9-Лекция

Алғашқы функция мен интегралды оқыту әдістемесі

Жоспары:

1. Алғашқы функция ұғымы.
2. Қисық сызықты трапецияның ауданы
3. Анықталған интеграл
4. Анықталған интеграл жазық фигуралардың ауданына, айналу денелерінің көлеміне байланысты есептер шығару

Анықталған интеграл ұғымын енгізу ең негізгі қадам болып табылады. Анықталған интеграл ұғымын енгізудің бір әдістемелік схемасы мынадай:

1) лайықты есептер келтіру;

2) интегралдың анықтамасын тұжырымдау.

Интеграл ұғымын оған келтіретін дайындық есептерін қарастырудан бастаған тиімді.

1-есеп. $[a;b]$ кесіндісінде үзілісіз және теріс емес $y = f(x)$ функциясы берілсін. Алғашқы функция ұғымына байланыссыз осы функциямен $x=a$ және $x=b$ түзулерімен шектелген қисық сызықты трапецияның ауданы S-ті табудың жаңа тәсілін көрсетіңдер.

Берілген есепті шешуді екі кезеңге бөлуге болады.

1.Сатылы фигураны құрып, оның ауданын есептеу. Ол үшін $[a;b]$ кесіндісін теңдей етіп n бөлікке бөлеміз. Айталық Δx – осындай кесіндінің әрбіреуінің ұзындығы болсын. Бөлу нүктелерін $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, мұндағы $x_1 = a; x_{n+1} = b$ деп белгілейміз. $[x_1; x_2]$ кесіндісін табаны етіп, биіктігі $f(x_1)$ болатын, ал $[x_2; x_3]$ кесіндісінде – биіктігі $f(x_2)$ болатын тіктөртбұрыш саламыз. Дәл осы сияқты қалған кесінділерде де тіктөртбұрыштар саламыз. Сонда бұл тіктөртбұрыштардың барлығы бірігіп, «сатылы» фигураны құрады және оның ауданы мынаған тең болады:

$$S_n = f(x_1)\cdot\Delta x_1 + f(x_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\cdot\Delta x_n.$$

2.Қисық сызықты трапецияның ауданы S-ті S_n арқылы өрнектеу. Енді $[a;b]$ кесіндісін өте «ұсақ» бөліктерге бөлуді қарастырайық. Ол үшін жоғарыдағы тәсілмен сатылы фигура құрамыз. Сондағы шыққан суреттерді салыстыру арқылы Δx неғұрлым аз болған сайын, яғни n үлкен болған сайын, S_n шамасы S–тен соғұрлым аз өзгеретінін көреміз. Сондықтан қисық сызықты трапецияның ауданы S_n-нің $n \to \infty$ шегі деп қарастыруға болады. Математикада бұл деректің шынында да орындалатындығы дәлелденеді. Сонымен,

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Шешімі осындай $f(x_1)\cdot\Delta x_1 + f(x_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\cdot\Delta x_n$ қосындының шегін табуға келіп тірелетін тағы бір есепті қарастырамыз.

2-есеп. Айталық, материалдық нүкте $[T_1;T_2]$ кесіндісінде түзу сызықпен белгілі бір ($v = v(t) - [T_1;T_2]$ кесіндісіндегі үздіксіз функция) лездік жылдамдықпен қозғалсын. Осы материалдық нүктенің T_1 мен T_2 уақыт аралығындағы жүрген жолын табу қажет болсын.

Қарапайым жағдайда, лездік жылдамдық тұрақты шама болғанда, дененің жүрген жолы оның жылдамдығы мен уақытының көбейтіндісіне тең болады. Жалпы жағдайда, лездік жылдамдық тұрақты болмаған кезде, бұл есепті былайша шешеді.

1. $[T_1;T_2]$ кесіндісін бөлу нүктелері $t_1 = T_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, t_{n+1} = T_2$ арқылы ұзындықтары бірдей $\Delta t = \dfrac{T_2 - T_1}{n}$ болатын n бөлікке (кесіндіге) бөлеміз. Содан кейін

$S_n = \vartheta(t_1)\cdot\Delta t + \vartheta(t_2)\cdot\Delta t + \vartheta(t_n)\cdot\Delta t$ қосындысын құрамыз.

2. S жолын S_n арқылы өрнектейміз: S_n-дегі әрбір қосылғыш дененің сәйкес уақыты аралығында жүрген жолын жуық шамада көрсетеді.

Бұл жуықтаудың нәтижесі *Δt* неғұрлым аз, яғни, *n* бөлік неғұрлым көп болған сайын, соғұрлым дәлірек болатындығы айқын. Сондықтан, дененің $\left[T_1;T_2\right]$ уақыт аралығында жүрген жолы $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ шегі арқылы анықталады.

Осы екі есепті шешудің нәтижелерін салыстыра отырып, оларды шешудің жалпы тәсілін тұжырымдауға болады: функцияны берілген аралықта теңдей етіп бөліктерге бөлу; ізделінді шаманың жуық шамадағы мәні болатын

$f(x_1)\cdot\Delta x_1+f(x_2)\cdot\Delta x_2+\ldots+f(x_n)\cdot\Delta x_n$ қосындысын құру; шекке өту

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_1)\cdot\Delta x_1+f(x_2)\cdot\Delta x_2+\ldots+f(x_n)\cdot\Delta x_n).$$

Осындай қосындылардың шегін табу жаратылыстану ғылымы мен техниканың алуан түрлі салаларында жиі кездеседі, сондықтан олар «a-дан *b*-ға дейін *f(x)* функциясынан алынған интеграл» деп аталатын және

$$\int_a^b f(x)dx$$

деп белгіленетін а**нықталған интнеграл** деген арнаулы атқа ие болған.

Сонымен, анықтама бойынша

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}(f(x_1)\cdot\Delta x_1+f(x_2)\cdot\Delta x_2+\ldots+f(x_n)\cdot\Delta x_n).$$

f(x) –[a ,*b*] кесіндісінде үзілісіз функция.

$x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}$-[$a$,*b*] кесіндісін теңдей етіп, *n* бөлікке бөлетін бөлу нүктелері; *Δx* - әрбір осындай бөліктердің ұзындығы.

Шығарылған есептердің нәтижесін жазайық. [a ,*b*] кесіндісінде үздіксіз *f(x)* функциясымен берілген қисық сызықты трапецияның ауданы мынаған тең

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

Жылдамдығы $v=v(t)$-ға тең, мұндағы $v=v(t)$ - $\left[T_1;T_2\right]$кесіндісінде үзілісіз функция, материалдық нүктенің T_1 ден T_2 -ге дейінгі уақыт аралығында жүрген жолы:

$$S=\int_{T_1}^{T_2}v(t)dt.$$

Енді интеграл мен алғашқы функция ұғымдарын бір-бірімен байланыстыру оңай. Қисық сызықты трапецияның ауданын $S=F(b)-F(a)$ және $S=\int_a^b f(x)dx$ салыстырып, мынадай қорытындыға келеміз:

$$S=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a), \qquad (2)$$

мұндағы *F – f* функциясының [a ,*b*] кесіндісіндегі алғашқы функциясы.

(2) формуланы Ньютон-Лейбниц формуласы деп атайды.

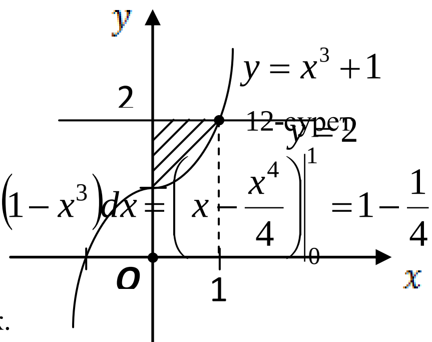
Бұл формула анықталған интегралды алғашқы функцияны табу арқылы есептейтін ең негізгі және тиімді формула болып табылады.

2. Анықталған интегралды қолдану

Анықталған интеграл жазық фигуралардың ауданына, айналу денелерінің көлеміне байланысты есептер шығару арқылы тиянақталады.

Мысал. $y = x^3 + 1$ қисығымен, $y = 2$ түзуімен және Oy өсімен шектелген фигураның ауданын табу.

Шешуі: Суретте берілген жазық фигураның ауданын есептейміз:



12-сурет

$$S = \int_0^1 \left(2 - x^3 - 1\right)dx = \int_0^1 \left(1 - x^3\right)dx = \left(x - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

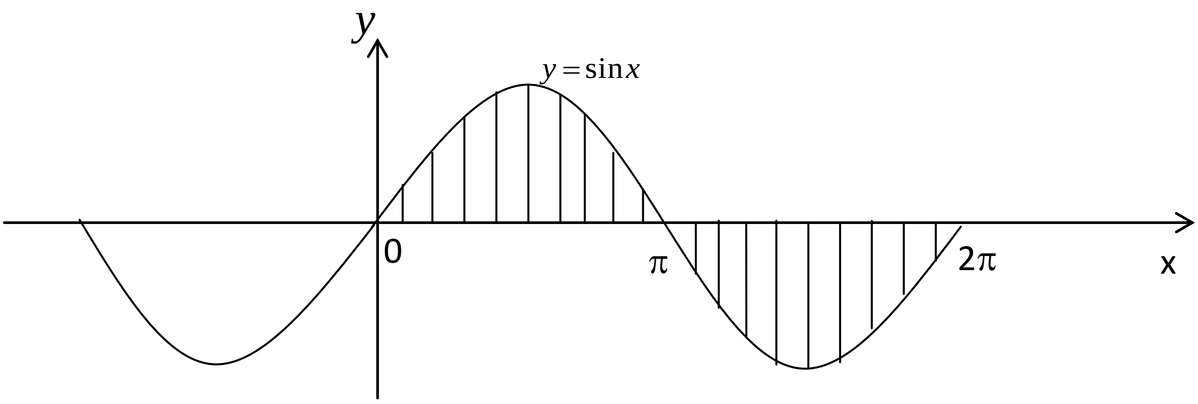
Жауабы: $\frac{3}{4}$ кв. бірлік.

Мысал. $y = \sin x$, $0 \le x \le 2\pi$, синусоида және Ox өсімен шектелген жазық фигура ауданын табу керек.

Шешуі: $0 \le x \le \pi$ үшін $\sin x \ge 0$, ал $\pi \le x \le 2\pi$ үшін $\sin x \le 0$ болатындықтан фигураның ауданы мынаған тең

$$S = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx - \cos x |_0^{\pi} + \cos x |_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -\left(\cos\pi - \cos 0\right) + \cos 2\pi - \cos\pi = -\left(-2\right) + 1 + 1 = 4.$$

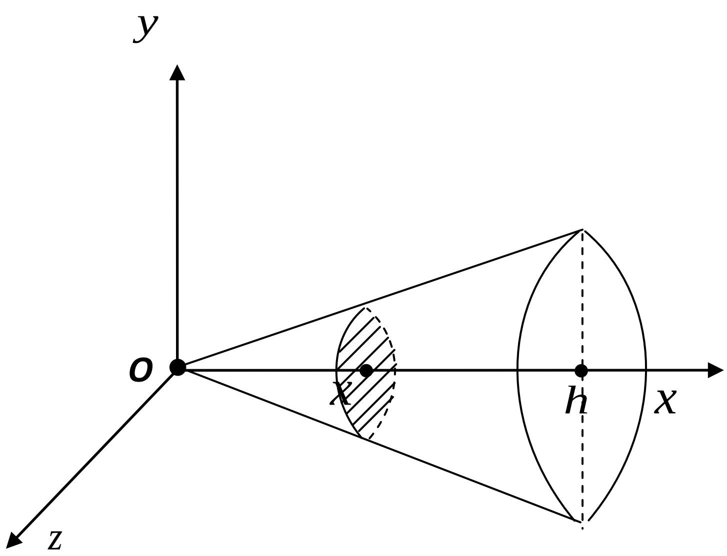


13-сурет

Жауабы: 4 кв. бірлік.

Мысал. Табан ауданы P -ға, биіктігі h -қа тең конустың көлемін есептейік.

Шешуі: Конустың төбесін координаталар басына сәйкес



14-сурет

етіп, биіктігі Ox өсі бойымен бағыттайық (14-сурет).

Кез келген x нүктесі арқылы Ox өсіне перпендикуляр жазықтық жүргіземіз. Ол жазықтық конустың $Q(x)$ болатын дөңгелекті қиып өтеді.

Конустың параллель қималарының аудандары осы қималардан конустың төбесіне дейінгі қашықтықтардың квадраттарының қатынасына тең екені геометрия курсынан белгілі, яғни $\frac{Q(x)}{P}=\frac{x^2}{h^2}$, мұндағы $Q(x)$ - конустың x нүктесі арқылы Ox өсіне перпендикуляр жазықтықпен қимасының ауданы, P - конус табанының ауданы, h - конустың биіктігі, x шамасы x нүктесі арқылы өтетін қимадан конустың төбесіне дейінгі қашықтық.

Соңғы теңдіктен $Q(x)=\frac{P}{h^2}x^2$ шығады.

Енді интеграл көмегімен конустың көлемін есептейік:

$$V=\int_0^h Q(x)dx=\frac{P}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{P}{h^2}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h=\frac{P}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}Ph.$$

Сонымен, $V=\frac{1}{3}Ph$ конустың көлемін есептеу формуласын алдық.

Мысал. $y=x^2$ және $x=y^2$ доғаларымен шектелген фигураның Ox өсінен айналуынан пайда болған дененің көлемін табу керек.

Шешуі: Айналу денесінің көлемінің формуласын және осы доғалардың қиылысу нүктелерінің абсциссалары $x=0,\ x=1$ болатынын ескере отырып, алатынымыз:

$$V=\pi\int_0^1 x^4dx=\pi\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1=\frac{\pi}{5}.$$

Жауабы: $\frac{\pi}{5}$.