстрациялауға мүмкіндік береді. [*a;b*] кесіндісінде жататын кез келген *x* нүктесінде дифференциалданатын *f(x)* функциясын қарастырайық, онда $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ қатынасы *AB* қиюшысының *ox* өсімен жасайтын бұрышының тангенсін сипаттайды (4-сурет).

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = tg\alpha = f'(c).$$

AB қиюшысын жанамамен беттескенше өзіне-өзін параллель жылжытайық. Айталық, жанасу нүктесінің абсцисасы *c*-ға тең болсын. $f'(c) = tg\alpha$ болатындықтан Лагранж теоремасы орындалады: $c \in [a;b]$ нүктесі табылып, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ теңдігі орындалады. 4-суреттен берілген аралықтан Лагранж теоремасы орындалатын *c* нүктесінің табылатындығы байқалады.



4-сурет

Лагранж теоремасы функцияның өсуі мен кемуінің жеткілікті белгі шартын дәлелдеуге мүмкіндік береді.

Оның негізіне теореманы енгізудің нақтылы индуктивті тәсілі жататын мынадай әдістемелік схеманы ұсынуға болады: 1) оқу проблемасын қою; 2) геометриялық иллюстрацияға сүйеніп, оқушыларға белгіні тұжырымдату; 3) оның шарты мен қорытындысын қысқаша түрде жазу; 4) Лагранж теоремасын қолданып белгінің дәлелдемесін келтіру; 5) теореманың дәлелдемесін құрамды бөліктерге бөліп бекіту.

Мектепте туынды арқылы функцияны зерттеуді оқып-үйрену

Туынды тақырыбын оқып-үйрену барысында оқушылардың функцияны зерттеу туралы білімдері жүйеленеді, функцияны зерттеудің жалпы схемасы кең түрде қарастырылады.

Оқушыларға функцияны аналитикалық тәсілмен зерттеудің пайдалы екендігін түсіндірген жөн: функцияның графигін нүктелер арқылы салу тәсілі барлық уақытта бірдей қолайлы емес, тіпті көп нүктелерді тауып, функцияның графигін салу оның кескіні мен өзгерісі туралы дәл мағлұмат бере бермейді.

Туындыны қолданып, аналитикалық тәсілмен функцияның монотонды аралықтарын табу мен экстремумге зерттеу нәтижесінде, көптеген нүктелерді тауып функцияның графигін салудан құтқарады. Функцияның графигін дәлірек салуға, функцияның графигінің түрін дұрыс түсінуге мүмкіндік береді.

Функцияның өсуі мен кемуі. Функцияны зерттеуге негізгі міндеттерінің бірі – оның өсетін және кемитін аралықтарын табу.

Функцияның тұрақты болу шарты.

Теорема. $f(x)$ функциясы [a,b] аралығында тұрақты болу үшін, бұл аралықтың әрбір нүктесінде $f'(x)=0$ шарты орындалуы қажетті және жеткілікті.

Айталық $f(x)$ функциясы [a,b] аралығында тұрақты болсын дейік. Сонда бұл аралықтың әрбір нүктесінде $f'(x)=0$ болады. Енді [a,b] аралығының әрбір нүктесінде $f'(x)=0$ дейік. Егер $a<x_\circ<в$ болса, онда [a,b] аралығындағы барлық *x* үшін Лагранж теоремасы

$$f(x)-f(x_\circ)=(x-x_\circ)f'(c) \quad (x_\circ<c<x)$$

түрінде жазылады. Теорема шарты бойынша $f'(c)=0$ болғандықтан, $f(x)=f(x_\circ)=const.$

Функцияның өсуі мен кемуі.

а) Функцияның бірсарынды болуының қажетті шарты.

Теорема. Егер $f(x)$ функциясының [a,b] аралығының әрбір нүктесінде $f'(x)$ туындысы бар және бұл аралықта үдемелі (кемімелі) болса, онда көрсетілген аралықтың әрбір нүктесінде $f'(x)\geq 0[f'(x)\leq 0]$ теңсіздігі орындалады.

Айталық $f(x)$ функциясы [a,b] аралығында бірсарынды үдемелі болсын. Сонда кез келген $\Delta x\neq 0$ өсімшесі үшін $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$. Бұдан $\Delta x\to 0$ да шекке көшсек:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\geq 0.$$

ә) Функцияның бірсарынды болуының жеткілікті шарты.

Теорема. Егер $f(x)$ функциясының [a,b] аралығының әрбір нүктесінде $f'(x)$ туындысы бар және бұл аралықта $f'(x)>0[f'(x)<0]$ болса, онда көрсетілген аралықта $f(x)$ функциясы сарынды үдемелі (кемімелі) болады.

Айталық [a,b] аралығында $f'(x)>0$ болсын. Кез келген x_1 және x_2 нүктелерін $a<x_1<x_2<в$ теңсіздіктері орындалатындай етіп алайық. Сонда Лагранж теоремасы бойынша:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c) \quad (x_1<c<x_2).$$

Ал, $x_2-x_1>0$ және $f'(c)>0$ болғандықтан $f(x_2)-f(x_1)>0,$ яғни $f(x_2)>f(x_1)$ болады.

Бұл теңсіздік $f(x)$ функциясы $]a;в[$ аралығында бірсарынды үдемелі болатынын көрсетеді. Дәл осыған ұқсас, $f'(x)<0$ жағдайы да дәлелденеді.

Туындының көмегімен кез келген дифференциалданатын $f(x)$ функцияларының өсу және кему аралықтарын анықтауға болады. Ол келесі алгоратим негізінде орындалады:

1) Функцияның анықталу облысын табу;
2) Функцияның туындысын табу;
3) $f^{'}(x)>0$ немесе $f^{'}(x)<0$ теңсіздігін шешу;
4) Функцияның өсу және кему аралықтарын жазу.

Ескерту. Егер $f(x)$ функциясы аралықтың шеткі нүктесінде үзіліссіз болса, онда ол нүкте сол аралыққа енгізіледі.

Мысалдар қарастырайық.

Мысал. $f(x) = 3x^2 - 12x$ функциясының өсу және кему аралықтарын табайық.

Шешуі:

1) Функцияның анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны;

2) $f'(x) = (3x^2 - 12x)' = 6x - 12$;

3) $f'(x) > 0$, яғни $6x - 12 > 0$, $6x > 12$, $x > 2$. Ал анықталу облысының $x < 2$ бөлігінде $f'(x) < 0$ болатыны айқын;

4) сонда функция $[2;+\infty)$ аралығында өседі, ал $(-\infty;2]$ аралығында кемиді.

Жауабы: $(-\infty;2]$ - кемиді, $[2;+\infty)$ - өседі.

Мысал. $f(x) = \sin x - 2x$ функциясының бірсарынды өспелі, бірсарынды кемімелі аралықтарын табайық.

Шешуі: 1) Функцияның анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны;

2) $f'(x) = (\sin x - 2x)' = \cos x - 2$;

3) туындының таңбасын анықтаймыз. $|\cos x| \le 1$ болғандықтан, $\cos x - 2$ өрнегінің мәні *x*-тің кез келген мәнінде 0-ден кіші болады. Сондықтан $x \in R$ болғанда, $f'(x) < 0$. Демек, берілген функция барлық нақты сандар жиынында бірсарынды кемімелі функция.

Функцияның максимум және минимум мәндерін бір сөзбен оның **экстремумы** деп атайды.

Функцияның максимумы мен минимумы анықтамаларына байланысты мына жағдайлар есте болуы керек;

1. Функция қарастырып отырған аралықтың тек ішкі нүктелерінде ғана экстремумдық мәндерге ие болады.

2. Максимум мен минимумды функцияның кесіндідегі сәйкес ең үлкен және ең кіші мәндерімен шатастырмау керек.

Экстремумның қажетті шарты.

Теорема. Егер $f(x)$ функциясы $x = x_\circ$ нүктесінде экстремум мәнін қабылдаса және ол нүктенің маңайында $f'(x)$ туындысы бар болса, онда бұл нүктеде $f'(x_\circ) = 0$ болады немесе туындысы болмайды.

Функция экстремумының анықтамасына сәйкес $x_\circ$ нүктесі жататын белгілі бір аралықтың бір нүктесінде функция өзінің ең үлкен немесе ең кіші мәнін қабылдайды. Айталық $x_\circ$ нүктесінде $f(x)$ функциясы ең үлкен мәнін қабылдайтын болсын. Сонда кез келген $\Delta x = x - x_\circ \neq 0$ өсімшесі үшін $f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ) < 0$ болады.

Бұдан $\Delta x > 0$ болғанда $\frac{f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)}{\Delta x} < 0,$ ал $\Delta x < 0$ болғанда $\frac{f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)}{\Delta x} > 0$ болатыны шығады.

Ал, $x = x_\circ$ нүктесінде функцияның туындысы бар болғандықтан $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_\circ) + \Delta x) - f(x_\circ)}{\Delta x} = f'(x_\circ)$ шегі бар және ол Δx -тің таңбасына тәуелді емес.

Сонда $\Delta x > 0$ болғанда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_\circ) + \Delta x) - f(x_\circ)}{\Delta x} = f'(x_\circ) \le 0$, ал $\Delta x < 0$ болғанда

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_\circ) + \Delta x) - f(x_\circ)}{\Delta x} = f'(x_\circ) \ge 0$ болады.

Функцияның туындысының бар болу шартынан бұл туындылар өзара тең болуы, яғни $f'(x_\circ) = 0$ болатыны шығады.

Кейбір жағдайда, $\Delta x \to 0$ да $\dfrac{f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)}{\Delta x}$ қатынасы әртүрлі шекке ұмтылуы мүмкін, яғни функцияның $x_\circ$ нүктесінде тиянақты туындысы болмайды. Сонымен бірге, $x_\circ$ нүктесінде туынды шексіздікке де айналуы мүмкін. Сондықтан, $f(x)$ функциясының туындысы болмайтын немесе шексіздікке айналатын нүктелерде де экстремум мәндері болуы мүмкін.

Функцияның туындысы нөлге тең, не болмайтын және шексіздікке айналатын нүктелерді оның **мінездік** нүктелері деп атайды.

Жоғарыда дәлелденген теореманы функцияның экстремумы бар болуының қажетті шарты деп атайды.

Функцияның экстремумы бар болуының бірінші жеткілікті шарты.

Теорема. Айталық f функциясы $x_\circ$ мінездік нүктесі жататын $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ маңайында үзіліссіз және дифференциалданатын болсын. Сонда $f'(x)$ туындысы $x_\circ$ нүктесі арқылы солдан оңға қарай өткенде таңбасы плюстен минусқа өзгерсе, **функция максимум мәнге**, ал таңбасын минустен плюске өзгертсе, **функция минимум мәнге** ие болады.

Айталық $x < x_\circ$ болғанда $f'(x_\circ) > 0$, ал $x > x_\circ$ болғанда $f'(x_\circ) < 0$ болатын $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ маңайы бар болсын деп ұйғарайық. Егер $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ болса, онда $f(x) - f(x_\circ)$ айырымына Лагранж теоремасын қолдануға болады:

$$f(x) - f(x_\circ) = (x - x_\circ) f'(c) \qquad (x_\circ \le c \le x).$$

Мұндағы $x < x_\circ$ болса, $x - x_\circ < 0$ болады да, біздің ұйғаруымызға сәйкес $f'(c) > 0$, яғни $f(x) - f(x_\circ) < 0$ немесе $f(x) < f(x_\circ)$ болады. Ал $x > x_\circ$ болса, $x - x_\circ > 0$ болғандықтан және ұйғаруымыз бойынша $f'(c) < 0$, яғни $f(x) - f(x_\circ) < 0$ немесе $f(x) < f(x_\circ)$. Сонымен, $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ жататын кез келген $x \ne x_\circ$ үшін $f(x) < f(x_\circ)$ теңсіздігі орындалады екен. Бұл теңсіздіктің орындалуы $f(x)$ функциясы $x_\circ$ нүктесінде максимум мәнге ие болатынын көрсетеді.

Теореманың функция минимумы жөніндегі екінші бөлігі де дәл осылай дәлелденеді.

Егер функция туындысы $x_\circ$ нүктесі арқылы өткенде таңбасын өзгертпейтін болса, онда функцияның экстремумы болмайды. **Иілу** нүктелері болуы мүмкін.

Соңғы жағдайда, $x = x_\circ$ абсциссасына сәйкес графиктің нүктесіндегі жанамасы *0x* өсіне параллель және ол графикті қиып өтеді.

Мысал. $f(x) = x^2 - 4x$ функциясының экстремумын анықтайық.

Алдымен функцияның туындысын табамыз: $f'(x) = 2x - 4$ және оны нөлге теңестірейік $f'(x) = 2x - 4 = 0.$ Бұл теңдеудің түбірі $x = 2$. Енді $x < 2$ және $x > 2$ болатын мәндердегі $f'(x)$ туындысы таңбасын анықтайық. Сонда $f'(x < 2) < 0, \quad f'(x > 2) > 0,$ яғни туынды $x = 2$ нүктесі арқылы солдан оңға қарай өткенде таңбасын минустен плюске өзгертеді. Демек, абсциссасы $x = 2$ нүктеде берілген функция минимум мәнге ие болады. Соңында, функцияның минимум мәнін есептейік

$$f(2) = (x^2 - 4x)\Big|_{x=2} = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4, \text{ яғни } f_{\min} = -4.$$

Функцияның монотонды аралықтарын табу мен экстремумге зерттеудің схемасы:

1. Функцияның анықталу облысын тауып, функцияның үздіксіз аралықтары анықталады;

2 $f'(x)$-ті табылады;

3 Мінездік нүктелерді, яғни функцияның туындысы нөлге тең немесе туындысы болмайтын нүктелері анықталады;

4 Әрбір мінездік нүктелердің аймағындағы $f'(x)$ функциясының таңбасы зерттеледі;

5 Әрбір мінездік нүктедегі функцияның максимумы не минимумы болатындығын немесе болмайтындығын анықталады;

6 Функцияның монотонды аралықтары мен экстремумын табамыз.

Мысал. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ функциясының экстремумға зерттейік.

Шешуі: Функцияның туындысын табайық: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4$. Мінездік нүктелерді анықтау үшін бірінші ретті туындыны нөлге теңестіріп теңдеуді шешеміз. Сонда $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ теңдеуін шешімі оның мінездемелік нүктелері болады:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x^3 - 1) - (3x^2 - 3x) = (x-1)(x^2 + x + 1) - 3x(x-1) =$$

$$= (x-1)(x^2 + x + 1 - 3x) = (x-1)(x^2 - 2x + 1) = (x-1)(x-1)^2 = (x-1)^3 = 0$$

Бұдан $x - 1 = 0$ немесе $x = 1$. $x>1$ болғанда $f'(x)>0$, ал $x<1$ болса, $f'(x)<0$. Сондықтан, $x = 1$ болғанда берілген функция минимум мәнін қабылдайды және ол $f_{\min} = 0$.

Мысал. $2x^3 - 3x^2 - 12x - 11 = 0$ теңдеуінің түбірлерінің санын табайық.

Шешуі. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 11$ функциясын қарастырайық f функциясының мінездік нүктелерін табу үшін оның туындысын аламыз: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$. Бұл туынды x=-1 және x=2 нүктелерінде нөлге айналады.

Кесте толтырайық:

x	$(-\infty;-1)$	-1	(-1;2)	2	$(2;\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	Өседі	-4	Кемиді	-31	өседі
		max		min	

Функция $(-\infty;-1)$ аралығында $-\infty$-тен -4-ке дейін өседі, сондықтан бұл аралықта f(x)=0 теңдеуінің түбірлері болмайды, келесі аралықта f функциясы -4-тен -31-ге дейін кемиді. Ақырында, f функциясы $[2;\infty)$ аралығында -31-ден шексіздікке дейін өседі, бұл аралықта f(x)=0 теңдеуінің бір ғана түбірі бар. Сөйтіп, $2x^3 - 3x^2 - 12x - 11 = 0$теңдеуінің бір түбірі бар және ол түбір $(2;\infty)$ интервалына тиісті.

6. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері.Функцияны зерттеп, графигін салу. Айталық $f(x)$ функциясы $[a;в]$ кесіндісінде үзіліссіз болсын. Сонда бұл кесіндіде функция өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін қабылдайды. Берілген аралықта функцияның бірнеше мінездік нүктелері бар болсын деп ұйғарайық. Егер функция ең үлкен мәнін кесіндінің ішкі нүктесінде қабылдаса, онда ол функцияның максимум мәндерінің ең үлкені болады. Ең үлкен мәнге кесіндінің шеткі нүктесінде де ие болуы мүмкін.

Сонымен, $[a;в]$ кесіндіде функция өзінің ең үлкен мәніне шеткі нүктесінде, не максимумы болатын нүктеде ие болады екен.

Дәл осындай ұйғарымды, функцияның ең кіші мәні туралы да айтуға болады: функцияның ең кіші мәнін кесіндінің шеткі нүктесінде, не минимумы болатын ішкі нүктеде қабылдайды.

Демек, үзіліссіз функцияның кесіндідегі ең үлкен (ең кіші) мәнін анықтау үшін:

1 $f(x)$ функциясының туындысын табамыз $f'(x)$;

2 Кесіндінің ішінде жатқан мінездік нүктелерді, яғни функцияның туындысы $f'(x)=0$ –ге тең немесе туындысы жоқ нүктелерді табамыз;

3 Функцияның мінездік нүктелер мен кесінді ұштарындағы мәндерін есептеймі;

4 Осы табылған мәндердің ішіндегі ең үлкені мен ең кішісін таңдап аламыз.

Мысал. $f(x)=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x}$ функциясының $[1{,}6]$ кесіндісіндегі ең кіші және ең үлкен мәндерін табу керек.

Шешуі. 1) Функцияның анықталу облысы $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

2) $f(x)=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x}$ функциясы $[1{,}6]$ кесіндісінде үзіліссіз, олай болса, ол өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін:

-не аралықың ішінде жатқан мінездік нүктелерде;

-не кесінді ұштарында қабылдайды.

3) Функцияның мінездік нүктелерін (функцияның туындысы болмайтын, не нөлге тең нүктелерді) табамыз:

$f'(x)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{x^2-16}{8x^2}=\dfrac{(x-4)(x+4)}{8x^2}$, $f'(x)=0$, $\dfrac{(x-4)(x+4)}{8x^2}=0$, $x_1=-4\notin[1;6]$, $x_2=4\in[1;6]$

4) Функцияның мінездік нүктедегі және кесінді ұштарындағы мәндерін табамыз:

$f(1)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{2}{1}=2\dfrac{1}{8}$, $f(4)=\dfrac{4}{8}+\dfrac{2}{4}=1$, $f(6)=\dfrac{6}{8}+\dfrac{2}{6}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{3}=1\dfrac{1}{12}$

Бұл мәндерді салыстырып,мынадай қорытындыға келеміз:

$\underbrace{\max f(x)}_{x\in[1;6]}=f(1)=2\dfrac{1}{8}$; $\underbrace{\min f(x)}_{x\in[1;6]}=f(4)=1$

Демек, берілген функцияның $[1;6]$ кесіндісіндегі ең үлкен мәні $2\dfrac{1}{8}$ -ге,ал ең кіші мәні 1-ге тең.

Жауабы: функцияның $[1;6]$ кесіндісіндегі ең үлкен мәні $2\dfrac{1}{8}$ -ге, ал ең кіші мәні 1-ге тең.

Функцияны зерттеп, графигін салу. Функцияны зерттеуге байланысты жоғарыда айтылғандай жұмыстар жүргізілгеннен кейін функцяны зерттеп, графигін салуға көшуге болады. Функцияны зерттеп, графигін салудың жоспарын келтіру қажет:

1) Функцияның анықталу облысын табу;
2) Функцияның жұп, тақ, периодты екенін анықтау;
3) Функция графигінің координата өстерімен қиылысу нүктелерін табу;
4) Таңба-тұрақтылық аралықтарын табу;
5) Функцияның өсу және кему аралықтарын анықтау;
6) Функцияның экстремум нүктелерін және ол нүктелердегі мәндерін табу.
7) Функциянынң графигін салу.

Бұл ретті қатаң түрде сақтау әр уақытта міндетті емес. Бұл ретті сақтғанның да зины жоқ. Бірақ функцияның графигін салуда осы аталғандар орындалуы керек.

Мысал $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-x^2-4x+1$ функциясының қасиеттерін зерттеп графигін салайық.

Шешуі: 1) $D(f)=R$.

2) $f'(x)=2x^2-2x-4=2(x^2-x-2)=2(x-2)(x+1)$.

3) Мінездік нүктелері: -1; 2.

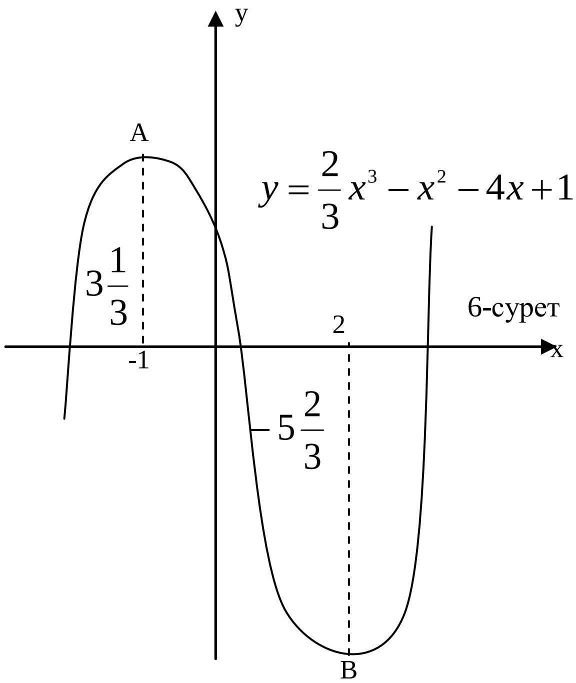
4) Кесте толтыру үшін туындының таңбасын, максимум, минимум нүктелерін табамыз.

Функцияның анықталу облысы сан өсін [-∞;-1],[-1;2],[2;+∞], бөліктерге бөледі. Сан өсінің бойында функциядан алынған туынды үзіліссіз екенін байқауға болады. Ең алдымен бірінші бөліктен –1 нүктесінің сол жағынан (мысалы, -2 нүктесінде) $f'(-2)=8>0$, ендеше –1 мінездік нүктесінің сол жағында туындының таңбасы оң екен. Енді (-1, 2) кесіндінің бойындағы нүктелерде, мысалы, 0 нүктесінде $f'(0) = -4 < 0$. Демек, бұл кесіндіде туынды таңбасы теріс, олай болса, $f(-1)$ - функцияның максимумы, яғни $f(-1) = 10/3$. $x = 2$ нүктесінің оң жағында (мысалы, $x = 3$) $f'(3) = 8 > 0$. Сонымен туындының таңбасы минуспен плюске ауысты, олай болса, $f(2)$-функцияның минимумы, яғни $f(2) = -5\frac{2}{3}$.

Бұл мәндерді кестеге жазсақ:

x	$-\infty < x < -1$	1	$-1 < x < 2$	2	$2 < x < \infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$3\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-5\frac{2}{3}$	$\nearrow$
		max		min	

5) Кестеге сүйеніп функцияның графигін 6-сурет арқылы кескіндеуге болады.



6-сурет